دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش هندسه دیفرانسیل

عنوان

کانکشنهای وابسته به عمل گروههای لی

استاد راهنما

دکتر سیدرضا حجازی

پژوهشگر

اعظم هادیلو

۱۳۹۲/۶/۲۵

نام خانوادگی دانشجو: هادیلو نام: اعظم

عنوان: کانکشنهای وابسته به عمل گروههای لی

استاد راهنما: دکتر سیدرضا حجازی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: هندسه دیفرانسیل

دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود دانشکده علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲/۶/۲۵ تعداد صفحات: ۶۴

واژگان کلیدی: کانکشن، کانکشن فرم، کلاف اصلی، کانکشن های روی کلاف اصلی

چکیده

در تئوری کلاسیک کانکشن ها، لازم است که منیفلد مورد بحث یک کلاف اصلی باشد و گروه باید بطور آزاد عمل کند. در این پایان نامه سعی شده است که بیشتر روی کلافهای اصلی و معرفی آنها تمرکز شود. فصل اول مفاهیم بنیادی و مقدماتی مربوط به پایان نامه همراه با مثال و قضایایی می‌باشد، فصل دوم بطور کامل به کلافهای اصلی، مثالها و قضایایی در مورد آنها اختصاص یافته است و کلافهای مورد بحث در آن کلافهای کنج، کلافهای وابسته و کلافهای پس کشنده می‌باشند. در فصل سوم به معرفی کانکشنهای جزئی می‌پردازیم که به عنوان عمل گروه فراگیر بکار برده می‌شوند و باید روی کانکشنهایی که برای تعریف کانکشن کلاف اصلی استفاده می‌شوند تمرکز کنیم. در بخش دیگری از این فصل به معرفی خمیدگی کانکشنهای روی کلاف اصلی می‌پردازیم.

تقدیم به ...

به پاس قدردانی از قلبی آکنده از عشق و معرفت که سایهی مهربانیش، سایه‌سار زندگیم می‌باشد،
همدلی که با واژه‌ی تلاش آشنایی دارد، تلاش راستین را می‌شناسد و مرا در راه رسیدن به اهداف عالی یاری می‌رساند ؛ همو که حس تعهد و مسئولیت را در زندگی مان تلالویی خدایی داده است؛ این پایان نامه تقدیم به همسر عزیزم می‌گردد.

خدایا...

خدایا مرا به علم توانگر ساز، به حلم زینت بخش، به تقوا عزیز کن و به عافیت زیبایی ده.

خدایا! از زوال نعمت، تغییر عافیت، غضب ناگهانی و همه چیزهایی که مایه ناخشنودی توست به تو پناه می‌برم.

خدایا! تو را به غیب دانی و قدرتی که بر آفرینش داری سوگند می‌دهم تا زمانی که زندگی را برای من بهتر می‌دانی مرا زنده نگهدار و زمانی که مرگ را برایم بهتر می‌دانی مرا بمیران.

خدایا! از تو می‌خواهم که ترس خود را در آشکار و نهان نصیب من کنی، در حال خشنودی و خشم کلمه اخلاص را به زبان من جاری نمایی و در حال فقر و توانگری میانه روی را شعار من سازی.

خدایا! چنان که خلقت مرا نیک کردی سیرتم را نیز نیک کن.

خداوندا! یک لحظه مرا به خودم وامگذار و چیزهای خوبی که به من بخشیده ای، از من باز مگیر.!!!!

تقدیر و تشکر...

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید، به طریق علم رهنمونمان شد، به همنشینی رهروان دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد شایسته، جناب آقای دکتر سیدرضا حجازی، که در کمال سعه ی صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از اساتید محترم، سرکار خانم دکتر الهام دسترنج و جناب آقای دکتر هادی پسندیده که زحمت بازخوانی و داوری این پایان نامه را برعهده گرفتند، کمال تشکر را دارم، باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان پدر و مادر عزیزم، مهربان فرشتگانی که لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه‌های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز آنهاست و به پاس محبت‌های بی‌دریغشان صمیمانه از آنها قدردانی می‌کنم.

اعظم هادیلو

۱۳۹۲/۶/۲۵

فهرست مطالب

پیشگفتار

کلاف‌های اصلی به عنوان یک چهارچوب مناسب برای تحلیل عملهای گروه و تقارن بکار برده میشوند. کلافهای اصلی نقش مهمی در تحلیل سیستمهای مکانیکی متقارن بازی میکنند. در این پایان نامه سعی شده است بیشتر کلاف‌های اصلی و کانکشنهای روی آنها مورد بررسی قرار گیرند.

ابتدا در فصل اول مفاهیم بنیادی و مقدماتی هندسی مورد نیاز را بیان کرده‌ایم که از جمله‌ی آنها گروه لی و عملهای آن است. یک گروه لی، یک مجموعه ی G با دو ساختار است:ساختار اول ساختار جبری است یعنی G یک گروه است و ساختار دوم آن ساختار هندسی است یعنی اینکه G یک منیفلد (حقیقی- هموار) است و همچنین عمل‌های ضرب گروهی و معکوس در G باید هموار باشند. ساده ترین مثال برای یک گروه لی فضای $\mathbb{R}^n$ با عمل گروه جمع و نگاشت وارون آن، وارون معمولی نسبت به عمل جمعی می‌باشد. در بخش گروه لی، بطور مفصل، قضایا و مثالهایی را مطرح کرده‌ایم که در فصول دوم و سوم، در مباحث، مورد نیاز هستند. فصل اول را با مبحث عملگر ∇ به پایان رسانده‌ایم که در آن به معرفی کانکشن ریمانی و بیان قضیه اساسی هندسه ریمانی پرداخته‌ایم.

فصل دوم با عنوان کانکشن ها در کلاف‌های اصلی، به معرفی کلافهای اصلی، کلافهای وابسته و کلافهای پس کشنده، همراه با مثالهایی برای درک بهتر، پرداخته است. یک G-کلاف اصلی یک سه گانه‌ی $(\mathbb{P}, M, \pi)$ است که $\mathbb{P}$ و M منیفلدهای هموار و π یک نگاشت هموار از $\mathbb{P}$ به M است. $\mathbb{P}$ فضای کامل، M فضای پایه و نگاشت π تصویر کلاف اصلی نام می‌گیرند. کلاف اصلی بدیهی، بدیهی ترین مثال از G-کلاف اصلی می‌باشد.

سپس بعد از معرفی کلاف‌های وابسته و کلاف‌های پس کشنده به مبحث کانکشن های روی کلاف اصلی می‌رسیم که بطور مفصل به تعریف آن و بیان لمی در موردش پرداخته‌ایم. پایان بخش فصل دوم، مبحث مشتق کوواریان (همورد) است.

آخرین فصل این پایان نامه، کانکشنهای وابسته به عمل گروههای لی است. همانطور که گفتیم کلاف‌های اصلی نقش مهمی در تحلیل سیستم های مکانیکی در فیزیک بازی می‌کنند، به همین خاطر در این فصل تا حدودی مباحث فیزیکی مطرح شده است که از جمله‌ی آنها می‌توان به فاکتور لختی، تانسور لختی قفل شده،

کانکشن فرم مکانیکی ساده و عمل گروه دوران $SO(۳)$ روی $\mathbb{R}^۳$ که مرتبط با دوران جسم صلب است، اشاره کرد.

البته برای جلوگیری از دور شدن از بحث مورد نظر، این موضوعات فقط در حد تعریف بیان شده‌اند و چندین قضیه و گزاره را در ارتباط با آنها عنوان کرده‌ایم. بخش انتهایی این پایان نامه را به خمیدگی کانکشنهای روی کلاف اصلی اختصاص داده و به معرفی فرم خمیدگی و بیان گزاره‌ای در رابطه با آن پرداخته‌ایم. امید است نتیجه تلاش و زحمت چندین ماهه‌ی بنده، مورد عنایت و قبول خوانندگان این رساله قرار گیرد.

فصل ۱

مفاهیم بنیادی هندسه

۱.۱ تعاریف اولیه

در این فصل برای درک بهتر مفاهیم بخش ها و فصول بعد به تعاریف و قضایای مقدماتی بهمراه مثالهایی از آنها می‌پردازیم.

با فرض اینکه که خواننده با ویژگیهای اساسی فضای توپولوژیک آشنایی دارد، اولین تعریف را به منیفلد توپولوژیکی اختصاص می‌دهیم:

تعریف ۱.۱.۱. فرض می‌کنیم M یک فضای توپولوژیک باشد آنرا یک **منیفلد توپولوژیکی** n**-بعدی** گوئیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

- M هاسدورف باشد، یعنی هر دو نقطه‌ی $p,q\in M$ بترتیب مشمول در زیرمجموعه‌های باز $U,V\subset M$ باشند بطوریکه $U\cap V=\emptyset$.

- M شمارای نوع دوم باشد، یعنی پایه‌ی شمارا داشته باشد.

- M موضعا اقلیدسی از بعد n باشد، یعنی هر نقطه آن مشمول در یک همسایگی همئومورف با یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ باشد.

فرض کنید M یک منیفلد n- بعدی توپولوژیک باشد، یک چارت مختصاتی(یا فقط یک چارت) روی M یک زوج (U,φ) است که U یک زیر مجموعه ی باز از M و $\varphi:U\to\tilde{U}$ یک همئومورفیسم از U به یک زیرمجموعه باز$\tilde{U}=\varphi(U)\subset\mathbb{R}^n$ است. با استفاده از تعریف منیفلد توپولوژیک، هر نقطه $p\in M$ مشمول در یک دامنه چارت (U,φ) است. اگر $\varphi(p)=۰$ می‌گوئیم چارت در p متمرکز شده است. U را دامنه چارت یا همسایگی چارت در هر نقطه‌اش می‌نامیم،نگاشت φ یک نگاشت مختصاتی (موضعی) و توابع مولفه‌ای $(x^۱,...,x^n)$ از φ تعریف شده به صورت$\varphi(p)=(x^۱(p),...,x^n(p))$ مختصات موضعی روی U نامیده می‌شود.

حال اگر (U,φ) و (V,ψ) دو چارت روی منیفلد M باشند نگاشت

$$\psi\circ\varphi^{-۱}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V).$$

را **نگاشت گذر** از φ به ψ می‌نامیم. دو چارت فوق را به طور **هموار سازگار** می‌نامیم هرگاه $\psi\circ\varphi^{-۱}$ دیفئومورفیسم باشد.

مجموعه $\mathcal{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_\alpha$ را یک **اطلس** روی M می‌نامیم هرگاه اعضای $\mathcal{A}$ دو به دو به طور هموار سازگار باشند. اطلس $\mathcal{A}$ **ماکسیمال** است هرگاه مشمول در هیچ اطلس دیگری نباشد.

یک **ساختار هموار** روی منیفلد توپولوژیکی M، یک اطلس ماکسیمال هموار است. هر منیفلد توپولوژیکی مجهز به یک ساختار هموار $\mathcal{A}$ را یک **منیفلد هموار** نامیده و با $(M,\mathcal{A})$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۱.۱. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ یک منیفلد هموار n-بعدی با چارت مختصاتی $(\mathbb{R}^n, \mathbb{I})$ می‌باشد .

تعریف ۳.۱.۱. اگر M و N منیفلدهایی هموار باشند، نگاشت $F : M \to N$ را **نگاشتی هموار** گوئیم هرگاه برای هر چارت مختصاتی $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ روی M و هر چارت $\varphi_\beta : U_\beta \to V_\beta \subset \mathbb{R}^n$ روی N، نگاشت مرکب $\varphi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ نگاشتی هموار باشد.

تعریف ۴.۱.۱. یک **برش** از نگاشت پیوسته ی$\pi : \tilde{M} \to M$ نگاشت پیوسته‌ای مانند $\sigma : M \to \tilde{M}$ است که $\pi \circ \sigma = Id$.

تعریف ۵.۱.۱. منیفلد هموار M را در نظر می‌گیریم عملگر خطی $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ را یک مشتق در نقطه $p \in M$ می‌نامیم اگر $X(fg)(p) = f(p)X(g) + g(p)X(f)$.

قرار می‌دهیم:

$$T_pM := \{X : \text{است } p \in M \text{ یک عملگر مشتق در نقطه } X\},$$

آنرا **فضای مماسی** منیفلد M در نقطه $p \in M$ می‌نامیم. همچنین $\coprod_{p\in M} T_pM = TM$ را **کلاف مماسی** منیفلد M می‌گوئیم.

قضیه ۶.۱.۱. *هر کلاف مماسی ساختار منیفلدی هموار می‌پذیرد و $2m$-بعدی است.*

برهان. [۷] □

تعریف ۷.۱.۱. **میدان برداری** $\mathbf{v}$ روی M بردار مماس $\mathbf{v}|_p \in T_pM$ در هر نقطه‌ی $p \in M$ می‌باشد که $\mathbf{v}|_p$ بطور هموار از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر تغییر می‌کند. در مختصات موضعی $(x^1, \dots, x^m)$، میدان برداری برای هر تابع هموار $\xi^i(x)$ از x دارای فرم

$$\mathbf{v}|_x = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \cdots + \xi^m \frac{\partial}{\partial x^m},$$

می‌باشد.

تعریف ۸.۱.۱. فرض می‌کنیم M و N منیفلدهایی هموار و $F : M \to N$ نگاشتی هموار بین آنها باشد به ازای هر $p \in M$ نگاشت $dF|_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ را **نگاشت دیفرانسیل** F می‌نامیم که به ازای هر $\mathbf{v}|_p \in T_pM$ و $f \in C^\infty(N)$ با ضابطه

$$dF(\mathbf{v}|_p)f(y) = \mathbf{v}(f \circ F)(p), \qquad y = F(p),$$

تعریف می‌شود و در مختصات موضعی داریم:

$$dF(\mathbf{v}|_x) = dF\left(\sum_{i=1}^{m} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} \xi^i \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(x)\right)\frac{\partial}{\partial y^j} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{v}(F^j(x))\frac{\partial}{\partial y^j}.$$

نگاشت دیفرانسیل F را با F_* نیز نشان می‌دهند و آنرا نگاشت پیش‌برنده (پوشفوروارد) می‌نامند.

تعریف ۹.۱.۱. اگر M و N منیفلدهایی هموار و $F : M \to N$ نگاشتی هموار بین آنها باشد، به نقطه $p \in M$ یک **نقطه منظم** از F می‌گوئیم اگر $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ پوشا باشد و نقطه p **بحرانی** است هرگاه $\text{rank}F(p) < \dim N$ یا اگر تابع هموازی موجود باشد که بعد M از N کمتر باشد، تمامی نقاط آن بحرانی خواهد بود.

تعریف ۱۰.۱.۱. اگر $F : M \to N$ یک نگاشت هموار باشد ، **رتبه** F در $p \in M$ رتبه ی نگاشت خطی $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ است و این یعنی رتبه ی ماتریس مشتقات جزئی F در هر چارت هموار یا بعد $\text{Im}F_* \subset T_{F(p)}N$. اگر F در هر نقطه دارای رتبه ی k باشد میگوئیم F دارای رتبه ی ثابت است و می‌نویسیم $\text{rank}F = k$.

یک نگاشت هموار $F : M \to N$ **سابمرژن** نامیده میشود اگر F_* در هر نقطه پوشا باشد یا بطور هم ارز $\text{rank}F = \dim N$؛ و یک **ایمرژن** نامیده می‌شود اگر F_* در هر نقطه یک به یک باشد یا بطور هم ارز $\text{rank}F = \dim M$.

گزاره ۱۱.۱.۱. ***ویژگیهای سابمرژن ها***

فرض کنید $\pi : M \to N$ یک سابمرژن باشد:

۱. *π یک نگاشت باز است.*

۲. *هر نقطه از M در یک تصویر از یک برش موضعی هموار از π است.*

۳. *اگر π پوشا باشد، یک نگاشت خارج قسمتی است.*

برهان. [۷] □

تعریف ۱۲.۱.۱. اگر M یک منیفلد باشد یک **خم** در M یعنی یک خم هموار و پارامتری شده که یک نگاشت پیوسته $\gamma : J \to M$ است که $J \subset \mathbb{R}$ یک بازه است. بدون اینکه در نظر بگیریم J باز است یا بسته، کراندار است یا بیکران. اما **خم قطعه ای**، خمی است که دامنه‌ی آن یک بازه بسته کراندار $[a, b] \subset \mathbb{R}$ باشد. همواری خم γ یعنی اینکه توابع مولفه‌ای γ^iها در هر مختصات موضعی دارای مشتقات یکطرفه از هر مرتبه‌ای در نقاط پایانی باشند.

تعریف ۱۳.۱.۱. نگاشت $F:X\to Y$ بین دو فضای توپولوژیک X,Y یک **ایمبدینگ توپولوژیک** است هرگاه F همئومورفیسم باشد. شرط فوق ایجاب میکند که توپولوژی X,Y یکی باشد بنابراین توپولوژی $\mathrm{Im}F$ باید زیرفضایی باشد یعنی اگر V یک عضو از پایه ی توپولوژی Y باشد آنگاه $\mathrm{Im}F\cap V$ در Y باز است.

تعریف ۱۴.۱.۱. ایمرژن $F:M\to N$ یک **ایمبدینگ** است هرگاه ایمبدینگ توپولوژیکی باشد.

مثال ۱۵.۱.۱. دراینجا مثالهایی از سابمرژن، ایمرژن و ایمبدینگ مطرح می‌کنیم:

- اگر $M_۱,\cdots,M_k$ منیفلدهای هموار باشند، هر تصویر $\pi_i:M_۱\times\cdots\times M_k\to M_i$ یک سابمرژن است ، بویژه تصویر $\pi:\mathbb{R}^{n+k}\to\mathbb{R}^n$ بروی n مختصات اول یک سابمرژن است.

- اگر $M_۱,\cdots,M_k$ منیفلدهای هموار باشند، اگر $p_i\in M_i$ نقاط دلخواهی باشند، هر نگاشت $\iota_j:M_j\to M_۱\times\cdots\times M_k$ بصورت

$$\iota_j(q)=(p_۱,\cdots,p_{j-۱},q,p_{j+۱},\cdots,p_k)$$

یک ایمبدینگ هموار است بویژه نگاشت شمول $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n+k}$ که $(x^۱,\cdots,x^n)$ را به $(x^۱,\cdots,x^n,۰,\cdots,۰)$ تصویر می‌کند یک ایمبدینگ هموار است.

- اگر $\gamma:J\to M$ یک خم هموار در منیفلد M باشد سپس γ یک ایمرژن است اگر وتنها اگر $\gamma'(t)\neq ۰$ برای هر $t\in J$.

- اگر $F:M\to N$ یک دیفئومرفیسم موضعی باشد سپس F هم ایمرژن است و هم سابمرژن.

- اگر E یک کلاف برداری هموار روی یک منیفلد هموار M باشد نگاشت تصویر $\pi:E\to M$ یک سابمرژن است.

تعریف ۱۶.۱.۱. اگر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ دو میدان برداری روی M باشند، **کروشه‌ی لی** آنها، $[\mathbf{v},\mathbf{w}]$، نیز یک میدان برداری است که برای همه توابع هموار $f:M\to\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\mathbf{v},\mathbf{w}](f)=\mathbf{v}(\mathbf{w}(f))-\mathbf{w}(\mathbf{v}(f)). \qquad (۱.۱)$$

هم‌چنین در مختصات موضعی، اگر داشته باشیم:

$$\mathbf{v}=\sum_{i=۱}^{m}\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},\qquad \mathbf{w}=\sum_{i=۱}^{m}\eta^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

سپس داریم:

$$[\mathbf{v},\mathbf{w}] = \sum_{i=۱}^{m}(\mathbf{v}(\eta^i) - \mathbf{w}(\xi^i))\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{m}\left(\xi^j\frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}. \qquad (۲.۱)$$

گزاره ۱۷.۱.۱. *میدانهای برداری $\mathbf{v}$، $\mathbf{w}$ و $\mathbf{u}$ روی M و ثابت‌های c و c' را در نظر می‌گیریم، کروشه‌ی لی آنها در خواص زیر صدق می‌کند:*

- *دوخطی*

$$[c\mathbf{v} + c'\mathbf{v}', \mathbf{w}] = c[\mathbf{v},\mathbf{w}] + c'[\mathbf{v}',\mathbf{w}],$$

$$[\mathbf{v}, c\mathbf{w} + c'\mathbf{w}'] = c[\mathbf{v},\mathbf{w}] + c'[\mathbf{v},\mathbf{w}'].$$

- *پادمتقارن*

$$[\mathbf{v},\mathbf{w}] = -[\mathbf{w},\mathbf{v}].$$

- *اتحاد ژاکوبی*

$$[\mathbf{u},[\mathbf{v},\mathbf{w}]] + [\mathbf{w},[\mathbf{u},\mathbf{v}]] + [\mathbf{v},[\mathbf{w},\mathbf{u}]] = ۰.$$

برهان. با استفاده از (۱.۱) و (۲.۱) به آسانی اثبات می‌شود. □

تعریف ۱۸.۱.۱. فرم‌های دیفرانسیلی دوگان میدان‌های برداری‌اند. نقطه‌ی داده شده‌ی $p \in M$ را در نظر می‌گیریم، تابع خطی و حقیقی مقدار $\omega : T_pM \to \mathbb{R}$ روی فضای مماسی، **۱-فرم دیفرانسیلی** در p تعریف می‌کند. فضای ۱-فرم‌ها دوگان فضای برداری مماسی T_pM می‌باشد و فضای هم‌مماسی نامیده شده و به صورت T_p^*M نوشته می‌شود. فضاهای هم‌مماسی با هم تشکیل کلاف هم‌مماسی $T^*M = \sqcup_{p\in M}T_p^*M$ را می‌دهند که مشابه کلاف مماسی، تشکیل منیفلد هموار $۲m$-بعدی می‌دهد. تابع حقیقی مقدار و هموار $f : M \to \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم، دیفرانسیل آن، $df = \sum_{i=۱}^{m}\dfrac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$، ۱-فرم است. در مختصات موضعی $x = (x^۱, \ldots, x^m)$ دیفرانسیل‌های dx^i از توابع مختصاتی، که دوگان پایه‌های مختصاتی $\dfrac{\partial}{\partial x^j} := \partial_{x^j}$ از فضای مماسی‌اند، پایه‌ای برای فضاهای هم‌مماسی در هر نقطه از چارت مختصاتی فراهم می‌کنند. بر حسب این پایه هر ۱-فرم در حالت عمومی فرم مختصات موضعی زیر را دارد:

$$\omega = \sum_{i=۱}^{m} h_i(x)dx^i.$$

فرم‌های دیفرانسیلی از مراتب بالاتر به عنوان نگاشت چندخطی متناوب روی فضای مماسی تعریف می‌شوند. بنابراین k**-فرم دیفرانسیلی** Ω در نقطه‌ی $p \in M$ نگاشت k-خطی زیر است:

$$\Omega : \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{k-\text{بار}} \to \mathbb{R},$$

تابع حقیقی مقدار f به عنوان فرمی از مرتبه‌ی صفر در نظر گرفته می‌شود. فضای همه‌ی k-فرم‌ها در p بوسیله‌ی $\Lambda^k T_p^* M$ نمایش داده می‌شود و فضایی برداری از بعد $\binom{m}{k}$ می‌باشد.

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنید $F : M \to N$ یک نگاشت هموار بین منیفلدهای هموار M, N باشد دوگان نگاشت خطی $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ یک نگاشت خطی بصورت :

$$F^* = (F_*)^* : T^*_{F(p)}N \to T^*_p M$$

است که به آن **پس کشنده** (پول بک) نگاشت F میگویند و برای هر یک-فرم ω و هر $X \in T_pM$

$$(F^*\omega)X = \omega(F_*X).$$

تعریف ۲۰.۱.۱. **مشتق خارجی** یک k-فرم دیفرانسیلی یک $(k+1)$-فرم دیفرانسیلی است.

اگر f یک تابع هموار (۰-فرم) باشد مشتق خارجی f یک دیفرانسیل f است که بصورت df نوشته می شود و یک، ۱-فرم یکتاست که برای هر میدان برداری هموار X ، $df(X) = d_X f$ که $d_X f$ مشتق مستقیم از f در راستای X است.

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنید M یک منیفلد هموار n-بعدی و TM کلاف مماس $2n$-بعدی آن باشد و $\pi : TM \to M$ نگاشت تصویر طبیعی باشد، تصویر معکوس هر $p \in M$، $(\pi^{-1}(p))$ ، به یک زیر فضا از TM تصویر می‌شود که به آن **تار** می‌گویند.

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنید M یک فضای توپولوژیکی باشد، یک **کلاف برداری** از رتبه k روی M یک فضای توپولوژیک E با نگاشت پیوسته ی پوشای $\pi : E \to M$ است که:

- برای هر $p \in M$ ، مجموعه $E_p = \pi^{-1}(p) \subset E$، (که تار E روی p نام دارد) یک زیرفضای برداری k-بعدی E باشد.

- برای هر $p \in M$ ، یک همسایگی مانند U از p در M و یک همئومورفیسم $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ (که یک **بدیهی سازی موضعی** از E روی U نامیده می‌شود) موجود باشد طوریکه :

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\Phi"'] & U \\ & U \times \mathbb{R}^k \arrow[u, "\pi_1"'] \end{tikzcd}$$

(که π_1 یک تصویر روی عامل اول است) و چنانکه برای هر $q \in U$، تحدید Φ به E_q یک ایزومورفیسم خطی از E_q به $\{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$ است. اگر M و E منیفلدهای هموار باشند، π یک نگاشت هموار است و بدیهی سازیهای موضعی می توانند به دیفئومورفیسم ها محصور شوند، سپس E یک **کلاف برداری هموار**

نامیده می‌شود. دراین حالت ، هر بدیهی سازی موضعی را که یک دیفئومورفیسم بروی آن است، یک **بدیهی سازی موضعی هموار** می‌نامیم.

یک کلاف برداری دارای رتبه یک ، اغلب **کلاف برداری خطی** نامیده می‌شود. فضای E، فضای کامل از کلاف، M فضای پایه ی آن و π تصویر آن است. اگر $U \subset M$ باز باشد، به آسانی می‌توان بررسی کرد که $E|_U = \pi^{-1}(U)$ دوباره یک کلاف برداری با تحدید π است طوریکه نگاشت تصویر آن، تحدید E به U نامیده می‌شود. اگر یک بدیهی سازی موضعی روی کل M موجود باشد (که یک **بدیهی سازی فراگیر** از E نامیده می‌شود) سپس E یک **کلاف بدیهی** نامیده می‌شود. در این حالت، E ، خودش یک همومورفیسم به فضای حاصل‌ضرب $M \times \mathbb{R}^k$ است. اگر $E \to M$ یک کلاف هموار باشد که یک بدیهی سازی هموار بپذیرد می‌گوئیم E بطور هموار بدیهی است.

مثال ۲۳.۱.۱. کلافهای حاصل‌ضرب

یک مثال ساده از کلافهای برداری رتبه ی k روی هر فضای M ، منیفلد حاصل‌ضرب $E = M \times \mathbb{R}^k$ با نگاشت $\pi = \pi_1 : M \times \mathbb{R}^k \to M$ به عنوان تصویر آن می‌باشد. این کلاف بوضوح بدیهی است (با نگاشتهای همانی به عنوان یک بدیهی سازی فراگیر). اگر M یک منیفلد هموار باشد سپس $M \times \mathbb{R}^k$ بطور هموار بدیهی است.

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنید $E \to M$ یک کلاف برداری باشد، اگر $U \subset M$ یک مجموعه باز باشد، برشهای هموار موضعی $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$ از E روی U ، مستقل هستند اگر مقادیر آنها برای هر $p \in U$، $\sigma_1(p), \cdots, \sigma_k(p)$، عناصر مستقل خطی از E_p باشند. یک **کنج موضعی** برای E روی U یک k-تایی از برشهای موضعی مانند $(\sigma_1, \cdots, \sigma_k)$ که $\sigma_i : U \to E$ است که E را تولید می‌کنند لذا $(\sigma_1(p), \cdots, \sigma_k(p))$ یک پایه برای تار E_p ، برای هر $p \in U$ است و **کنج فراگیر** نامیده می‌شود اگر $U = M$.

مثال ۲۵.۱.۱. کنج فراگیر برای یک کلاف حاصل‌ضرب

اگر $E = M \times \mathbb{R}^k$ یک کلاف حاصل‌ضرب باشد، پایه ی استاندارد $(e_1, \cdots, e_k)$ برای $\mathbb{R}^k$ یک کنج فراگیر $(\tilde{e_i})$ برای E را نتیجه می‌دهد که بصورت $\tilde{e_i}(p) = (p, e_i)$ تعریف شده است. اگر M یک منیفلد هموار باشد این کنج فراگیر هموار است.

قضیه ۲۶.۱.۱. *یک کلاف برداری بدیهی است اگر و تنها اگر یک کنج فراگیر بپذیرد.*

برهان. [۷] □

تعریف ۲۷.۱.۱. اگر $\omega^{۱}, \cdots, \omega^k$ ۱-فرمهای دیفرانسیلی در p و $\mathbf{v}_{۱}, \cdots, \mathbf{v}_k$ میدانهای برداری باشند **ضرب وج** آنها یک k-فرم دیفرانسیلی $\omega^{۱} \wedge \cdots \wedge \omega^k$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle \omega^{۱} \wedge \cdots \wedge \omega^k ; \mathbf{v}_{۱}, \cdots, \mathbf{v}_k \rangle = \det\Big(\langle \omega^i ; \mathbf{v}_j \rangle \Big). \qquad (۳.۱)$$

۱-فرمهای $\omega^{۱}, \cdots, \omega^k$ وابسته خطی هستند اگر وتنها اگر ضرب وج آنها صفر شود:

$$\omega^{۱} \wedge \cdots \wedge \omega^k = ۰.$$

ضرب وج چند خطی است:

$$\omega^{۱} \wedge \cdots \wedge (c\omega^i + c'\omega'^i) \wedge \cdots \wedge \omega^k = c(\omega^{۱} \wedge \cdots \wedge \omega^i \wedge \cdots \wedge \omega^k) + c'(\omega^{۱} \wedge \cdots \wedge \omega'^i \wedge \cdots \wedge \omega^k)$$

قضیه ۲۸.۱.۱. *اگر $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{(k+۱)}(M)$ عملگر دیفرانسیلی روی منیفلد M باشد:*

۱) *اگر $f \in C^\infty(M)$ و X یک میدان برداری باشد آنگاه :*

$$df(X) = X(f)$$

۲) *اگر $\omega \in \Omega^k(M)$ و $\eta \in \Omega^\ell(M)$:*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-۱)^k \omega \wedge d\eta$$

۳) $d^{۲}\omega = ۰$.

برهان. [۸] □

تعریف ۲۹.۱.۱. اگر ω یک k-فرم و $\mathbf{v}$ یک میدان برداری هموار باشد،**ضرب هوک** $\mathbf{v}$ با ω یک $(k-۱)$-فرم $\mathbf{v} \lrcorner \omega$ است که برای هر مجموعه‌ای از میدان‌های برداری $\mathbf{v}_{۱}, \cdots, \mathbf{v}_{k-۱}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle \mathbf{v} \lrcorner \omega ; \mathbf{v}_{۱}, \cdots, \mathbf{v}_{k-۱} \rangle = \langle \omega ; \mathbf{v}, \mathbf{v}_{۱}, \cdots, \mathbf{v}_{k-۱} \rangle. \qquad (۴.۱)$$

ضرب هوک دوخطی است لذا کافی است آنرا برای عناصر پایه محاسبه کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \lrcorner (dx^{j_۱} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) = \begin{cases} ۰, & i \neq j_k \\ (-۱)^{k-۱} dx^{j_۱} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{k-۱}} \wedge dx^{j_{k+۱}} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}, & i = j_k. \end{cases}$$

بعنوان مثال:

$$\partial_x \lrcorner\, dz \wedge dx = -dz$$

$$\partial_x \lrcorner\, dy \wedge dz = ۰$$

.

تعریف ۳۰.۱.۱. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، V^* **فضای دوگان** V یا **فضای هم‌بردارها** را مشخص می‌کند، نگاشت $V^* \times V \to \mathbb{R}$ را برای همه $\omega \in V^*$ و $X \in V$ به صورت :

$$(\omega, X) \mapsto \langle \omega, X\rangle \qquad (\omega, X) \mapsto \omega(X)$$

تعریف می‌کنیم.

یکk **-تانسور کوواریانت** روی V یک نگاشت حاصل‌ضربی

$$F : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\text{-بار}} \to \mathbb{R},$$

است بطور مشابه یک ℓ**-تانسور کنتراواریانت** نگاشت حاصل‌ضربی

$$F : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{\ell\text{-بار}} \to \mathbb{R}$$

است و نیز یک تانسور از نوع $\binom{k}{\ell}$ که یک **تانسور** k **-کوواریانت ،** ℓ**-کنتراواریانت** است، یک نگاشت حاصل‌ضربی

$$F : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\text{-بار}} \times \underset{\ell\text{-بار}}{\times} \underbrace{V^* \cdots \times V^*} \to \mathbb{R}$$

است.

تعریف ۳۱.۱.۱. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد و $S \in T^k(V)$ و $T \in T^\ell(V)$. یک نگاشت بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$S \otimes T : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k+\ell\text{-بار}} \to \mathbb{R},$$

که

$$S \otimes T(X_۱, \cdots, X_{k+\ell}) = S(X_۱, \cdots, X_k)T(X_{k+۱}, \cdots, X_{k+\ell}).$$

$S \otimes T$ یک $(k+\ell)$-تانسور کوواریانت است که **ضرب تانسوری** S و T نامیده می‌شود.

تعریف ۳۲.۱.۱. فرض کنید M یک منیفلد هموار باشد، یک کلاف k-**تانسور کوواریانت** روی M به صورت

$$T^k M = \coprod_{p \in M} T^k(T_p M),$$

و **کلاف** ℓ-**تانسور کنتراواریانت** به صورت

$$T_\ell M = \coprod_{p \in M} T_\ell(T_p M),$$

است، هر یک از این کلافها، **کلاف تانسوری** روی M نامیده می‌شود.

یک برش از یک کلاف تانسوری ،یک **میدان تانسوری** روی M نامیده می‌شود. یک میدان تانسوری هموار است هرگاه برش آن هموار باشد. مجموعه تمام میدانهای برداری از نوع $\binom{k}{\cdot}$ را با $\mathcal{J}^k(M)$ و مجموعه تمام میدان‌های برداری از نوع $\binom{\cdot}{\ell}$ را با $\mathcal{J}_\ell(M)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۳۳.۱.۱. فرض کنید M یک منیفلد هموار باشد، یک زیر فضای k-بعدی مانند $D_p \subset T_p M$ در هر نقطه $p \in M$، **یک توزیع مماس** k-**بعدی** روی M، یا فقط یک **توزیع** ، نامیده می‌شود. یک توزیع هموار است اگر اجتماع آنها یک زیر کلاف $D = \amalg_{p \in M} D_p \subset TM$ باشد. به این توزیع‌ها میدان‌های k-صفحه ای یا زیر کلافهای مماس هم گفته می‌شود.

تعریف ۳۴.۱.۱. **پوچساز** توزیع k-بعدی $D \subset TM$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Ann(D)} = \{\omega \in \Omega^{۱}(m) : \omega(X) = ۰; X \in D\}$$

تعریف ۳۵.۱.۱. اگر M و N فضاهای توپولوژیک باشند، یک نگاشت $F : M \to N$ (پیوسته یا ناپیوسته) را **سره** می‌گوییم اگر برای هر مجموعه فشرده $K \subset N$، تصویر معکوس $F^{-۱}(K)$ فشرده باشد.

لم ۳۶.۱.۱. *فرض کنید M یک فضای فشرده و N یک فضای هاسدورف باشد، سپس هر نگاشت پیوسته $F : M \to N$ سره است.*

برهان. اگر $K \subset N$ فشرده باشد سپس در N بسته است زیرا N هاسدورف است. با توجه به پیوستگی، $F^{-۱}(K)$ در M بسته و لذا فشرده است. □

لم ۳۷.۱.۱. *فرض کنید $F : M \to N$ یک نگاشت پیوسته بین فضاهای هاسدورف باشد اگر یک وارون چپ برای F موجود باشد(طوریکه یک نگاشت پیوسته $G : N \to M$، که $G \circ F = Id_M$) سپس F سره است.*

برهان. اگر $K \subset N$ یک مجموعه فشرده باشد سپس هر نقطه $x \in F^{-۱}(K)$ در رابطه

$x = G(F(x)) \in G(K)$ صدق میکند. چون K در N بسته است لذا $F^{-۱}(K)$ یک زیرمجموعه بسته از مجموعه فشرده $G(K)$ است و بنابراین فشرده است. □

۲.۱ گروههای لی

تعریف ۱.۲.۱. یک **گروه لی** r-پارامتری، یک گروه G با ساختار منیفلدی هموار r-بعدی است بطوریکه عمل گروهی

$$m : G \times G \to G, \qquad m(g,h) = g \cdot h, \qquad g,h \in G,$$

و وارون

$$i : G \to G, \qquad i(g) = g^{-1}, \qquad g \in G,$$

نگاشت‌هایی هموار بین منیفلدها باشند.

۱.۲.۱ عملهای گروه لی

اگر G یک گروه و M یک مجموعه باشد، یک **عمل چپ** ازG روی M نگاشت $G \times M \to M$ است که به صورت $g \cdot p \mapsto (g,p)$ نوشته می‌شود و :

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot p) = (g_1 \cdot g_2) \cdot p \qquad , g_1, g_2 \in G \qquad , p \in M$$

$$e \cdot p = p \qquad , p \in M$$

و **عمل راست** بطور مشابه یک نگاشت$M \times G \to M$ با خواص زیر است:

$$(p \cdot g_1) \cdot g_2 = p \cdot (g_1 \cdot g_2) \qquad , g_1, g_2 \in G, p \in M;$$

$$p \cdot e = p \qquad , p \in M.$$

فرض کنید $\theta : G \times M \to M$ یک عمل چپ از گروه G روی M باشد:

- برای هر $p \in M$ **مدار** p تحت عمل گروه، مجموعه ای به صورت زیر است:

$$G \cdot p = \{g \cdot p : g \in G\},$$

مجموعه تمام تصاویر p تحت عمل عناصر G.

- عمل **متعدی** است اگر این عمل تنها یک مدار داشته باشد یا به عبارت دیگر مدار هر نقطه از آن کل M باشد.

- فرض کنید $p \in M$ ، **گروه ایزوتروپی** p، مجموعه ای از عناصر $g \in G$ است که p را ثابت می‌کند:

$$G_p = \{g \in G : g.p = p\}$$