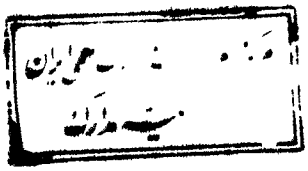
۱۳۷۸ /۲/ ۲۰



پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد فیزیک

موضوع :

فاز هندسی (بری) در سیستمهای کوانتومی

استاد راهنما:

دکتر سیامک سادات گوشه

استاد مشاور:

دکتر حمید رضا سپنجی

نگارش:

بابک آبی

۱۳۱۵۹

شهریور ۱۳۷۷

چکیده

پس از چند دهه از حضور و سلطهٔ نظریه کوانتومی بر فیزیک کشف وجود فاز هندسی توسط بری برای فیزیکدانان بسیار هیجان انگیز بود. در این پایان نامه براساس مقالات اصلی ومطرح در چند ساله اخیر فاز هندسی و مبانی ریاضی آن مورد بررسی قرار گرفته است و علی رغم وجود شمار زیادی از مقالات تمرکز بر روی مباحث ساختاری فاز هندسی قرار گرفته است.

سپاسگذاری

بدینوسیله از " دکتر سیامک گوشه " استاد گروه فیزیک دانشگاه شهیدبهشتی بخاطر زحمات بی دریغ ایشان در راهنایی این پایان نامه تشکر می شود

فهـرسـت

۰- پیشگفتار

۱- فاز هندسی در حالت آدیاباتیک

۱-۱ قضیه آدیاباتیک و فاز هندسی

۱-۱-۱ قضیه آدیاباتیک

۱-۱-۲ اثبات قضیه آدیاباتیک

۱-۱-۳ فاز آدیاباتیک در حالت غیر تبهگن

۱-۱-٤ بدست آوردن فاز آدیاباتیک از بسط مستقیم $U_T(s)$

۱-۱-٥ فاز آدیاباتیک در حالت تبهگن

۱-۲ ساختار ریاضی فاز هندسی

۱-۲-۱ تعاریف پیوستار انتقال موازی

۱-۲-۲ انتقال موازی و بالابر افقی

۱-۲-۳ هولونومی

۱-۲-٤ پیوستار بری

۱-۲-٥ استنتاج فاز هندسی

۲- فاز هندسی در حالت غیر آدیاباتیک

۲-۱ محاسبه فاز هندسی در حالت غیر آدیاباتیک

۲-۲ ساختار ریاضی فاز هندسی در حالت غیر چرخه ای

۲-۳ تفسیر ریاضی فاز هندسی

۳- فاز هندسی و دیدگاههای دیگر

۳-۱ تظاهر اندازه گیری چگال در سیستمهای کوانتومی بصورت فاز هندسی

۳-۲ فاز هندسی در تبدیلات گالیله

۳-۳ فاز هندسی تحت تبدیلات یکانی

I- مراجع

"پیشگفتار"

۰ – پیشگفتار

از ابتدای پیدایش مکانیک کوانتومی همیشه یک حالت فیزیکی معادل با یک بردار در فضای هیلبرتی در نظر گرفته می شد که تغییرات آن ناشی از گذشت زمان و تغییرات خارجی سیستم را توسط معادلهٔ شرودینگر ارزیابی می نمودند.

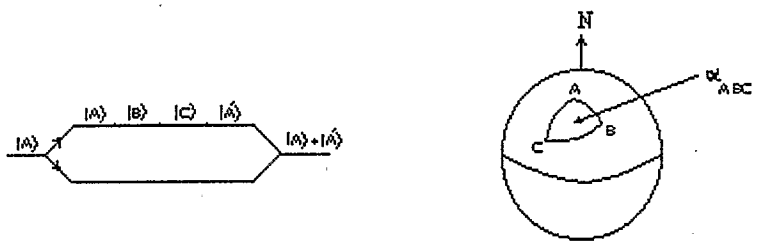
در این حالت با توجه به اصول موضوعهٔ مکانیک کوانتومی در مورد مشاهده پذیر بودن یک کمیت کوانتومی بامحاسبه اندازه چشم داشتی اپراتور مربوطه در یک بردار حالت سیستم مورد نظر ، مقدار کمیت مشاهده پذیر آشکار می گردد. در این سطح به انگارهٔ نظریه پردازان با توجه به آزادی در انتخاب فاز در هر لحظه به علت تقارن وحذف آن در ارزش انتظاری (Expectation Value) در هر لحظه وتسامح در وجود حافظه در سیستم های کوانتومی ، به فاز بردار های حالت وتغییرات آن توجه کافی نمی شد .

سؤال مطرح در اینجا این است که ، اگر یک سیستم در ویژه بردار هامیلتونی باشد وبطور آهسته توسط تغییرات پارامتر های هامیلتونی در زمان تغییر کند ومجدداً به حالت اول (ویژه بردار اولیه) برگردد تغییرات فاز چگونه خواهد بود؟ جواب معمول همراهی یک فاز دینامیکی $\exp\left[-i\int_0^T Edt\right]$ را با ویژه بردار اولیه تخمین میزند. در سال ۱۹۸٤ M.V.Berry در مقاله ای [۱] اثبات کرد که این جواب کامل نیست ویک فاز دیگر وابسته به مسیرطی شده در فضای پارامتر ها فاز دینامیکی را همراهی می کند . البته نخستین برخورد با این فاز توسط S.Pancharatnam در سال ۱۹۵٦ [۲] گزارش شده است .وی مشغول به مطالعهٔ مسائل مشخص کردن تغییر فاز یک پرتو نور پس از گذشتن از چندین قطبنده (Polarizor) وبرگشتن به قطبیدگی اولیه بود . وی برای تعریف فاز بین دو پرتو نور از روش طبیعی آن یعنی تداخل استفاده کرد که

به زبان مکانیک کوانتومی نوین تفاوت فاز برای دو حالت $|A\rangle$ و $|B\rangle$ (غیر متعامد) به صورت فاز حاصل ضرب اسکالر آن می باشد .

$$\langle A|B\rangle = |\langle A|B\rangle| \cos Ph\langle A|B\rangle \qquad (۱-۰)$$

Pancharatnam این تعریف را در مورد تحلیل تغییرات فاز در آزمایشات شامل تغییرات متوالی در قطبیدگی پرتو نور ناشی از سه قطبنده بکار برد . وی نشان داد این پرتو نور با پرتو نوری که همان قطبش را دارد و دو مسیر یکسانی طی کرده ، دارای تفاوت فازی معادل $\langle A|A'\rangle = e^{i/2\,\alpha_{ABC}}$ می باشد.



(شکل۱)

α_{ABC} ،زاویه فضایی (Solid Angle) ناشی مثلث ژئودزیک ABC در روی Poincare sphere است . قطبیدگی به ترتیب از $|A\rangle$ شروع و $|B\rangle$ و $|C\rangle$ و در نهایت به $|A'\rangle$ با همان قطبیدگی $|A\rangle$ منجر می شود واین نتیجه از لحاظ ریاضی شبیه فاز هندسی بری برای ذره با اسپین ۱/۲ در یک میدان مغناطیسی با تغییرات آهسته می باشد که α_{ABC} همان Solid Angle میدان مغناطیسی قطع شده در فضای پارامتر می باشد . به سادگی دیده می شود Pancharatnam نه تنها فاز هندسی را پیشگویی کرده بود بلکه آن را نیز از طریق آزمایش اثبات کرده است .

کار بعدی در این زمینه مقالهٔ Aharanov & Bohm است[۳] . که همان اثر معروف A.B ناشی از وجود پتانسیل الکترومغناطیسی بر روی تابع موج می باشد .فاز

بوجود آمده در تابع موج در واقع حالت خاصی از فاز هندسی می باشد کـه Berry آن را در مقاله اش مورد توجه قرار داده است .

همچنین بعضی از دانشـــمندان شـیمی فـیزیکدان کـه سـاختمانهای مولکولـی را بررسی می کرده اند وتعدیل هامیلتونی کند را با جملاتی از نوع پتانسیل برداری مـورد توجه قرار داده بودند به لزوم این قبیل فاز های "نابهنجار" پی برده بودند. از میان آنها مـی تـوان بـه مقـالات G.Herzberg & Longuet-higgins و A.j.Ston در سـال ۱۹۷٦ [٤] وبخصوص به مقالهٔ C.A.Mead & D.G.Trubhlar [٥] در سـال ۱۹۷۹ اشـاره کـرد. مقالـهٔ آخـر در مـورد حالتهـــای الکـــترونیکی مولکولـــی (Molecular electronic state) بـا اسـتفاده از تقریـب Born-Oppenheimer و از طریـق تئـوری اختلال به نتایجی کاملاً مشابه Berry دست یافتند. بطوریکـه بـرای یـک مسـیر بسـته بینهایت کوچک برای تابع موج $|\alpha_i\rangle$ (بردار ویژه هامیلتونی) $|\alpha_i\rangle \to e^{isf}|\alpha_i\rangle$ تغییر فاز δfرا بصورت فرمول زیر پیش بینی کردند.

$$\delta f = 2\,\mathrm{Im}\left\{\sum_{k\neq i}\frac{\langle\alpha_i|\partial_y H|\alpha_k\rangle\langle\alpha_k|\partial_x H|\alpha_i\rangle}{(u_i-u_k)^2}\delta x\,\delta y\right\} \qquad (۲-۰)$$

و برای هر مسیر بستهٔ غیر کوچک معادلهٔ بالا بر روی سطحی کـــه توسـط مسـیر بسـته می شود ، انتگرال گیری می شود . برای فاز هندسی در مکانیک کوانتومی مشـــابهی در فیزیک کلاسیک بنام فاز هانی توسط Hanny بدست آمـده اسـت[٦] کـه فهـم مسـاله دورانهای آدیاباتیک کلاسیک نظیر حرکت تقدیمی آونـــگ فوکـو را از دیدگـاه جدیـد میسر می سازد.

فاز هندســـی در سـال ۱۹۸٤ بـا مقالـه Aharanov & Anandan وارد مرحلـهٔ تازه ای شد[۷]. این دو مؤلـف بـا توجـه بـه نتـایج مقالـهٔ Anandan & Stodolsky پیشنهاد کردند ، فاز هندسی ناشـی از حرکـت بردارحـالت مـی باشـد ، ونـه ناشـی از هامیلتونی که مولد حرکت است ، واین اندیشهٔ اصلی بکار برده شده در مقالهٔ آنها مـی

باشد. وبدین ترتیب قید تقریب آهسته وآدیاباتیک خود بخود از مسئله حذف می شود و در حالت تقریب آهسته به نتایج Berry منجر مـی شـود . آنهـا بـرای تعریـف یـک حرکت چرخه ای (Cyclic) با در نظر گرفتن $|\psi(t)\rangle$ بعنوان یک حالت بهنجـار شـده (normalized state) در بازهٔ $[0,T]$در صورت برقراری شرط زیر آنرا چرخـه ای مـی نامند.

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\phi(0,T)}|\psi(0)\rangle \qquad (۳-۰)$$

که $\phi(0,T)$ حقیقی است . معادلهٔ بالا را می توان بصورت زیر برحسب عملگـر تحـول Uباز نویسی کرد :

$$U(0,T)|\psi(0)\rangle = e^{i\phi(0,T)}|\psi(0)\rangle \qquad (٤-۰)$$

Aharanov & Anandan با محاسباتی ساده فاز β را که حاوی فاز هندسی نیز اسـت بصورت ذیل بدست آوردند :

$$e^{i\beta} = e^{i\phi(0,T) + i\int_0^T ds\langle\phi(s)|i\frac{d}{ds}|\phi(s)\rangle} \qquad (٥-۰)$$

$$e^{i\beta} = \langle\psi(0)|\psi(T)\rangle e^{i\int_0^T ds\langle\phi(s)|i\frac{d}{ds}|\phi(s)\rangle} \qquad (٦-۰)$$

آنها اثبات کردند که این فاز به ازای تمامی $|\psi\rangle$ هایی که یک منحنی در فضای Projective Hilbert Space را می پیمایند یکسان خواهد بود . به معنای دیگر به ازای دو منحنی $|\psi\rangle$ و $|\psi'\rangle$ که $P_{(|\psi'\rangle)} = P_{(|\psi\rangle)}$ آنگاه $\beta' = \beta$ خواهد بود .

اصولاً در بیشتر مقالات فاز هندسی در حالت تابع موج غیر تبهگن بدست می آید ولی Wilczek & Zee [۸] در سال ۱۹۸٦ نشان دادند چطور می توان این تئوری را به حالت های تبهگن نیز گسترش داد . آنها نشان دادند که در حالت d بار تبهگنی حامل فاز هندسی $e^{ib[n,p]}$ به یک ماتریس $d \times d$ یکانی تعمیم می یابد که به آن فاز بری غیرآبلی(non-abelian Berry phase) می گویند یا بصورت دقیقتر اگر حالت اولیه در یکی از حالت های متعلق به مجموعهٔ متعامد ویژه حالت های $H(R(0))$ با d بار تبهگنی $E_n(R(0))$ باشد

$$H(R(0))|l:R(0)\rangle = E_n(R(0))|l:R(0)\rangle \qquad : \qquad l = 1,....,d \qquad (۷-۰)$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\int_0^t E_n(R(s))ds} \sum_{l'=1}^{d} D_{ll'}(R(t))|l';R(t)\rangle \qquad (۸-۰)$$

که در اینجا ماتریس D یک Path ordering exponential integral می باشد .

$$D_{l'l}(R(t)) = P\exp\left[i\int_{R_{(0)}}^{R_{(t)}} dR' A_{i'i}(R')\right] \qquad (۹-۰)$$

$$A_{l'l'} = \langle l':R|i\nabla_R|l:R\rangle \qquad (۱۰-۰)$$

از دیگر مقالات مهم ، می توان به مقالهٔ Anandan & Aharanov [۹] اشاره کرد که در این مقاله به اثرات اندازه گیری چگال وتظاهر آن بصورت فاز هندسی واستخراج فاز هندسی ناشی از دیدگاه انتگرال مسیر Faynman پرداخته اند . همچنین مسئله locality وnonlocality فاز هندسی و quantum reference frame را به طرز زیبایی مورد بحث قرار داده اند . البته مسئله اندازه گیری کوانتومی وفاز هندسی مجدداً با تفسیری نسبتاً جدید در مقالهٔ Y.Aharnov & B.Reznik [۱۰] آمده است . آنها نشان دادند که یک بردار پتانسیل توپولوژیک (پتانسیل بری) بوسیله فعالیت اندازه گیری اندازه حرکت زاویه ایی در جهت تعریف شده با ذرهٔ مرجع (refernce particle) القا می شود . این پتانسل برداری به خاطر نتیجهٔ واکنش معکوس (back-reaction) ناشی از اندازه گیری کوانتومی است . همچنین در سال ۱۹۸۵ H.Kuratsuji وS.Iida [۱۱] نشان دادند که با کاربرد روش انتگرال مسیر بر روی دو سیستم در حال برهمکنش یک فاز ویژهٔ γ در فرایند های آدیاباتیک کوانتومی ظاهر می شود که همان فاز هندسی (بری) می باشد که بصورت یک کنش اضافی جمع شده با کنش دینامیکی مرسوم بدست می آید .

یکی از مسائل مهم ارتباط بین دو دیدگاه A.A وB.S در مورد فاز هندسی است که هم ارزی آن توسط A.Mostafazadeh (با همکاری افراد متعدد از جمله A.Bohm) درمقالات متعددی بررسی شده است [۱۲و۱۳ و۱٤] همچنین وی در سه مقاله به ساختار فاز هندسی واستخراج طبیعی آن وبسط عملگر U به عملگر آدیاباتیک پرداخته است [۱۵و۱٦و۱۷] : وی همچنین در یک مقاله نسبتاً مفصل به فاز آدیاباتیک برای میدان اسکالر در فضا وزمان منحنی پرداخته است [۱۸].

ودر آخرباید به مقالات E.Sjoqvist & H.Brown و H.Carlsen اشاره کرد که مدعی شده اند فاز هندسی تحت تبدیلات گالیله ناوردا نیست ! [۱۹و۲۰]

مقالهٔ ۱۹۸٤ بری باعث بوجود آمدن تعداد بی شماری مقاله در قالب فاز هندسی شد. می توان آنها را به دو گروه عمده تقسیم کرد . نخست شامل مقاله های در مورد تعمیم و گسترش آنچه بری به عنوان فاز هندسی کشف کرده بود و دوم مقالاتی که در کاربرد و اندازه گیری پدیده های فیزیکی شامل فاز هندسی می باشد.

به دنبال انتشار مقالهٔبری از مفهوم فاز های هندسی در شاخه های متعدد فیزیک برای اثرهای مختلف استفاده شده است از جمله اثر های کوانتومی هال [۲۱و۲۲] خواص اسپینی-آماری برانگیزش های شبه ذره ای در سیستمهای دو بعدی [۲۳] دوران قطبش فوتون در سیستمهای فیبرهای نوری مارپیچی شکل[۲٤] وغیره.

البته حداقل چهار دلیل را میتوان برای موفقیت های شگفت انگیز مفاهیم برآمده از فاز هندسی برشمرد :

نخست آنکه مفاهیم مذکور بسیار واضح هستند و تفسیر بسیار زیبایی در رابطه با هولونومی وپیوستار ومیدانهای پیمانه ای دارند. دوم آنکه فازهای هندسی دارای مشخصه های وحدت بخش می باشند بطوریکه میتوان پدیده های به ظاهر متفاوت را به هم مربوط وتحت یک زبان مشترک بررسی کرد . سوم اینکه این فازها به راحتی قابل مشاهده و اندازه گیری هستند و پیش گویی های مختلف این اثر تا کنون به قدر کافی مورد تایید قرار گرفته است و بالاخره چهارم که از همه مهمتر است اینکه این مفاهیم اثباتگر اهمیت وسودمندی نگرشی هندسی و ذاتی در فیزیک نظری مدرن می باشد.

" فصـــل ۱ "

فاز هندسی در حالت آدیاباتیک

۱-۱- فاز هندسی در حالت آدیاباتیک

در میان مقالات ارائه شده در حالت آدیاباتیک در کلیه سطوح کاربرد قضیه آدیاباتیک تقریباً به عنوان یک اصل ارائه می شود و استنادات عمده ای به آن محول می شود . بدین لحاظ بررسی این قضیه میتواند راهگشا و با اهمیت تلقی شود .

۱-۱-۱- قضیه آدیاباتیک

به واقع قضیهٔ آدیاباتیک را می توان به ترتیب تکامل به سه صورت تقسیم کرد. صورت اول که توسط M.Born و V.Fock در ۱۹۲۸ [۲۶] بصورت ساده ترین حالت ارائه شده وصورت دوم که در کتاب Meşsiah [۲۵] ارائه شده است در این بخش مورد بررسی قرار می گیرد وصورت سوم که توسط مصطفی زاده بصورت پیشرفته ترین حالت (به استثناء حالتهای تبهگن) می باشد ، ارائه شده است .

شاید ذکر صورت کلی روایت Born وFock از این قضیه جالب باشد ؛ آنها با در نظر گرفتن خانواده ای از هامیلتونی ها $H(\vec{\lambda})$ که بطور پیوسته به پارامتر های $\vec{\lambda}=(\lambda_1,...,\lambda_n)$ وابسته هستند و در نظر گرفتن اینکه آنها همه دارای مجموعه باند هایی با N درجه تبهگنی می باشند وبا فرض در نظر گرفتن آزادی در انرژی پایه $E=0$ ، که برای همه یکسان می باشد اثبات کردند چنانچه پارامتر ها از حالت اولیهٔ $\vec{\lambda}_i$ به حالت نهایی $\vec{\lambda}_f$ با سرعت بسیار کم حرکت کنند (وCrossing level وجود نداشته باشد) تمام حل های معادلهٔ a به حل های معادلهٔ b نگاشته می شوند (map onto)

$$H(\vec{\lambda}_i)\psi=0 \qquad \text{(a)}$$

$$H(\vec{\lambda}_f)\psi=0 \qquad \text{(b)}$$