بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم

گــروه فیــزیک

بررسی الکترودینامیک کوا نتومی کاواک در نظریه اطلاعات کوانتومی

استاد راهنما:

دکتر قادر نجارباشی

پژوهشگر:

فاطمه خشامی

دانشگاه محقق اردبیلی

پاییز ۱۳۹۰

تقدیر و تشکر:

خانواده عزیزم که بال‌های محبت خود را گسترانیدند و با تحمل دشواری‌ها، سبب شدند تا در کمال آسودگی خیال و فراغت بال، شوق آموختن در من زنده بماند صمیمانه سپاسگزارم .

نام خانوادگی دانشجو: خشامی	نام: فاطمه
عنوان پایان نامه: بررسی الکترودینا میک کوا نتومی کاواک در نظریه اطلاعات کوانتومی	
استاد راهنما: دکتر قادر نجار باشی	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: فیزیک بنیادی گرایش: نظری دانشگاه: محقق اردبیلی	
دانشکده: علوم تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۰ تعداد صفحه:	
کلید واژه‌ها: ۱) اطلاعات کوانتومی ۲) کاواک ۳) درهم‌تنیدگی کوانتومی	

چکیده:

در این پایان نامه به مطالعه نظریه اطلاعات کوانتومی و درهم‌تنیدگی کوانتومی در اپتیک کوانتومی پرداخته می‌شود. الکترودینامیک کوانتومی کاواک را معرفی کرده و اندرکنش آن را با اتم‌های چند ترازی با میدان الکترومغناطیس در کاواک اپتیکی بررسی می‌کنیم. پدیده‌های همانند به دام انداختن یون‌ها به صورت خطی و پدیده تشدید مغناطیسی که برای طراحی کامپیوترهای کوانتومی اهمیت دارند مطالعه می‌شوند. سپس تقابل اتم‌ها با کاواک اپتیکی را بررسی می‌کنیم و روش‌های مختلفی را برای حالت‌های در هم تنیده در سیستم‌های اپتیک کوانتومی مطالعه می‌کنیم.

فهرست مطالب

صفحه

فصل اول: آشنایی بر نظریه اطلاعات کوانتومی **۱**

۱-۱- مقدمه ۲

۱-۲- بررسی نظریه اطلاعات کوانتومی ۴

۱-۳- بیت‌ها ۵

۱-۴- سیستم‌های کوانتومی و کیوبیت ۵

۱-۵- تفاوت بین بیت کلاسیکی و کیوبیت ۶

۱-۶- درهم‌تنیدگی کوانتومی ۶

۱-۷- ماتریس چگالی ۸

۱-۸- حالت‌های خالص و مرکب ۸

۱-۹- حالت‌های درهم تنیده ۸

۱-۱۰- تریس جزیی ۹

۱-۱۱- تصویر اندرکنشی ۹

۱-۱۲- معرفی ابزارهای کوانتومی ۱۰

۱-۱-۱۲- به دام اندختن یون‌ها ۱۰

۱-۲-۱۲- دام انداختن یونی به صورت خطی ۱۱

۱-۱۳- پدیده تشدید مغناطیسی هسته ۱۵

۱-۱-۱۳- آنتروپی فون نویمان ۱۷

۱-۲-۱۳- اسپین ۱۷

فصل دوم: کاواک

۲-۱- جسم سیاه ۲۱

۲-۲- لیزر ۲۱

۲-۳- لیزر و اتم دو ترازه ۲۲

۲-۴- کاواک اپتیکی ۲۴

۲-۵- دینامیک کوانتومی ۲۵

۲-۶- الکترودینامیک کاواک کوانتومی ۲۵
۲-۷- کوانتش میدان مد تکتایی در یک کاواک ۲۵
۲-۸- طیف انرژی نوسانگر هماهنگ ۲۶
۲-۹- اندرکنش اتم دو ترازه در کاواک اپتیکی ۲۷
۲-۱۰- الکترودینامیک کاواک کوانتومی برای گیت فاز کوانتومی ۳۰
فصل سوم: گیت‌های کوانتومی
۳-۱- کامپیوترهای کوانتومی ۳۴
۳-۲- پردازش اطلاعات کوانتومی ۳۵
۳-۳- گیت‌های کوانتومی ۳۵
۳-۴- گیت‌های تک کیوبیتی ۳۵
۳-۴-۱- گیت هادامارد ۳۶
۳-۴-۲- گیت‌های تغییر دهنده فاز ۳۶
۳-۴-۳- گیت AND ۳۶
۳-۴-۴- گیت NOT ۳۶
۳-۵- گیت‌های دو کیوبیتی ۳۷
۳-۵-۱- گیت کنترل نات ۳۷
۳-۵-۲- گیت جابه‌جایی ۳۷
۳-۶- اندرکنش بین اتم‌های ۲ ترازه و یک میدان کاواکی کوانتومی ۳۸
۳-۷- اندرکنش بین یک اتم ۳ ترازه با یک میدان اپتیکی همدوس ۳۹
۳-۸- اندازه‌گیری کوانتومی از اتم ها توسط کاواک ۴۲
۳-۸-۱- اندازه گیری‌های POVM ۴۳
۳-۹- تبدیل فوریه بوسیله الکترودینامیک کاواک کوانتومی ۴۵
۳-۹-۱- مدار کوانتومی و تشخیص آزمایشی از توزیع کوانتومی انتقال فوریه بوسیله گیت CR_KS ۴۹
فصل چهارم: درهم‌تنیدگی کوانتومی توسط کاواک
۴-۱- سنجه درهم تنیدگی ۵۱
۴-۲- تلاقی ۵۲

۴-۳- آنتروپی فون نویمان ۵۲
۴-۴- حالات w و GHZ ۵۲
۴-۵- حالت‌های بل ۵۳
۴-۶- خلق از حالت خوشه‌ی درهم‌تنیده چهار- اتمی در الکترودینامیک کاواک کوانتومی ۵۳
۴-۷- تراکم از حالت‌های درهم تنیده بوسیله جابه‌جایی درهم تنیده در الکترودینامیک کاواک کوانتومی ۵۵
۴-۱-۷- جابه‌جایی درهم تنیده پایه‌ای بر تراکم درهم‌تنیدگی ۵۶
واژه نامه ۵۹
مراجع ۶۰

فصل اول

آشنایی بر نظریه اطلاعات کوانتومی

۱-۱- مقدمه

یک تفاوت مهم میان مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی ظاهر شدن درهم‌تنیدگی[۱] در سیستم‌های کوانتومی چند ذره‌ای است. خواص درهم تنیدگی کوانتومی به طور عجیبی متفاوت با آن چیزی است که ما در دنیای کلاسیک با آن آشنا هستیم. با توسعه غیر قابل تصور درهم تنیدگی در فیزیک، شاید به جرات بتوان گفت که امروزه کمتر پدیده‌ی در کوانتوم وجود دارد که درهم تنیدگی در آن مطرح نباشد. ارسال کوانتومی[۲]، کپی گیری کوانتومی[۳]، رمزنگاری کوانتومی[۴]، کد گذاری فشرده[۵] همگی ماحصل نفوذ این کمیت در دنیای ما می‌باشند. کاربردهای وسیع درهم تنیدگی کوانتومی در پردازش اطلاعات کوانتومی نظیر محاسبات کوانتومی و رمزنگاری کوانتومی توجه زیادی را به خود اختصاص داده است. میزان درهم تنیدگی این سیستم‌ها در میزان ارسال اطلاعات نقش مهمی را ایفا می‌کنند[۲-۱].

تعاریف متنوعی برای درهم تنیدگی وجود دارد، در واقع هر شخصی بر اساس دیدگاه و نوع برخوردی که با درهم تنیدگی داشته تعابیر مختلفی برای آن ارائه داده است. به عنوان مثال درهم‌تنیدگی را می‌توان همبستگی بین سیستم‌هایی دانست که با هم برهم کنش داشته‌اند ولی اکنون این برهم کنش از بین رفته است.

بنابراین مسئله درهم تنیدگی در سیستم‌های کوانتومی یک مسئله بنیادی و از جمله مفاهیم عمیق در این زمینه می‌باشد. درهم‌تنیدگی کمک بزرگی در ساخت کامپیوترهای کوانتومی کرده است. کامپیوترهای کوانتومی[۶] اطلاعات را در قالب کیوبیت‌ها[۷] دریافت می‌کنند. یک کیوبیت اعداد منطقی یک، صفر یا برهم‌نهی از دو مقدار منطقی صفر و یک می‌باشد.

بین کامپیوترهای کوانتومی و کلاسیک تفاوت اساسی وجود دارد. یک کامپیوتر کلاسیک براساس قوانین فیزیک کلاسیک دستورات از پیش تعیین شده‌ای را اجرا می‌کند. ولی کامپیوترهای کوانتومی با طبیعت دودویی فیزیک کلاسیک محدود نمی‌شوند. شماری از مسائلی که نمی‌توانند توسط کامپیوترهای کلاسیک حل شوند بوسیله کامپیوترهای کوانتومی قابل بررسی می‌باشند. در سال ۱۹۹۴ یک الگوریتم کوانتومی بوسیله پیترشور[۸] طراحی شده است. که توانسته مسائل مهم و پیچیده‌ای را با سرعت بالا و دقت

1-Entanglement
2-Quantum teleportation
3-Quantum cloning
4- Quantum cryptography
5-Dense coding
6- Quantum computer

زیاد حل کند[۱۳]. پدیده‌های مهمی که برای کامپیوترهای کوانتومی استفاده شده‌اند شامل به دام انداختن یون‌ها به صورت خطی و پدیده تشدید مغناطیسی می‌باشند. که این دو پدیده راه حلی برای انجام محاسبات پیچیده هستند.

پدیده به دام انداختن یون‌ها به عنوان مثال منیزیم به کمک پرتوی لیزری انجام می‌شود. بار یون‌های یک اتم توسط پرتوی لیزری تا دمای میکروکلوین سرد خواهند شد. یون‌ها با فرکانس رادیوی (RF) بر روی محور به صورت خطی منظم خواهند شد.

آزمایش دیگری که برای کامپیوترهای کوانتومی طراحی شده است پدیده تشدید مغناطیسی نام دارد که میدان مغناطیسی لازمه تشکیل این پدیده می‌باشد. فوتونی که انرژی آن با اختلاف انرژی بین دو حالت پرتونی برابر است می‌تواند این پروتون را وادار به انجام گذار از یک حالت به حالت دیگر کند. که در حالت عادی اختلاف انرژی بین ترازهای اسپین هسته صفر است، این پدیده را تشدید مغناطیسی می‌گویند.

برای محاسبه کوانتومی، گیت[۱]های کوانتومی ارزش بسزایی دارند. گیت‌های تک کیوبیتی و گیت‌های دو کیوبیتی مختلفی تا به حال مورد بررسی قرار گرفته است. به عنوان مثال گیت هادامارد[۲] که گیت تک کیوبیتی می‌باشد و گیت‌های کنترل نات[۳] و کنترل فاز[۴] به عنوان گیت‌های دو کیوبیتی معرفی می‌شوند.

با اندرکنش زمانی بین یک میدان کاواک کوانتومی با اتم‌های دو ترازه و سه ترازه می‌توانیم گیت‌های کوانتومی را به آسانی بسازیم، و حالت‌های درهم تنیده را در کاواک مورد نظر بررسی کنیم.

در این پایان نامه به مطالعه نظریه اطلاعات کوانتومی و درهم تنیدگی کوانتومی در اپتیک کوانتومی پرداخته می‌شود. مباحث پوشش داده شده در این پایان نامه شامل کوانتش میدان مد تکتایی در یک کاواک، اندرکنش میدان - اتم، گیت‌های کوانتومی، درهم‌تنیدگی در کاواک، تشخیص و بررسی الکترودینامیک کاواک کوانتومی و معرفی ابزارهای کوانتومی ازجمله به دام انداختن یون‌ها و پدیده تشدید مغناطیسی و معرفی کامپیوترهای کوانتومی می‌باشند. این پایان نامه شامل چهار فصل می‌باشد:

در فصل اول به معرفی نظریه اطلاعات کوانتومی و مفهوم درهم تنیدگی کوانتومی می‌پردازیم. همچنین به بررسی ابزارهای کوانتومی پرداخته و برخی خواص آن‌را مورد بحث قرار می‌دهیم.

1- Gate
2- Hadamard
3-CNOT
4- Controlled phase

در فصل دوم به مطالعه الکترودینامیک کاواک کوانتومی پرداخته و سپس اندرکنش اتم‌های دو ترازه در کاواک اپتیکی را بررسی کرده و به کمک آن گیت یکانی چرخشی یک - بیتی را تشکیل می‌دهیم و در ادامه یک اتم سه ترازه را در اندرکنش با کاواک قرار می‌دهیم و گیت فاز کوانتومی را می‌سازیم.

در فصل سوم ابتدا کامپیوترهای کوانتومی را مطالعه کرده و در ادامه گیت‌های منطقی هادامارد، گیت تغییر دهنده فاز، گیت جابه‌جایی و گیت کنترل نات را معرفی می‌کنیم. سپس اندرکنش بین اتم‌های دو ترازه و یک میدان کاواکی کوانتومی را مطرح کرده و به کمک آن گیت جابه‌جایی را می‌سازیم و همچنین یک اتم سه ترازه را با یک میدان اپتیکی همدوس مورد بررسی قرار می‌دهیم و حالت‌های مختلف گیت کنترل نات را تشکیل می‌دهیم و درنهایت توزیع انتقال فوریه کوانتومی را معرفی کرده و آن را برای حالت‌های دو کیوبیتی و چند کیوبیتی بررسی می‌کنیم.

در فصل چهارم ابتدا حالت‌های Wو GHZ و بل را معرفی می‌کنیم و سپس سنجه‌های اندازه گیری در هم تنیدگی را معرفی می‌کنیم و سپس حالت‌های درهم تنیده را در کاواک بدست می‌آوریم.

۱-۲- بررسی نظریه اطلاعات کوانتومی

در مکانیک کوانتوم، اطلاعات کوانتومی عبارت است از اطلاعات فیزیکی‌ای که در یک حالت سیستم کوانتومی جای گرفته‌اند. علاقه به بررسی سیستم کوانتومی دو ترازه از همان اوایل پیدایش مکانیک کوانتومی نمود پیدا کرد. این سیستم‌ها با پیدایش نظریه اطلاعات کوانتومی دوباره توجه زیادی را به خود جلب کرد. برای مثال اسپن با حالت بالا و پایین می‌تواند یک مثال کاربردی از سیستم دو ترازه باشد. این سیستم‌های دو ترازه کوانتومی در نظریه اطلاعات کوانتومی یک بیت کوانتومی (کیوبیت) نامیده می‌شوند. که عبارت از یک سیستم کوانتومی دو حالته (دو سطحی) است. بر خلاف حالات دیجیتال کلاسیک که مجزا می‌باشند، یک سیستم کوانتومی دو حالته قادر است در هر لحظه از زمان در یک برهم نهی از دو حالت خود وجود داشته باشد.

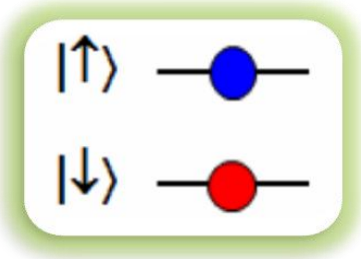
دو کیوبیت ساده‌ترین حالت کوانتومی است که مفهوم درهم تنیدگی در آن می‌تواند ظاهر شود. حالت‌های که بیشترین میزان درهم‌تنیدگی را دارند بیشترین میزان اطلاعات کوانتومی را می‌توانند ارسال کنند. اطلاعات کوانتومی می‌تواند در یک برهم نهی از مقادیر پایه‌ی خود قرار بگیرد. مکانیک کوانتومی اجازه نمی‌دهد که حالتی از یک سیستم کوانتومی را با هر دقت دلخواه تعیین نماییم (بواسطه‌ی اصل عدم قطعیت)[۳-۴-۵-۶-۷].

۱-۳- بیت‌ها

کوچکترین واحد اطلاعات در کامپیوترهای کلاسیکی بیت نام دارد. که مقادیر صفر و یک را می‌پذیرد. به عنوان مثال یک خازن پر در حالت یک و یک خازن خالی در حالت صفر می‌باشد. در کامپیوتر های امروزه اگر یک بیت مثلا در حالت صفر باشد، وقتی اندازه گیری شود، نتیجه باز صفر است و حالت این بیت بعد از اندازه گیری صفر باقی می‌ماند.

۱-۴- سیستم‌های کوانتومی و کیوبیت

یک سیستم دو ترازه که در فضای هیلبرت دوبعدی C^2 قرار دارد یک بیت کوانتومی (کیوبیت) نامیده می‌شود. برای مثال اسپین با جهت‌های بالا و پایین یک سیستم دو ترازه، دو حالت قطبش یک فوتون، راستگرد یا چپ گرد که بر هم عمودند یا یک جفت تراز الکترونی در یک اتم یا یون، یک بیت کوانتومی را تشکیل می‌دهد که می‌توان جهت‌های بالا و پایین اسپین را پایه‌های این فضای دو بعدی در نظر گرفت [۲-۸].



در این فضا می‌توان یک جفت حالت‌های کوانتومی نرمالیزه و برهم اورتوگونال را به صورت زیر انتخاب نمود:

$$|1\rangle\equiv\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\ ,\quad |0\rangle\equiv\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad (۱)$$

بنابراین یک کیوبیت را می‌توان به صورت برهم نهی از پایه‌های بالا نوشت.

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad , \quad a,b\in c \qquad (۲)$$

که ضرایب a و b اعداد مختلطی هستند به طوری که:

$$b=|b|e^{i\beta}\ ,\quad a=|a|e^{i\alpha}\ ,\quad |a|^2+|b|^2=1 \qquad (۳)$$

و با توجه به اینکه برای حالات کوانتومی آزادی فاز کلی اهمیتی ندارد سپس می‌توان یک کیوبیت را در حالت کلی به صورت زیر نوشت:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\ ,\ (0\le\theta\le\pi\ ,\ 0\le\varphi\le 2\pi) \qquad (۴)$$

پس برخلاف حالت کلاسیکی که فقط مقادیر صفر و یک را قبول می‌کند، یک بیت کوانتومی می‌تواند به صورت بر هم نهی از دو حالت بیان شود.

کیوبیت‌ها دارای یکی از چهار نوع ذره کوانتومی فوتون، الکترون، اتم و یون می‌باشند. فوتون‌ها با یکدیگر بر هم کنش خوبی ندارند، اما می‌توانند به آسانی از نقطه‌ای به نقطه دیگر جابه‌جا شوند و این خاصیت آن‌ها را به گزینه‌ای مناسب جهت انتقال اطلاعات کوانتومی تبدیل می‌کند. الکترون‌ها، اتم‌ها و یون‌ها بر خلاف فوتون‌ها، به آسانی با هم برهم‌کنش دارند، اما جابه‌جایی خوبی ندارند و به همین دلیل برای پردازش و ذخیره اطلاعات کوانتومی بسیار مناسب می‌باشند.

۱-۵- تفاوت بین بیت کلاسیکی و کیوبیت

۱) خطای ایجاد شده در یک بیت کلاسیکی یک خطای گسسته است که در آن (۱)۰ به مقدار (۰)۱ تبدیل می‌شود و حال آنکه خطای ایجاد شده در یک کیوبیت پیوسته است و بردار حالت بیت کوانتومی می‌تواند به طور پیوسته تغییر کند.

۲) می‌توانیم یک بیت کلاسیکی را مشاهده کرد و از خطای ایجاد شده در آن آگاهی یافت ولی یک بیت کوانتومی را به راحتی نمی‌توان مشاهده کرد زیرا مشاهده‌ی آن عموما منجر به کاهش تابع حالت و از بین رفتن حالت اولیه می‌شود.

۳) می‌توان نسخه‌های متعددی از یک بیت کلاسیک را تهیه کرد در حالی که طبق قضیه No cloning نمی‌توان یک حالت کوانتومی را تکثیر کرد و نسخه‌های متعددی از آن درست کرد.

یک بیت مانند سکه‌ای است که پشت و رو دارد اما یک کیوبیت همانند سکه‌ای است که پشت و رو دارد، اما علاوه بر این دو حالت، می‌تواند همزمان به صورت پشت و رو و یا هر حالت بینابینی قرار بگیرد. این امر برای بیت‌های معمول غیرممکن است، اما یک بیت می‌تواند در دو حالت، دو بیت در چهار حالت، سه بیت در هشت حالت، و... قرار بگیرند. اندازه حافظه کوانتومی به صورت نمایی با تعداد کیوبیت‌ها افزایش می‌یابد.

۱-۶- درهم‌تنیدگی کوانتومی

در اوایل سال ۱۹۳۵ درهم‌تنیدگی کوانتومی به‌عنوان نوعی همبستگی میان حالت‌های کوانتومی مطرح شد و تفاوت مهم میان مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی، ظاهر شدن درهم‌تنیدگی در سیستم‌های کوانتومی مرکب است، درنتیجه درهم‌تنیدگی کوانتومی یک مسئله بنیادی در سیستم‌های کوانتومی

می‌باشد و درهم‌تنیدگی کوانتومی در پردازش اطلاعات کوانتومی نظیر محاسبات کوانتومی، رمزنگاری کوانتومی مورد استفاده قرار می‌گیرد. درهم‌تنیدگی این سیستم‌ها در میزان ارسال اطلاعات نقش مهمی را ایفا می‌کند.

درهم‌تنیدگی، همبستگی کوانتومی دو یا چند ذره است حتی وقتی به طور فضایی از هم جدا شده باشند، و ساده‌ترین تعریفی که می‌توان برای درهم‌تنیدگی ارائه داد به این صورت است که یک حالت را درهم‌تنیده گویند، اگر نتوان آنرا به صورت حاصل ضرب تانسوری حالات زیر سیستم تشکیل‌دهنده آن نوشت. برای مثال اگر حالت <0| و<1| ویژه بردارهای حالات زیر سیستم‌های اول و دوم باشند، آنگاه حالت زیر در فضای هیلبرت دو سیستم مرکب وجود دارد.

$$|\psi>=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0>\otimes|0>+|1>\otimes|1>) \qquad (۵)$$

این حالت را نمی‌توان به صورت حاصل‌ضرب تانسوری حالات زیر سیستم‌های اول و دوم نوشت. توجه داریم که یافتن چنین حالت‌هایی در سیستم‌های کلاسیکی ممکن نیست. و این یک خاصیت کاملاً کوانتومی می‌باشد. حالت‌هایی که بتوان آن را به صورت حاصل‌ضرب تانسوری حالات زیر سیستم تشکیل دهنده آن نوشت، حالت‌های جداپذیر گویند.

درنظریه اطلاعات کوانتومی، هنگام بررسی یک سیستم کوانتومی، علاوه بر تشخیص درهم‌تنیده یا جداپذیر بودن، میزان درهم تنیدگی نیز از اهمیت بالایی برخوردار است. باید توجه داشت انتقال اطلاعات کوانتومی و ارسال کوانتومی از طریق حالات درهم‌تنیده انجام می‌گیرد، میزان موفقیت آن‌ها بستگی به میزان درهم تنیدگی یک سیستم کوانتومی دارد. پس معرفی کمیتی که میزان این درهم‌تنیدگی را نشان دهد از اهمیت زیادی برخوردار است. این کمیت سنجه[1] درهم‌تنیدگی نام دارد.

برای درهم‌تنیدگی مقیاس‌های مختلفی وجود دارد و یکی از آنها تلاقی[2] می‌باشد. اگر $\rho(f)$ حالت سیستم کوانتومی‌باشد $\bar{\rho}(f)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{\rho}(f)=\rho(f)(\sigma_1^y\otimes\sigma_2^y)\rho^*(f)(\sigma_1^y\otimes\sigma_2^y) \qquad (۶)$$

$\rho^*(f)$همیوغ مختلط از تابع $\rho(f)$ در پایه استاندارد می‌باشد و σ^y ماتریس پاولی برای سیستم کوانتومی با اسپین½ است و تلاقی برای کیوبیت درهم‌تنیده شده به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$C=Max\{0,\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}-\sqrt{\lambda_3}-\sqrt{\lambda_4}\} \qquad \lambda_j(j=1,2,3,4) \qquad (۷)$$

توجه داریم که $0\leq C\leq 1$ که $C=0$ معادل با حالت جداپذیر، $C=1$ معادل با حالت ماکسیمال درهم‌تنیده[3] می‌باشد. در حالت خاص اگر Ψ نرمالیزه و دو کیوبیتی باشد داریم:

1 -Measure 2- Concurrence 3 -Maximally entagled state

$|\Psi>=a_{00}|00>+a_{01}|01>+a_{10}|10>+a_{11}|11>$

آنگاه $C=2|a_{00}a_{11}-a_{01}a_{10}|$

۱-۷- ماتریس چگالی

فرض کنید دو ذره با اسپین یک دوم داریم و این دو ذره در حالتی مثل حالت زیر قرار دارند:

$$|\Psi_{AB}> = a\ |+,+>+b|+,->+c|-,+>+d|-,->$$

حال می‌پرسم حالت ذره A چیست؟ در این جا درست است که هر ذره در حالت مشخصی قرار دارد. ولی نمی‌توان به ذره A بردار حالت مشخصی نسبت داد. در این مورد و تمامی حالات مشابه که دستگاه ما جزیی از یک دستگاه بزرگتر است حالت آن با یک ماتریس چگالی مشخص می‌شود. یک ماتریس چگالی باید خواص زیر را داشته باشد:

۱) ماتریس چگالی ρ یک عملگر در فضای هیلبرت $H = H_A \otimes H_B$ می‌باشد.

۲) ماتریس چگالی ρ یک عملگر هرمیتی است یعنی: $\rho = \rho^{\dagger}$

۳) ماتریس چگالی ρ دارای ویژه مقادیر مثبت می‌باشد.

۴) تریس ماتریس چگالی ρ، یک می‌باشد.

۱-۸- حالت‌های خالص و مرکب

پیدا کردن حالت‌های خالص در طبیعت عملا غیرممکن است، زیرا این سیستم‌ها با محیط اندرکنش دارند و آنچه عملا با آن مواجه می‌شویم حالات مرکب هستند. حالت‌هایی که بتوان آن را به صورت حاصل ضرب تانسوری حالات زیر سیستم تشکیل دهنده آن نوشت، حالت‌های جداپذیر گویند.

۱-۹- حالت‌های در هم تنیده

حالت کوانتومی ρ درهم تنیده هستند اگر نتوان آن را به صورت حاصل ضرب تانسوری حالات زیر سیستم‌های تشکیل دهنده آن نوشت. مثلا حالت‌های زیر در هم تنیده هستند:

$$|\Phi^{\pm}>=\frac{1}{\sqrt{2}}(|00>\pm|11>) \text{و} |\Psi^{\pm}\geq\frac{1}{\sqrt{2}}(|01>\pm|10>)$$

این حالت‌ها، حالت‌های بل نامیده می‌شوند. توجه داریم که حالت‌های بل دو به دو بر هم عمودند. مفهوم فیزیکی یک حالت در هم تنیده چیست؟وقتی دو ذره‌ی A و B غیر در هم تنیده هستند یعنی جدا پذیراند $|\Psi_{AB}>= |\Psi_A> \otimes |\Psi_B>$. پس حالت سیستم اول $|\Psi_A>$ و حالت سیتم دوم $|\Psi_B>$ می‌باشد ولی وقتی دو ذره‌ی A و B در هم تنیده هستند. با وجود اینکه حالت سیستم AB معلوم است ولی حالت

سیستم A وB به تنهای کاملا معلوم نیست. برای دیدن این مطلب و فهمیدن اینکه حالت سیستم A و B در هم تنیده است یا نه تریس جزیی را تعریف می‌کنیم.

۱-۱۰- تریس جزیی[1]

فرض کنید حالت یک سیستم دو ذره‌ی $|\Psi_{AB}>$ باشد در این صورت ماتریس چگالی کل سیستم یک حالت خاص به صورت زیر است.

$$\rho_{AB}=|\Psi_{AB}><\Psi| \qquad (۸)$$

اگر روی ذره‌ی A تریس بگیریم این بدین معنی است که علاقه‌ی به سیستم A نداریم. و در این صورت ماتریس چگالی ذره‌ی B بدست می‌آید و برعکس اگر روی ذره‌ی B تریس بگیریم در این صورت ماتریس چگالی ذره‌ی A بدست می‌آید. اگر $|\Psi_{AB}>$ را این چنین تعریف کنیم آنگاه داریم:

$$|\Psi_{AB}>=\sum_{j,k}\alpha_{JK}|j>_A|k>_B$$

$$\rho_{AB}=|\Psi_{AB}><\Psi|=\sum_{jk}\sum_{m.n}\alpha_{jk}|j>_A|k>_B\alpha^*_{mn}\ <m|_A<n|_B$$

$$=\sum_{jk}\sum_{m.n}\alpha_{JK}\,\alpha^*_{mn}|j>_A<m|\otimes|k>_B<n| \qquad (۹)$$

آن گاه تریس جزیی را برای ماتریس چگالی بالا تعریف می‌کنیم:

$$Tr_A=(|\Psi_{AB}><\Psi|)=\sum_i\langle i|\rho_{AB}|i\rangle_A=\sum_{ijkmn}\langle i|j\rangle_A\langle m|i\rangle_A|k>_B<n|\alpha^*_{mn}\alpha_{jk}$$

$$\sum_{jkn}\alpha_{jk}\alpha^*_{jn}|k>_B<n|=\rho_B \qquad (۱۰)$$

تریس جزیی یک عملگر فیزیکی قوی است.

۱-۱۱- تصویر اندرکنشی

می‌دانیم که برای نمایش توابع و اپراتورها در مکانیک کوانتومی، تصویرهای مختلفی وجود دارد. تصویر اندرکنشی به این شرح است که هامیلتونین کل یک تصویر اندرکنشی به صورت مجموع هامیلتونین بخش آزاد H_0 و بخش اندرکنشیH_1 می‌باشد.

هامیلتونین کل $H=H_0+H_1$

H_0 وابستگی صریح به زمان ندارد و $[H,H_0]=[H,H_1]=0$.تابع موج تصویر اندرکنشی برحسب تصویر شرودینگر:

$$|\Psi_I(t)>_I=u^{\dagger}_{H_0,t}|\Psi(t)>_s$$

1- Partical trace

که درآن $U^{\dagger}_{H_0,t}$ این چنین تعریف می‌شود.

که در آن $u_0^{\dagger}(t,0)$ بردار حالت در زمان صفر می‌باشد

$$u^{\dagger}_{H_0,t}=u_0^{\dagger}(t,0)=\exp(\frac{i}{\hbar}H_0t)$$

که با جایگذاری در معادله شرودینگر داریم:

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}|\Psi_I(t)>=\frac{-i}{\hbar}H_I(t)|\Psi_I(t)>$$

$$H_I(t)=u_0^{\dagger}(t,0)H_1u_0(t,0)(۱۱)$$

در نتیجه چه ما از تصویر اندرکنشی استفاده کنیم چه از نمایش‌های دیگر، نتیجه یکی خواهد بود. مانند این است که در توصیف چرخش یک جسم نسبت به یک دستگاه مختصات، جسم را بچرخانیم و دستگاه مختصات را ثابت بگیریم یا جسم را ساکن بگیریم و دستگاه مختصات را بچرخانیم. انتخاب به سهولت کار بستگی دارد.

۱-۱۲- معرفی ابزارهای کوانتومی

طی ده سال گذشته دانشمندان بر هم کنش ماده و نور را مورد مطالعه قرار داده و به نتایج موفقیت آمیزی در ساخت ابزارهایی برای کنترل این برهم کنش‌ها به دست آوردند

۱-۱-۱۲- به دام اندختن یون‌ها[1]

پدیده به دام انداختن یون‌ها به عنوان مثال منیزیم به کمک پرتوی لیزری انجام می‌شود. بار یون‌های یک اتم توسط پرتوی لیزری تا دمای میکروکلوین سرد می‌شود[۹]. برای به دام انداختن هر کدام از یون‌ها از میدان‌های مغناطیسی و یا نوری استفاده می‌کنند. محققان تاکنون توانسته‌اند شش یون را دریک دام یونی نگه دارند. فناوری دام یونی به خوبی جا افتاده و احتمال دارد که بتوان با استفاده از آن در سطح انبوه به تولید کیوبیت‌ها پرداخت. به دلیل باردار بودن یون‌ها، آن‌ها در برابر زیست محیطی آسیب‌پذیری بیشتری نسبت به اتم‌های خنثا دارند. دام انداختن یونی ترکیبی از میدان مغناطیسی و الکتریکی است که یون‌ها را در ناحیه‌ای از یک سیستم خلاء یا لوله به دام می‌اندازد. دو مورد مرسوم از به دام انداختن یون‌ها دام پنینگ و دام پاولی نام دارند.

دام پنینگ وسیله‌ای است که برای ذخیره‌سازی ذرات باردار به کمک میدان مغناطیسی همگن و میدان الکتریکی غیرهمگن می‌توان از آن استفاده کرد. این وسیله برای محاسبه کوانتومی و اطلاعات کوانتومی

1- Ion trap 2- Penning trap 3- Paul trap

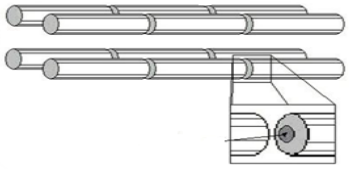
کاربرد دارد. در این وسیله از یک میدان مغناطیسی همگن قوی برای محدود کردن ذرات پرتودار و یک میدان الکتریکی چهار قطبی برای محدود کردن ذرات محوری استفاده می‌شود.

دام پاولی وسیله‌ای است که از جریان مستقیم (DC) و فرکانس رادیویی (RF) برای نوسان میدان الکتریکی جهت به دام انداختن یون‌ها استفاده می‌شود. این وسیله به دو نوع متفاوت دام انداختن یونی به صورت خطی[1] و دام انداختن یونی به صورت استوانه‌ای[2] تقسیم می‌شود.

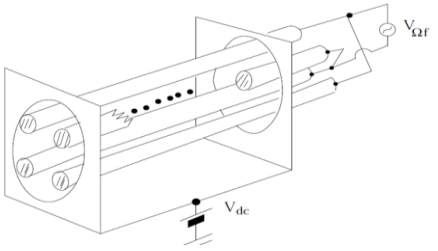
۱-۲-۱۲- دام انداختن یونی به صورت خطی

مجموعه‌ای از میله‌های چهار قطبی می‌باشد که برای محدودکردن یون‌های شعاعی و یک پتانسیل الکتریکی در پایان الکترودها قرار دارد که برای محدود کردن یون‌های محوری استفاده می‌شود. به دام انداختن یونی به صورت خطی می‌تواند به عنوان یک دام واقعی بوسیله ایجاد پتانسیل مغناطیسی برای یون‌ها در طول محوری از الکترودها انجام شود.

افزایش دادن ظرفیت ذخیره‌سازی یون‌ها، کاوش سریعتر زمانی آن‌ها، سادگی ساختار این دستگاه، مورد توجه بسیاری از دانشمندان قرار گرفته است.



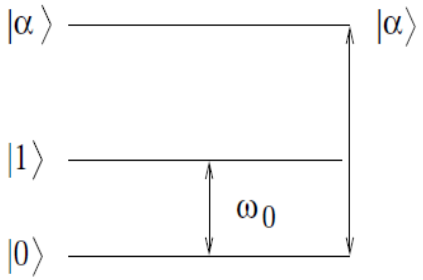
در این ابزار از جریان مستقیم (DC) و فرکانس رادیویی (RF) و یک میدان الکتریکی نوسانی استفاده می‌شود که یون‌ها را روی محور میله به کمک پتانسیل استاتیکی محدود می‌کند و تحت فرکانس Ω یون‌ها نوسان می‌کنند. حلقه در دو بعد x و y نوسان می‌کند که نوسان هارمونیک آن تحت فرکانس ϑ_y و ϑ_x (فرکانس حلقه) کوچکتر از فرکانس یون Ω می‌باشد و یون‌ها در یک دایره و یا یک مسیر بسته محدود می‌شوند(شکل ۱-۱).



(شکل ۱-۱)

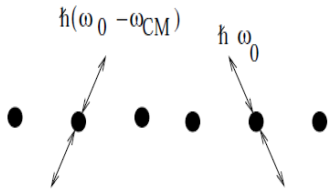
1- Liner ion trap 2- Cylindrical ion trap

یون‌ها بوسیله پرتوی لیزری که اولین بار با یون باریوم و سپس با Mg بررسی شده سرد می‌شوند. سردکردن یون‌ها توسط پرتو لیزری برای منظم کردن آن‌ها در یک خط و کاهش سطح انرژی یون به حالت پایه می‌باشد. هر یون می‌تواند به طور مجزا بوسیله فوکوس پرتوی لیزری برانگیخته شود. به عبارت دیگر زندگی طولانی روی سطح داخلی هر یون می‌تواند به صورت دو حالتی از یک کیوبیت نشان داده شود (شکل ۱-۲).



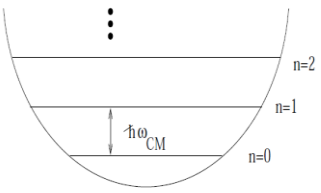
(شکل ۱-۲)

یون‌هایی که حرکت جنبشی محوری دارند، به گونه محوری به شکل گروهی نوسان می‌کنند. در (شکل ۱-۳) شش یون به صورت خطی منظم شدند. پیکان‌ها نشان می‌دهند که دو یون به طور انفرادی بوسیله فوکوس پرتوی لیزری برانگیخته می‌شوند.



(شکل ۱-۳)

یک لیزر روی کیوبیت داخلی با فرکانس انتقالی ω فوکوس می‌شود درحالی که پرتوی لیزری دیگر روی اولین باند جانبی با فرکانس $\omega_0-\omega_{cm}$ تابیده می‌شود، که انتقال داخلی را به ارتعاش مرکز جرم با یون منظم ω_{cm} در حلقه یونی متصل می‌کند. (شکل ۱-۴) نشان می‌دهد که با وجود پتانسیل هارمونیک یون‌ها در پایین‌ترین سطح انرژی قرار می‌گیرند.



(شکل ۱-۴)