بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه

بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش جبر

ایده‌آل‌ها و زیرمدول‌های معکوس‌پذیر

استاد راهنما:

دکتر رضا نکویی

مؤلف:

فاطمه عرب‌پور

شهریورماه ۱۳۹۰

تقدیم به

مادر عزیز و روح بلند پدرم

به پاس زحماتشان

تشکر و قدردانی

" ربِّ زِدنی علماً و عملاً و ایماناً و اَلحقنی بِالصّالحین "

پروردگارا ریزش فضل و احسانت مرا از شمردن ثنا و ستایشت عاجز کرد و پشت سر هم آمدن نیکی‌هایت مرا از ذکر ستودنی‌هایت بازداشت. اکنون که به یاری‌ات این کار علمی به پایان رسید، بر خود لازم می‌دانم از همه کسانی که در این راه مرا مساعدت نموده‌اند، سپاسگزاری نمایم. ابتدا از پدر و مادر عزیزم، به واسطه زحمات، پشتیبانی و هموار نمودن مسیر کسب علم و دانش، نهایت تشکر و قدردانی را داشته و از درگاه الهی برای آنها بهترین‌ها را در دنیا و آخرت آرزومندم. همچنین از اعضاء خانواده که در این راه به نوعی یاری‌ام رسانده‌اند، کمال تشکر را دارم. از استاد فرزانه و دلسوز جناب آقای دکتر نکویی، که هم توفیق حضور در کلاس درس ایشان را داشتم و هم در طول انجام پایان‌نامه از راهنمائی‌های ارزشمندشان بهره‌مند شدم، بی‌نهایت سپاسگزارم و از درگاه ایزد منّان برای ایشان و خانواده محترم، آرزوی سلامتی و توفیق دارم. در پایان از آقایان دکتر هدایت و دکتر مقدری که زحمت مطالعه و داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشتند بسیار متشکرم.

فاطمه عرب‌پور

شهریورماه ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا برخی از خواص زیرمدول‌های معکوس‌پذیر از مدول‌های ضربی را ارائه می‌دهیم. در ادامه به بررسی ایده‌آل‌های با تولید نامتناهی در دامنه‌های ارزیابی و زیرمدول‌های با تولید نامتناهی در مدول‌های ضربی، وفادار و تک‌رشته‌ای می‌پردازیم. در پایان چندین ویژگی و مشخصه از مدول‌های ضربی وفادار، پروفر و ددکیند را بیان خواهیم کرد.

کلیدواژه‌ها : مدول ضربی، ایده‌آل و زیرمدول معکوس‌پذیر، دامنه ارزیابی، مدول تک‌رشته‌ای، مدول پروفر، مدول ددکیند.

فهرست مطالب

مقدمه

در سراسر این پایان‌نامه، حلقه‌ها جابجایی و یکدار و مدول‌ها یکانی می‌باشند.

در فصل اول، مدول و ایده‌آل ضربی را تعریف کرده و برخی از خصوصیات مدول‌های ضربی را که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، بیان خواهیم کرد.

در فصل دوم، ابتدا ایده‌آل معکوس‌پذیر را تعریف کرده و پاره‌ای از خصوصیات آنها را بیان خواهیم کرد. سپس زیرمدول معکوس‌پذیر را تعریف کرده و برخی از نتایج ایده‌آل‌های معکوس‌پذیر را به زیرمدول‌های معکوس پذیر از مدول‌های ضربی، تعمیم می‌دهیم.

در فصل سوم، به بررسی دامنه‌های ارزیابی و مدول‌های تک‌رشته‌ای می‌پردازیم. در بخش اول این فصل، نشان می‌دهیم R- مدول ضربی و وفادار M تک‌رشته‌ای است اگر وتنها اگر R یک دامنه ارزیابی باشد. در بخش دوم، به بررسی ساختار ایده‌آل‌های با تولید نامتناهی در دامنه‌های ارزیابی و زیرمدول‌های با تولید نامتناهی در مدول‌های تک‌رشته‌ای می‌پردازیم. در بخش سوم این فصل، نشان می‌دهیم که لزوماً I^{-1} (N^{-1}) زیرحلقه‌ای از R_S (R_T) نبوده و نشان می‌دهیم در یک حلقه دلخواه و همچنین در یک دامنه ارزیابی، پروفر و مدول تک‌رشته‌ای، تحت چه شرطی I^{-1} (N^{-1}) زیرحلقه خواهد شد.

در فصل چهارم، مدول پروفر را تعریف کرده و در ادامه برخی از شرایط معادل پروفر بودن را بیان می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم که یک مدول ضربی وفادار، پروفر است اگر و تنها اگر هر زیرمدول آن هموار باشد.

در فصل پنجم، به بررسی مدول‌های ددکیند و برخی از ویژگی‌های آنها می‌پردازیم. نشان می‌دهیم که یک مدول ضربی وفادار، ددکیند است اگر و تنها اگر هر زیرمدول اول غیرصفر آن معکوس‌پذیر باشد. همچنین نشان می‌دهیم که هر زیرمدول غیرصفراز مدول ضربی، وفادار و ددکیند را می‌توان با انتخاب دو عنصر از آن تولید کرد.

این پایان‌نامه، برگرفته از مرجع [۴] و بخش‌هایی از مراجع [۵] و [۱۱] می‌باشد.

فصل ۱

پیش‌نیازها

در این فصل، مدول و ایده‌آل ضربی را تعریف کرده و برخی از خصوصیات مدول‌های ضربی را که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، بیان خواهیم کرد.

تعریف ۱.۱ R- مدول M را ضربی گوئیم، هرگاه برای هر زیرمدول N از M، ایده‌آل I از R وجود داشته به طوری که $N = IM$ باشد.

به وضوح R- مدول M ضربی است اگر و تنها اگر برا ی هر زیرمدول N از M، داشته باشیم $N=(N:M)M$، جائی که $(N:M) = \{ r \in R \mid rM \subseteq N \}$ است.

تعریف ۲.۱ ایده‌آل I از حلقه R را ضربی گوئیم، هرگاه I به عنوان R- مدول ضربی باشد. به عبارت دیگر برای هر ایده‌آل J از R که $J \subseteq I$، ایده‌آل K از حلقه R وجود داشته به طوریکه $J=IK$ باشد.

لم ۳.۱ زیرمدول N از R- مدول M، ضربی است اگر و تنها اگر برای هر زیرمدول K از M، $K \cap N = (K:N)N$ باشد.

اثبات : [۲ ، گزاره ۳] . ■

تعریف ۴.۱ برای R- مدول M، پوچساز M را با $Ann(M)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$Ann(M) = \{ r \in R \mid rM = 0 \} = (0:M) .$$

گوئیم M وفادار است، اگر $Ann(M) = 0$ باشد.

تعریف ۵.۱ R- مدول M را موضعاً دوری گوئیم، اگر برای هر ایده‌آل اول p از حلقه R، M_p یک R_p- مدول دوری باشد.

در ادامه برخی از ویژگی‌های مدول‌های ضربی را که مورد استفاده قرار می گیرند، بیان می‌کنیم.

لم ۶.۱ فرض کنید M یک R- مدول باشد. در این صورت

الف) اگر M دوری باشد، آنگاه ضربی است. همچنین اگر R یک حلقه موضعی باشد، آنگاه هر R- مدول ضربی، دوری است.

ب) اگر M ضربی باشد، آنگاه برای هر ایده‌آل اول p از R ، M_p یک R_p- مدول ضربی است. همچنین اگر M با تولید متناهی باشد، آنگاه عکس این مطلب نیز برقرار است.

ج) اگر M با تولید متناهی باشد، آنگاه M ضربی است اگر و تنها اگر موضعاً دوری باشد.

اثبات : الف) [۳ ، مثال ۲.۱.۴ و گزاره ۴.۱.۴] .

ب) [۳ ، لم ۵.۱.۴] .

ج) [۳ ، نتیجه ۷.۱.۴] .■

قضیه ۷.۱ فرض کنید R- مدول M ضربی و با تولید متناهی باشد. در این صورت، برای ایده‌آل‌های I و J از R ، اگر $IM \subseteq JM$ باشد، آنگاه $I \subseteq J + Ann(M)$ است. به علاوه، اگر M وفادار و $IM \subseteq JM$ باشد، آنگاه $I \subseteq J$ است. در این حالت گوئیم، M حذفی است.

اثبات : [۳ ، قضیه ۱۰.۲.۴ (ب)] . ■

لم ۸.۱ الف) فرض کنید R- مدول M ضربی، وفادار و با تولید متناهی باشد. در این صورت برای هر زیرمدول N از M، ایده‌آل منحصر به فرد I از حلقه R وجود دارد به طوری که $N=IM$ می‌باشد.

ب) اگر M یک R- مدول ضربی و I ایده‌آلی ضربی از حلقه R باشد، آنگاه IM نیز یک R- مدول ضربی خواهد بود.

اثبات : الف) [۳ ، قضیه ۱۰.۲.۴ (پ)] .

ب) [۳ ، نتیجه ۱۳.۱.۴] .■

تعریف ۹.۱ برای R- مدول M ، ایده‌آل $\theta(M)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\theta(M) = \sum_{m \in M} (Rm:M).$$

قضیه ۱۰.۱ فرض کنید M یک R- مدول باشد . در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.

الف) M ضربی است.

ب) برای هر $m \in M$ ، $R = Ann(m) + \theta(M)$ است.

اثبات : [۳ ، قضیه ۷.۴.۴] . ■

قضیه ۱۱.۱ R- مدول ضربی M ، با تولید متناهی است اگر و تنها اگر $R = \theta(M)$ باشد.

اثبات :ابتدا فرض کنید M یک R- مدول ضربی، با تولید متناهی و p ایده‌آلی بیشین باشد. بنا به لم ۶.۱ (ج)، M_p دوری است. پس $m \in M$ وجود دارد به قسمی که $M_p = (Rm)_p$. از آنجا که M با تولید متناهی است، طبق [۱۲، نتیجه ۱۵.۳]، $R_p = \left((Rm)_p : M_p\right) = (Rm:M)_p$. لذا

$$R_p = \Big(\sum_{m \in M} (Rm:M)\Big)_p = \theta(M)_p.$$

چون p دلخواه بود، بنابراین $R = \theta(M)$ است.

برعکس، فرض کنید $R = \theta(M)$ باشد. بنابراین $1 \in \theta(M)$ و لذا

$$R = (Rm_1:M) + \cdots + (Rm_n:M) ;$$

به طوری که $m_i \in M$ ، $1 \leq i \leq n$. در نتیجه

$$M = (Rm_1:M)M + \cdots + (Rm_n:M)M = Rm_1 + \cdots + Rm_n \subseteq M .$$

لذا $M = Rm_1 + \cdots + Rm_n$. بنابراین M با تولید متناهی خواهد بود. ■

لم ۱۲.۱ فرض کنید M یک R- مدول ضربی، وفادار و با تولید متناهی و N زیرمدول ضربی از M باشد. در این صورت برای هر زیرمدول K از N ، $(K:N)(N:M) = (K:M)$ می‌باشد.

اثبات : چون M و N ضربی‌اند، لذا داریم

$$(K:M)M = K = (K:N)N = (K:N)(N:M)M \ .$$

حال با توجه به حذفی بودن M، خواهیم داشت

$$(K:N)(N:M) = (K:M) \ . \blacksquare$$

لم ۱۳.۱ فرض کنید M یک R- مدول ضربی و با تولید متناهی باشد. در این صورت برای هر ایده‌آل I از R و هر زیرمدول N از M، $(IN:M) = I(N:M) + Ann(M)$ است. به ویژه اگر M وفادار باشد، آنگاه $(IN:M) = I(N:M)$ می‌باشد.

اثبات : به وضوح $I(N:M) + Ann(M) \subseteq (IN:M)$ می‌باشد. از طرفی همواره

$$(IN:M)M \subseteq IN = I(N:M)M \ .$$

در نتیجه با توجه به قضیه ۷.۱، داریم

$$(IN:M) \subseteq I(N:M) + Ann(M) \ .$$

در نتیجه $(IN:M) = I(N:M) + Ann(M)$ می‌باشد. $\blacksquare$

قضیه ۱۴.۱ فرض کنید M یک R- مدول ضربی، وفادار و با تولید متناهی و N زیرمدولی از M باشد. در این صورت

الف) N ضربی است اگر و تنها اگر $(N:M)$ ایده‌آلی ضربی باشد.

ب) N با تولید متناهی است اگر و تنها اگر $(N:M)$ با تولید متناهی باشد.

ج) N وفادار است اگر و تنها اگر $(N:M)$ وفادار باشد.

اثبات : الف) ابتدا فرض کنید N زیرمدول ضربی از M و J ایده‌آلی از R باشد به قسمی که $J \subseteq (N:M)$ است. بنابراین $JM \subseteq (N:M)M = N$ می‌باشد. حال با توجه به لم‌های ۱۲.۱ و ۱۳.۱، داریم

$$J = J(M:M) = (JM:M) = (JM:N)(N:M) \ .$$

بنابراین طبق تعریف، $(N:M)$ ایده‌آلی ضربی خواهد بود.

برعکس، فرض کنید $(N:M)$ ایده‌آلی ضربی باشد. بنابراین طبق لم ۸.۱ (ب)، $N = (N:M)M$ ضربی خواهد بود.

ب) ابتدا فرض کنید $(N:M)$ با تولید متناهی باشد. چون M ضربی و با تولید متناهی است، پس $N = (N:M)M$ نیز با تولید متناهی می‌باشد.

برعکس، فرض کنید $N = (N:M)M = <n_1, \dots, n_t>$ با تولید متناهی باشد. بنابراین برای هر i ، $1 \le i \le t$ ، $n_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} m_j$ ، به طوری که $a_{ij} \in (N:M)$ و $m_j \in M$ می‌باشد. قرار می‌دهیم $I = <\{ a_{ij} \mid 1 \le i \le t , 1 \le j \le s \} \subseteq (N:M)$. در نتیجه $IM \subseteq N$ است. همچنین برای هر $x \in N$ ، $r_i \in R$ وجود دارد به طوری که

$$x = \sum_{i=1}^{t} r_i n_i = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{s} r_i a_{ij} m_i \in IM .$$

لذا $N \subseteq IM$ است. پس $N = IM$ ، به طوری که I ایده‌آلی با تولید متناهی می‌باشد. حال با توجه به لم ۸.۱ (الف)، $I = (N:M)$ بوده و بنابراین $(N:M)$ با تولید متناهی می‌باشد.

ج) با توجه به ضربی و وفادار بودن M ، به وضوح برقرار است. ■

گزاره ۱۵.۱ اگر M یک R- مدول ضربی، وفادار و با تولید متناهی باشد، آنگاه برای زیرمدول‌های N و K از M ، $(N+K:M) = (N:M) + (K:M)$ است.

اثبات :

$$(N+K:M)M = N+K = (N:M)M + (K:M)M = \big((N:M) + (K:M)\big)M .$$

حال چون M حذفی است، لذا داریم

$$(N+K:M) = (N:M) + (K:M). \ ■$$

تعریف ۱۶.۱ R- مدول M را هموار گوئیم، هرگاه برای هرR- همریختی یک به یک $f\ :\ N\ \rightarrow K$ ، نگاشت $f \otimes 1\ :\ N \otimes_R M\ \rightarrow K \otimes_R M$ ، یک به یک باشد.

قضیه ۱۷.۱ فرض کنید M یک R- مدول ضربی، وفادار و با تولید متناهی و N زیرمدولی از M باشد. در این صورت N هموار است اگر و تنها اگر $(N{:}\,M)$ ایده‌آلی هموار باشد.

اثبات : چون M ضربی است، لذا طبق لم ۶.۱ ، برای هر ایده‌آل اول p از R ، M_p یک R_p- مدول دوری است. همچنین چون M با تولیدمتناهی است، لذا طبق [۱۲، گزاره ۱۴.۳]، داریم

$$Ann(M_p) = (Ann\ M)_p = 0$$

از طرفی چون M_p دوری است، لذا $M_p \cong \frac{R_p}{Ann(M_p)}$. در نتیجه $M_p \cong R_p$ است.

پس

$$N = (N{:}\,M)M \Rightarrow N_p = (N{:}\,M)_p M_p \cong (N{:}\,M)_p \Rightarrow N_p \cong (N{:}\,M)_p\ .\ (*)$$

از طرفی بنا به [۱۵ ، گزاره ۱۰.۳.۲]، یک R- مدول هموار است اگر وتنها اگر به طور موضعی هموار باشد. بنابراین با توجه به $(*)$، N هموار است اگر و تنها اگر $(N{:}\,M)$ هموار باشد. ■

قضیه ۱۸.۱ فرض کنید M یک R- مدول، K و L زیرمدول‌هایی از M باشند. در این صورت

الف) اگر $K + L$ یک مدول ضربی و با تولید متناهی باشد، آنگاه $R = (K{:}\,L) + (L{:}\,K)$ است.

ب) اگر K و L مدول‌هایی ضربی باشند به طوری که $R = (K{:}\,L) + (L{:}\,K)$، آنگاه $K + L$ یک مدول ضربی خواهد بود.

اثبات : [۱۹، قضیه ۲ ، نتیجه ۳] . ■

قضیه ۱۹.۱ فرض کنید N_i ، $1 \leq i \leq n$، زیرمدول‌هایی از R- مدول M باشند، به طوری که برای هر $i \leq j$ ، $R = (N_i{:}\,N_j) + (N_j{:}\,N_i)$ است. در این صورت برای زیرمدول K از M ، گزاره‌های زیر برقرار می‌باشند.

الف) $\sum_{i=1}^{n}(N_i:K) = \left(\sum_{i=1}^{n} N_i : K\right)$.

ب) $\sum_{i=1}^{n}(K:N_i) = (K:\bigcap_{i=1}^{n} N_i)$.

ج) $\sum_{i=1}^{n}(K \cap N_i) = K \cap (\sum_{i=1}^{n} N_i)$.

اثبات : [۷، نتیجه ۲.۱] . ■

قضیه ۲۰.۱ فرض کنید M یک R- مدول ضربی و ناصفر باشد. در این صورت

الف) هر زیرمدول سره از M، مشمول در یک زیرمدول بیشین است.

ب) K زیرمدول بیشینی از M است اگر و تنها اگر ایده‌آل بیشینی مانند Q از R وجود داشته به طوری که $K = QM \neq M$ باشد.

اثبات : [۳، قضیه ۲.۳.۴] . ■

تعریف ۲۱.۱ فرض کنید M یک R- مدول باشد. زیرمدول سره P از M را اول گوئیم، هرگاه برای $r \in R$ و $m \in M$، اگر $rm \in P$ باشد، آنگاه $m \in P$ یا $r \in (P:M)$ باشد.

قضیه ۲۲.۱ فرض کنید N زیرمدول سره‌ای از R- مدول ضربی M باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.

الف) N یک زیرمدول اول است.

ب) ایده‌آل اول p از R، شامل $Ann(M)$ وجود دارد به طوری که $N = pM$ باشد.

اثبات : [۳، نتیجه ۱۲.۳.۴] . ■

تعریف ۲۳.۱ زیرمدول سره Q از R- مدول M را اولیه گوئیم، هرگاه برای $r \in R$ و $m \in M$، اگر $rm \in Q$ باشد، آنگاه $m \in Q$ یا $r \in \sqrt{(Q:M)}$ باشد.

تعریف ۲۴.۱ فرض کنید N زیرمدولی از R- مدول M باشد. رادیکال N را اشتراک همه زیرمدول‌های اول M شامل N معرفی کرده و با $M-rad\ N$ نمایش می‌دهیم. اگر زیرمدول اولی از M شامل N موجود نباشد، آنگاه قرار می‌دهیم $M-rad\ N=M$.

قرارداد : در ادامه منظور از $P-$اولیه بودن Q، این است که Q اولیه بوده و $M-rad\ Q=P$ باشد.

قضیه ۲۵.۱ فرض کنید M یک R- مدول ضربی و N زیرمدول سره‌ای از M باشد. در این صورت $M-rad\ N=\sqrt{(N:M)}M$ است.

اثبات : [۳، قضیه ۱۳.۳.۴] . ■

در حالت کلی اگر N اولیه باشد، $M-rad\ N$ لزوماً اول نمی‌باشد؛ امّا اگر M ضربی باشد، با توجه به قضایای ۲۲.۱ و ۲۵.۱، $M-rad\ N$ اول خواهد بود.

قضیه ۲۶.۱ فرض کنید R- مدول M، ضربی و با تولید متناهی باشد. در این صورت

الف) Q زیرمدولی P- اولیه از M است اگر و تنها اگر $(Q:M)$ ایده‌آلی $(P:M)$- اولیه باشد.

ب) اگر M وفادار باشد، آنگاه q ایده‌آلی p- اولیه است اگر و تنها اگر qM یک زیرمدول pM- اولیه از M باشد.

اثبات : الف) فرض کنید Q، زیرمدولی P- اولیه از M باشد. ابتدا نشان می‌دهیم ایده‌آل $(Q:M)$ اولیه است. فرض کنید $a\,,b\in R$ بوده به قسمی که

$$ab\in(Q:M)\,,a\notin(Q:M)\Rightarrow abM\subseteq Q\,,aM\not\subset Q\,.$$

$$\Rightarrow \exists n\in \boldsymbol{N};\ \ b^n\in(Q:M).$$

بنابراین $(Q:M)$ ایده‌آلی اولیه است. حال چون M ضربی است، طبق قضیه ۲۵.۱، داریم

$$M-rad\ Q=\sqrt{(Q:M)}M=P.$$

امّا با توجه به لم ۱۳.۱، داریم

$$(P:M)=\left(\sqrt{(Q:M)}M:M\right)=\sqrt{(Q:M)}(M:M)+Ann\ M$$

$$=\sqrt{(Q:M)}+Ann\ M=\sqrt{(Q:M)}+(0:M)=\sqrt{(Q:M)}.$$

چون $P=(P:M)M$ ، زیرمدول اولی از M است، لذا طبق قضیه ۲۲.۱، ایده‌آل $(P:M)$ اول بوده و لذا $(Q:M)$ یک ایده‌آل $(P:M)$- اولیه خواهد بود.

برعکس، فرض کنید $(Q:M)$ یک ایده‌آل $(P:M)$ - اولیه باشد. فرض کنید برای $r\in R$ ، $m\in M$ ، $rm\in Q$ و $m\notin Q$. نشان می دهیم $r\in\sqrt{(Q:M)}$ است. داریم

$$r(Rm:M)\subseteq(Rrm:M)\subseteq(Q:M)\Rightarrow(Rm:M)\subseteq(Q:M) \text{ یا } r\in\sqrt{(Q:M)}\,.$$

داریم

$$(Rm:M)\subseteq(Q:M)\Rightarrow(Rm:M)M\subseteq(Q:M)M\Rightarrow Rm\subseteq Q\Rightarrow m\in Q\ ,$$

که با فرض در تناقض است. بنابراین $r\in\sqrt{(Q:M)}$ است. از طرفی طبق قضیه ۲۲.۱، $P=(P:M)M$ ، زیرمدول اولی از M است. در پایان با توجه به قضیه ۲۵.۱، و $(P:M)$-اولیه بودن $(Q:M)$، داریم

$$M-rad\ Q=\sqrt{(Q:M)}M=(P:M)M=P.$$

بنابراین Q ، زیرمدولی P- اولیه خواهد بود.

ب) ابتدا فرض کنید M یک R- مدول ضربی، وفادار، با تولید متناهی و q ایده‌آلی p- اولیه باشد. مشابه اثبات (الف)، می‌توان نشان داد که زیرمدول qM ، اولیه است. امّا طبق قضیه ۲۲.۱، pM زیرمدولی اول از M است. همچنین با توجه به حذفی بودن M و قضیه ۲۵.۱، داریم

$$pM=\sqrt{q}M=\sqrt{(qM:M)}M=M-rad\ (qM).$$

بنابراین qM ، زیرمدولی pM- اولیه است. برعکس، فرض کنید qM زیرمدولی pM- اولیه از M باشد. با توجه به قسمت (الف)، $q = (qM: M)$ ایده‌آلی اولیه می‌باشد. از طرفی $p = (pM: M)$ ایده‌آل اولی از R است. حال چون $M - rad\ (qM) = pM$ و M حذفی است، لذا $\sqrt{q} = p$ بوده و بنابراین q ایده‌آلی p- اولیه خواهد بود. ■

قضیه ۲۷.۱ فرض کنید R یک قلمرو صحیح باشد. در این صورت هر R- مدول ضربی وفادار، با تولید متناهی است.

اثبات : [۳، گزاره ۱۳.۲.۴] . ■

تعریف ۲۸.۱ فرض کنید M یک R- مدول، N زیرمدولی از M و I ایده‌آلی از R باشد. زیرمدول باقیمانده N توسط I را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(N:_M I) = \{\, x \in M \mid xI \subseteq N \,\}.$$

لم ۲۹.۱ اگر M یک R- مدول ضربی باشد، آنگاه $(N:_M I) = (N: IM)M$ است. به علاوه اگر M ضربی و وفادار باشد، آنگاه $(0:_M I) = (Ann\ I)M$ خواهد بود.

اثبات : به وضوح $(N: IM)M \subseteq (N:_M I)$ می‌باشد. حال فرض کنید $m \in (N:_M I)$ باشد. لذا $mI \subseteq N$ است. ابتدا نشان می‌دهیم $(Rm: M) \subseteq (N: IM)$ است. داریم

$$\begin{aligned} r \in (Rm: M) &\Rightarrow rM \subseteq Rm \\ &\Rightarrow rIM \subseteq RmI \subseteq N \\ &\Rightarrow r \in (N: IM)\,. \end{aligned}$$

لذا $(Rm: M) \subseteq (N: IM)$ می‌باشد. چون M ضربی است، لذا $Rm = (Rm: M)M \subseteq (N: IM)M$.

بنابراین $m \in (N:IM)M$ خواهد بود. در نتیجه $(N:_M I) = (N:IM)M$ است. به علاوه اگر M وفادار باشد، آنگاه $Ann\ I = Ann\ (IM)$ بوده و در نتیجه $(0:_M I) = (Ann\ I)M$ خواهد بود. ■

تعریف ۱.۳۰ فرض کنید M یک R- مدول باشد. ایده‌آل I از R را M- حذفی گوئیم، هرگاه برای زیرمدول-های N و K از M، اگر $IN = IK$، آنگاه $N = K$ باشد.

قرارداد : فرض کنید n کوچکترین عدد صحیح مثبتی باشد که R- مدول M را بتوان با n عنصر تولید کرد. این عدد را با $g(M) = n$ نمایش می‌دهیم. در صورت عدم وجود چنین عددی، قرار می‌دهیم $g(M) = \infty$.

قضیه ۱.۳۱ فرض کنید M یک R- مدول ضربی و N زیرمدولی از M باشد. در این صورت

الف) $g(N) \leq g(N:M)g(M)$.

ب) $g(N:M) \leq g(N)g(M) + g(Ann\ M)$.

اثبات : [۱۹، گزاره ۱۳] . ■

قضیه ۱.۳۲ فرض کنید M یک R- مدول ضربی و وفادار، I ایده‌آلی ضربی و N زیر مدولی از M باشد به طوری که $N \subseteq IM$ است. در این صورت

$$g(N:_M I) \leq g(N)g(I) + g(Ann\ I)g(M).$$

اثبات : [۶ ، گزاره ۲.۶] . ■

تعریف ۱.۳۳ فرض کنید M یک R- مدول روی قلمرو صحیح R باشد. زیرمدول تابی M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$T(M) = \{\, m \in M \mid \exists\ 0 \neq r \in R\ ;\ rm = 0 \,\}.$$

اگر $T(M) = M$ باشد، گوئیم M تابی است، و اگر $T(M) = 0$ باشد، آنگاه گوئیم M فارغ از تاب است.

فصل ۲

ایده‌آل‌ها و زیرمدول‌های معکوس‌پذیر