وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض

سرشت نمایی فضای کامل اردوش

توسط:
حمید پهلوانی

استاد راهنما:
دکتر محمد ابری

استاد مشاور:
دکتر سید علی تقوی

بهمن ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

سرشت نمایی فضای کامل اردوش

توسط:

حمید پهلوانی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم
برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **عالی**

دکتر محمد ابری استادیار رشته و گرایش ریاضی محض-توپولوژی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر سید علی تقوی استادیار رشته و گرایش ریاضی محض-هندسه دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر غلامرضا عباسپور استادیار رشته و گرایش ریاضی محض-آنالیز تابعی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور اول)

دکتر سید امین اصفهانی استادیار رشته و گرایش ریاضی محض-سیستم دینامیکی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر رضا پورقلی دانشیار رشته و گرایش ریاضی کاربردی-معادلات دیفرانسیل دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

بهمن ۱۳۹۰

تقدیم به

تقدیم به

پدر و مادرم

که همه زندگیم هستند

سپاسگزاری

یَمْحُوا اللَّهُ مَا یَشاءُ وَ یُثْبِت وَ عِندَهُ أُمُّ الْکتابِ
خداوند آنچه را که بخواهد محو و یا اثبات می‌کند و اصل همه کتاب‌ها نزد اوست.

سپاسگذاری می‌کنم از خداوند بزرگ که کمک‌هایش همواره و در تمام مراحل زندگیم ملموس و قابل مشاهده است. او یگانه خالق بی‌همتاست و ما هر چه داریم از اوست.

ممنونم از خانواده‌ام با محبت‌های بیشمارشان که در این کار یاریم کردند. سپاس فراوان از استادم آقای دکتر ابری که راهنمایی‌هایش، صبر و مهربانی‌هایش در به اتمام رساندن پایان‌نامه کمکم بود.

در پایان متشکرم از آقای دکتر تقوی بابت مشاوره‌هایش و از آقای دکتر اصفهانی و آقای دکتر عباسپور که داوری پایان‌نامه‌ام را بر عهده داشتند.

چکیده

سرشت نمایی فضای کامل اردوش

به وسیله‌ی:
حمید پهلوانی

فضایی که اکنون به عنوان فضای کامل اردوش شناخته شده است به وسیله‌ی پل اردوش [۱] در سال ۱۹۴۰ میلادی با زیرفضاهای بسته از فضای هیلبرت $l^{۲}$ شامل همه بردارهایی که مولفات آن از دنباله‌ی $\{۰\} \cup \{\frac{۱}{n}; n \in \mathbb{N}\}$ می‌آید، معرفی شده است.

در این پایان‌نامه ابتدا قصد داریم از یک سرشت‌نمایی توپولوژیکی $\mathfrak{E}_c$، برای جواب دادن به مسئله‌ای که توسط اورستیخین [۲] مطرح شده بود، استفاده کنیم. در ادامه کلاس فاکتورهای $\mathfrak{E}_c$ را مشخص می‌کنیم. بعد از آن همسانریخت بودن فضاهای باناخ ℓ^p که طبق روش اردوش ساخته می‌شوند با $\mathfrak{E}_c$ را اثبات خواهیم کرد. همچنین در پایان نشان می‌دهیم که اگر I یک F_σ -ایده‌آل لهستانی شدنی روی ω باشد، آنگاه I همراه با توپولوژی لهستانی با یکی از مجموعه‌های $\mathbb{Z}$، ۲^ω، $۲^\omega \times \mathbb{Z}$ و $\mathfrak{E}_c$ همسانریخت است. این نتیجه‌ی آخر به سوالی که توسط تودرویچ [۳] مطرح شده بود جواب می‌دهد.

---

[۱] P.Erdos

[۲] L.G.Oversteegen

[۳] Stevo Todorcevic

فهرست مطالب

فهرست مطالب ... **ه**

۱ مفاهیم اولیه ... **۳**

۱-۱ توپولوژی پایه ... ۳

۱-۲ فشرده‌سازی، فضاهای متریک، همبندی ... ۱۳

۱-۳ مقدمه‌ای بر نظریه اندازه ... ۲۳

۱-۴ بعد فضاهای توپولوژیک ... ۲۷

۲ تقریباً صفربعدی ... **۳۹**

۲-۱ فضای صفربعدی ... ۳۹

۲-۲ فضای تقریباً صفربعدی ... ۴۴

۲-۳ بادبزن للک ... ۴۹

۳ سرشت‌نمایی و نمایش‌هایی از $\mathfrak{E}_c$ ... **۵۷**

۳-۱ سرشت‌نمایی و پایداری ... ۵۷

۳-۲ نمایش‌هایی از $\mathfrak{E}_c$ ... ۶۳

مراجع ... **۷۷**

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ... **۸۰**

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ... **۸۴**

پیشگفتار

همواره سرشت‌نمایی ساختارهای ریاضی مختلف، یکی از اهداف مهم ریاضیدانان بوده است. هدف اصلی ما در این پایان‌نامه یک سرشت‌نمایی توپولوژیکی از فضای کامل اردوش می‌باشد. در واقع کلاس فاکتورهای $\mathfrak{E}_c$ را مشخص نموده و نشان می‌دهیم که $\mathfrak{E}_c$ دارای این خاصیت نادر می‌باشد که هر زمان حاصلضرب $\Pi_{i=0}^{\infty} X_i$ همسانریخت با $\mathfrak{E}_c$ باشد حداقل یکی از X_i ها اما نه بیش از تعداد متناهی از آنها همسانریخت با فضای $\mathfrak{E}_c$ می‌باشد. اورستیخین پرسیده بود که آیا یک سرشت‌نمایی ساده از فضای کامل اردوش وجود دارد. قضیه زیر به عنوان قضیه اصلی ما در این پایان‌نامه است که در رابطه با همین سوال می‌باشد. این قضیه را در قضیه‌ی ۱.۱.۳ کامل‌تر کرده و اثبات می‌نماییم.

قضیه. فضای غیر تهی E همسانریخت با $\mathfrak{E}_c$ است اگر و تنها اگر توپولوژی صفربعدی $\mathcal{W}$ روی E، که از توپولوژی ذاتی آن روی E درشت‌تر است، وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $x \in E$ و همسایگی U از x در E، همسایگی V از x در E با V بسته در $(E, \mathcal{W})$ وجود داشته باشد، $(V, \mathcal{W})$ کامل توپولوژیکی و V زیرمجموعه‌ی هیچ‌جا چگال از $(U, \mathcal{W})$ باشد.

در کاربردی از این قضیه نشان می‌دهیم فضاهایی که در فضای باناخ ℓ^p با روش اردوش ساخته می‌شوند با فضای کامل اردوش همسانریختند.

در ادامه درباره‌ی ایده‌آل‌های لهستانی صحبت خواهیم کرد و در آن توضیح می‌دهیم که اگر I، F_σ-ایده‌آلی لهستانی شدنی روی ω باشد سپس I همراه با توپولوژی لهستانی با یکی از مجموعه‌های $\mathbb{Z}$، مجموعه‌ی کانتور 2^ω یا $2^\omega \times \mathbb{Z}$ و یا $\mathfrak{E}_c$ همسانریخت است. که این نتیجه جواب می‌دهد، سوالی را که توسط تودرویچ مطرح شده بود.

همچنین به وسیله‌ی مثالی نشان می‌دهیم، ایده‌آل‌های لهستانی شدنی که F_σ نیستند همراه با توپولوژی لهستانی می‌توانند با $\mathfrak{E}_c$ همسانریخت باشند و می‌توانند هم نباشند، حتی اگر توپولوژی آن یک‌بعدی باشد.

فضای هیلبرت $\ell^۲$ شامل دنباله‌های شمارش‌پذیر $x = (x_۰, x_۱, \dots)$ از اعداد حقیقی را در نظر می‌گیریم. اردوش زیر فضای بسته از $\ell^۲$ شامل همه $x \in \ell^۲$ به‌طوری که مولفه‌های آن از زیرمجموعه‌ی $\{۰\} \cup \{\frac{۱}{n}; n \in \mathbb{N}\}$ انتخاب می‌شود معرفی کرد. این فضا حال به نام فضای کامل اردوش شناخته می‌شود.

کاوامورا [۴]، اورستیخین و تیمچاتین [۵] فضای کامل اردوش را با $\{x \in \ell^۲ : x_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ نشان دادند. این فضا با فضایی که اردوش معرفی کرده بود همسانریخت می‌باشد.

ثابت شده است که فضای کامل اردوش با مجموعه‌ی نقاط پایانی از بادبزن للک نیز همسانریخت می‌باشد. ما در قسمت‌های مختلف پایان‌نامه برای نشان دادن $\mathfrak{E}_c$ برحسب نیاز، از نمایش مناسب آن استفاده خواهیم کرد. از آن‌جایی که بادبزن للک با توپولوژی یکتا مشخص شده است، نتیجه می‌گیریم که $\mathfrak{E}_c$ خوش‌تعریف است.

کاوامورا، اورستیخین و تیمچاتین یک سرشت‌نمایی از $\mathfrak{E}_c$ ارائه کرده بودند. هرچند آن سرشت‌نمایی کاملا فنی است، اما توپولوژیکی نمی‌باشد.

در این پایان‌نامه در فصل اول سعی کرده‌ایم مطالب و مقدمات توپولوژیکی که در ادامه استفاده خواهیم کرد، را بیان کنیم. در فصل دوم درباره‌ی فضاهای صفربعدی و تقریباً صفربعدی بحث کرده و شباهت‌ها و تفاوت‌های این دو فضا را مشاهده می‌کنیم و در ادامه‌ی آن بادبزن للک را معرفی می‌کنیم. در فصل آخر سرشت‌نمایی توپولوژیکی از فضای کامل اردوش می‌آوریم.

---

[۴] Kawamura

[۵] Tymchatyn

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱-۱ توپولوژی پایه

آن‌چه در این قسمت بیان می‌شود، شامل تعریف فضاهای توپولوژیک، مروری بر ساختار آن‌ها و بررسی مفاهیمی برجسته در رابطه با این فضاها می‌باشد.
جالب است بدانیم که منشأ پیدایش مفهوم فضای توپولوژیک، بررسی خط حقیقی و فضای اقلیدسی و بررسی توابع پیوسته در این فضا بوده است.
یادآوری می‌کنیم که یک توپولوژی روی مجموعه X عبارت است از، گردایه‌ای مانند $\mathcal{T}$ از زیرمجموعه‌های X که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

۱. $\emptyset,\ X \in \mathcal{T}$

۲. اجتماع اعضای هر زیرگردایه از $\mathcal{T}$ متعلق به $\mathcal{T}$ باشد.

۳. اشتراک اعضای هر زیرگردایه متناهی از $\mathcal{T}$ متعلق به $\mathcal{T}$ باشد.

دراین‌صورت، اعضای $\mathcal{T}$ را مجموعه باز و مجموعه X همراه با گردایه $\mathcal{T}$ را فضای توپولوژیکی می‌نامیم و با $(X, \mathcal{T})$ نمایش می‌دهیم.
منظور از یک همسایگی نقطه‌ی x مجموعه‌ای است که شامل یک مجموعه‌ی باز و حاوی x باشد. مجموعه‌ی $F \subset X$ را بسته گوییم هرگاه $X \setminus F$ باز باشد. مجموعه‌ای که هم بسته و هم باز باشد را بسته-باز گوییم.

اجتماع شمارا از مجموعه‌های بسته را F_σ-مجموعه و اشتراک شمارا از مجموعه‌های باز را G_δ-مجموعه می‌نامیم. به همین ترتیب $F_{\sigma\delta}$-مجموعه و $G_{\delta\sigma}$-مجموعه تعریف می‌شوند.

اشتراک تمام مجموعه‌های بسته، شامل A را، بستار A نامیده و با $\overline{A}$ نمایش می‌دهیم. همچنین نقطه $a \in A$ را نقطه درونی مجموعه A گوییم هرگاه مجموعه باز G موجود باشد به‌طوری‌که $a \in G \subseteq A$. مجموعه تمام نقاط درونی A را با A° یا $\operatorname{int} A$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱. اگر $(X, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک و $A \subseteq X$ باشد، نقطه $a \in X$، نقطه حدی مجموعه A است، هرگاه هر مجموعه باز شامل نقطه a، دارای نقطه دیگری از مجموعه A باشد. به‌عبارت دیگر برای هر مجموعه باز $G \in \mathcal{T}$ شامل a، داشته باشیم $(G \backslash \{a\}) \cap A \neq \emptyset$ مجموعه نقاط حدی را با A' نمایش می‌دهیم.

تذکر ۲.۱.۱. مجموعه A در فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ را مجموعه کامل گوییم هرگاه $A = A'$.

تعریف ۳.۱.۱. عنصر x از فضای توپولوژیک X را یک نقطه مرزی A در X خوانیم، در صورتی‌که هر مجموعه باز شامل x، هم A و هم $X \backslash A$ را قطع کند. مجموعه نقاط مرزی A را مرز A می‌نامیم و با نمادهای ∂A یا $F_r A$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۱. مجموعه غیرتهی A را در فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$، مجموعه چگال گوییم، هرگاه $X = \overline{A}$. و آن‌را هیچ‌جا چگال گوییم هرگاه $(\overline{A})^\circ = \emptyset$.

به‌عنوان مثال در $\mathbb{R}$، مجموعه اعداد گویا چگال و مجموعه اعداد طبیعی هیچ‌جا چگال می‌باشند.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ دو توپولوژی روی مجموعه‌ی X باشند. می‌گوییم $\mathcal{T}$ از $\mathcal{T}'$ ظریف‌تر است هرگاه $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. در این حالت $\mathcal{T}'$ را توپولوژی درشت‌تر می‌نامیم.
البته بعضی از ریاضیدانان از واژه‌های قوی‌تر یا بزرگ‌تر به جای ظریف‌تر و از واژه‌های ضعیف‌تر یا کوچک‌تر به جای درشت‌تر استفاده می‌کنند.

تعریف ۶.۱.۱. فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ و مجموعه $A \subseteq X$ را درنظر می‌گیریم، خانواده

$$\mathcal{T}_A = \{U \cap A : \; U \in \mathcal{T}\}$$

یک توپولوژی برای A است، که آن را توپولوژی نسبی و $(A, \mathcal{T}_A)$ را زیرفضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ می‌نامیم.

تعریف ۷.۱.۱. خانواده‌ی $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ را یک پایه برای فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ گوییم هرگاه هر زیرمجموعه‌ی ناتهی باز X را بتوان به صورت اجتماع زیر خانواده‌ای از $\mathcal{B}$ نمایش داد.

هر پایه‌ی $\mathcal{B}$ دارای ویژگی‌های زیر است:

(۱) برای هر $U_۱, U_۲ \in \mathcal{B}$ و هر $x \in U_۱ \cap U_۲$، مجموعه‌ی $U \in \mathcal{B}$ وجود دارد به طوری که $x \in U \subset U_۱ \cap U_۲$.

(۲) برای هر $x \in X$ مجموعه‌ی $U \in \mathcal{B}$ وجود دارد به طوری که $x \in U$. گردایه

تذکر ۸.۱.۱. ثابت می‌شود که خانواده $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های X، یک پایه برای فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ است هرگاه $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ و برای هر نقطه $x \in X$ و هر همسایگی $V \subset X$ از x، مجموعه $U \in \mathcal{B}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x \in U \subset V$.

نکته ۹.۱.۱. زیرمجموعه U از X در X باز است (به‌عبارت دیگر عنصری از $\mathcal{T}$ است) هرگاه برای هر $x \in U$، عنصر پایه‌ای $B \in \mathcal{B}$ موجود باشد به‌طوری‌که، $x \in B$ و $B \subset U$.

تعریف ۱۰.۱.۱. خانواده $\mathcal{B}_x$ از همسایگی های باز x رایک پایه‌ی موضعی در نقطه‌ی x می‌نامیم هرگاه برای هر مجموعه‌ی باز U حاوی x، $V \in \mathcal{B}_x$ وجود داشته باشد به‌طوری که $x \in V \subseteq U$.

تعریف ۱۱.۱.۱. در فضای توپولوژیکی $(X, \mathcal{T})$، گردایه $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ از زیرمجموعه‌های باز X، یک زیرپایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ روی X است، اگر و تنها اگر، اشتراک متناهی اعضای $\mathcal{A}$، یک پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱. فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ را شمارای اول گوییم، هرگاه در هر نقطه‌ی $x \in X$ پایه‌ی شمارای $\mathcal{B}_x$ داشته باشد.

مثال ۱۳.۱.۱. $\mathbb{R}^n$ با توپولوژی اقلیدسی به‌ازای $n = ۱, ۲, \ldots$، را در نظر می‌گیریم. این فضا شمارای اول می‌باشد، زیرا برای هر نقطه در $\mathbb{R}^n$، گوی‌های به شعاع $\frac{۱}{m}$ به‌ازای $m = ۱, ۲, \ldots$ تشکیل یک پایه‌ی موضعی شمارا در آن نقطه می‌دهند.

تعریف ۱۴.۱.۱. فضای توپولوژیکی $(X, \mathcal{T})$ را شمارای دوم گوییم، هرگاه دارای پایه‌ای شمارش‌پذیر باشد.

مثال ۱۵.۱.۱. $\mathbb{R}^n$ با توپولوژی اقلیدسی به ازای $n = ۱, ۲, \ldots$، شمارای دوم است، زیرا تمام گوی‌ها به مرکز و شعاع گویا تشکیل پایه‌ای شمارا برای $\mathbb{R}^n$ می‌دهند.

تعریف ۱۶.۱.۱. فضای توپولوژیکی $(X, \mathcal{T})$ را جدایی‌پذیر گوییم هرگاه شامل یک زیرمجموعه‌ی شمارش‌پذیر چگال باشد.

مثال ۱.۱.۱۷. $\mathbb{R}^n$ با توپولوژی اقلیدسی به ازای $n = ۱, ۲, \ldots$، جدایی‌پذیر است زیرا $\mathbb{Q}^n$ شمارش‌پذیر بوده و در $\mathbb{R}$ چگال می باشد.

تذکر ۱.۱.۱۸. هر فضای شمارای دوم، جدایی‌پذیر و شمارای اول می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱۹. فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ فضایی فرشه [1] نامیده می‌شود، اگر برای هر $A \subseteq X$ و هر $x \in \bar{A}$ دنباله‌ی $\{x_۱, x_۲, \cdots\}$ از نقاط A همگرا به x وجود داشته باشد.

قضیه ۱.۱.۲۰. *هر فضای شمارای اول، فضایی فرشه است.*

اثبات. اگر فضای X پایه شمارای $\{u_i\}_{i=۱}^{\infty}$ در نقطه‌ی x داشته باشد و $x \in \bar{A}$، سپس اختیار می‌کنیم $x_i \in A \cap U_۱ \cap U_۲ \cap \cdots \cap U_i$ برای $i = ۱, ۲, \cdots$، حال دنباله‌ی $\{x_i\}$، نقطه‌هایی از A همگرا به x می‌باشند. در نتیجه هر فضای شمارای اول، فضایی فرشه است. $\square$

تعریف ۱.۱.۲۱. فرض کنیم $(X, \mathcal{T})$ و $(Y, \mathcal{T}')$ دو فضای توپولوژیک باشند؛ نگاشت f از X به Y را پیوسته می‌نامیم هرگاه برای هر مجموعه‌ی باز $U \in \mathcal{T}'$ داشته باشیم $f^{-۱}(U) \in \mathcal{T}$، یعنی برای هر مجموعه‌ی باز $U \subset Y$، $f^{-۱}(U)$ در X باز باشد.

توجه کنیم که نگاشت f در نقطه‌ی $x \in X$ پیوسته است هرگاه برای هر مجموعه‌ی باز $V \subset Y$ از $f(x)$، همسایگی $U \subset X$ از x وجود داشته باشد به‌طوری که $f(U) \subset V$.

گزاره ۱.۱.۲۲. *برای هر نگاشت f از فضای توپولوژیک X به فضای توپولوژیک Y گزاره‌های زیر هم‌ارز هستند.*

(۱) *f پیوسته است.*

(۲) *به ازای هر عضو U از زیرپایه‌ی $\mathcal{P}$ برای فضای Y، $f^{-۱}(U)$ در X باز است.*

(۳) *به ازای هر عضو U از پایه‌ی $\mathcal{B}$ برای Y، $f^{-۱}(U)$ در X باز است.*

(۴) *به ازای هر زیرمجموعه‌ی بسته‌ی F در Y، $f^{-۱}(F)$ در X بسته است.*

(۵) *برای هر $A \subset X$ داریم $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

(۶) *برای هر $B \subset Y$ داریم $\overline{f^{-۱}(B)} \subset f^{-۱}(\overline{B})$.*

(۷) *برای هر $B \subset Y$ داریم $f^{-۱}(IntB) \subset Intf^{-۱}(B)$.*

اثبات. به [۱۲، گزاره ۱.۴.۱] مراجعه کنید. $\square$

[1] Frechet

مثال ۲۳.۱.۱. اگر X یک فضای گسسته باشد، آنگاه هر نگاشت از X به فضای توپولوژیک Y پیوسته است. همچنین هر نگاشت از فضای توپولوژیک X به فضای ناگسسته‌ی Y پیوسته می‌باشد.

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنیم $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ یک گردایه از مجموعه‌ها باشد، ضرب دکارتی مجموعه‌های X_α، مجموعه همه توابعی مانند

$$x : A \to \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$$

است که $x(\alpha)\in X_\alpha$، برای هر $\alpha\in A$.

این مجموعه را با نماد $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ نمایش می‌دهیم. اگر $X_\alpha = X$ برای هر $\alpha \in A$، آن‌گاه به‌جای نماد $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ از نماد X^A و در حالت خاص که مجموعه A یک مجموعه متناهی مانند $A=\{۱,۲,\dots,n\}$ است از نماد X^n استفاده می‌کنیم. با نمادگذاری فوق نگاشت

$$\pi : \prod X_\alpha \to X_\beta$$

با ضابطه $\pi_\beta(x)=x_\beta$ را تابع تصویر روی X_β می‌نامیم.

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنیم $\{U_\beta$ در X_β باز است $\mathcal{S}_\beta = \{\pi_\beta^{-۱}(U_\beta)$ و $\mathcal{S} = \bigcup_{\beta\in I}\mathcal{S}_\beta$ در این‌صورت توپولوژی تولید شده به‌وسیله زیرپایه $\mathcal{S}$ را توپولوژی حاصلضربی می‌نامیم. در این توپولوژی $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ را فضای حاصلضربی می‌نامیم.

قضیه ۲۶.۱.۱. *فرض کنیم $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ و Y فضاهای توپولوژیکی باشند، نگاشت $f : Y \to \prod X_\alpha$ تعریف شده به‌صورت $f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha\in I}$ که در آن برای هر α، $f_\alpha : Y \to X_\alpha$ با ضابطه $f_\alpha : \pi_\alpha \circ f$ مشخص می‌شود، پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر α، f_α پیوسته باشد.*

اثبات. به [۲۱ قضیه ۱۹.۶ صفحه ۱۳۳] مراجعه کنید. □

اگر X یک فضای توپولوژیک و $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک و $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از توابع پیوسته باشند جایی‌که $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ تعریف می‌شود.

به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیه قبل، نگاشت‌هایی که نقطه $x \in X$ را به نقطه $\{f_\alpha(x)\} \in \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$ می‌برند، پیوسته‌اند.

تعریف ۲۷.۱.۱. فضای توپولوژیک X را $T_۰$ گوییم هرگاه برای هر دو نقطه‌ی متمایز از فضا مجموعه‌ی بازی وجود داشته باشد که فقط یک نقطه را شامل شود.

تعریف ۲۸.۱.۱. فضای توپولوژیک X را $T_۱$ گوییم هرگاه برای هر دو نقطه‌ی متمایز از فضا مجموعه‌ی بازی شامل هر نقطه وجود داشته باشد که نقطه‌ی دیگر را شامل نشود.

به وضوح هر فضای T_1 یک فضای T_0 است. توجه کنیم که X فضای T_1 است هرگاه هر نقطه‌ی $x \in X$ برابر با اشتراک همه‌ی همسایگی‌هایش باشد. بنابراین هر زیرمجموعه‌ی تک عضوی از فضای شمارای اول T_1، یک G_δ-مجموعه است.

نکته ۲۹.۱.۱. X یک فضای T_1 است هرگاه برای هر $x \in X$، $\{x\}$ بسته باشد. در واقع، اگر X فضای T_1 باشد آنگاه برای هر $x \in X$ داریم $\{x\} = \bigcap\{X \setminus U : x \notin U \in \mathcal{T}\}$، جایی که $\mathcal{T}$ توپولوژی X است؛ بنابراین $\{x\}$ بسته است. از طرف دیگر، اگر برای هر $x \in X$ مجموعه‌ی $\{x\}$ بسته باشد، آنگاه X فضای T_1 است، زیرا برای هر جفت از نقاط مجزای $x_1, x_2 \in X$، مجموعه‌ی باز $U = X \setminus \{x_2\}$ شامل x_1 است و x_2 را در بر ندارد.

تعریف ۳۰.۱.۱. فضای توپولوژیک X را فضای T_2 یا هاسدورف گوییم هرگاه برای هر جفت از نقاط مجزای $x_1, x_2 \in X$ مجموعه‌های باز U_1, U_2 وجود داشته باشند به‌طوری که $x_1 \in U_1$، $x_2 \in U_2$ و $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

به وضوح هر فضای T_2 یک فضای T_1 است. فضای X یک فضای T_2 است هرگاه هر نقطه‌ی $x \in X$ برابر با اشتراک همه‌ی بستارهای همسایگی‌هایش باشد.

قضیه ۳۱.۱.۱. *برای هر جفت از نگاشت‌های پیوسته‌ی f و g از فضای توپولوژیک X به فضای هاسدورف Y، مجموعه‌ی $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ در X بسته است.*

اثبات. به [۱۲، قضیه ۱.۵.۴] مراجعه کنید. □

تعریف ۳۲.۱.۱. فضای توپولوژیک X را فضای T_3 یا منظم گوییم هرگاه X فضای T_1 باشد و برای هر $x \in X$ و هر مجموعه‌ی بسته‌ی $F \subset X$ که $x \notin F$، مجموعه‌های باز U_1 و U_2 وجود داشته باشند به‌طوری که $x \in U_1$، $F \subset U_2$ و $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

واضح است که هر فضای منظم یک فضای هاسدورف است.

قضیه ۳۳.۱.۱ (متریک‌پذیری اوریسون[۲]). *اگر X منظم و شمارای دوم باشد آنگاه X متریک‌پذیر است.*

اثبات. به [۲۱، قضیه ۳۴.۱] مراجعه کنید. □

[۲] Urysohn

تعریف ۱.۱.۳۴. فضای توپولوژیک X را $T_{3\frac{1}{2}}$ یا فضای تیخونوف یا فضای تماماً منظم گوییم هرگاه X فضای T_1 باشد و برای هر $x \in X$ و هر مجموعه‌ی بسته‌ی $F \subset X$ که $x \notin F$، تابع پیوسته‌ی $f : X \to \mathbb{I}$ وجود داشته باشد به‌طوری که $f(x) = 0$ و برای هر $y \in F$ داشته باشیم $f(y) = 1$.

نکته ۱.۱.۳۵. چون برای هر مجموعه‌ی باز $U_1 = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ و $U_2 = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ داریم $x \in U_1$، $F \subset U_2$ و $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ بنابراین هر فضای تیخونوف، منظم است.

تعریف ۱.۱.۳۶. فضای X را T_4 یا فضای نرمال گوییم هرگاه T_1 باشد و برای هر جفت از مجموعه‌های بسته‌ی $A, B \subset X$ مجموعه‌های باز U_1 و U_2 وجود داشته باشند به‌طوری که $A \subset U_1$، $B \subset U_2$ و $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

نکته ۱.۱.۳۷. فرض کنیم X فضای T_1 باشد. X فضای نرمال است اگر و تنها اگر برای هر مجموعه‌ی بسته‌ی $F \subset X$ و هر مجموعه‌ی باز $V \subset X$ که شامل F است، مجموعه‌ی باز $U \subset X$ وجود داشته باشد به‌طوری که $F \subset U \subset \overline{U} \subset V$. هر فضای T_4 یک فضای T_3 است.

با توجه به لم شناخته شده‌ی زیر، هر فضای نرمال یک فضای تیخونوف است.

لم ۱.۱.۳۸. ***(لم اوریسون)***
فضای $(X, \mathcal{T})$ یک فضای نرمال است هرگاه به‌ازای هر دو مجموعه بسته و مجزای A و B، تابع حقیقی و پیوسته $f : X \to [0, 1]$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f \restriction_A = 0$ و $f \restriction_B = 1$.

اثبات. به [۲۱ قضیه ۱.۳۳ صفحه ۲۲۳] مراجعه کنید. □

قضیه ۱.۱.۳۹. ***(گسترش تیتزه[3])***
فضای X نرمال است، هرگاه به‌ازای هر مجموعه بسته A و هر تابع پیوسته $f : A \to \mathbb{R}$، تابع پیوسته $F : X \to \mathbb{R}$ موجود باشد، به‌طوری‌که $F \restriction_A = f$.

اثبات. به [۲۱ قضیه ۱.۳۵ صفحه ۲۳۵] مراجعه کنید. □

تعریف ۱.۱.۴۰. در فضای توپولوژیکی $(X, \mathcal{T})$، گردایه $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های X یک پوشش برای $A \subseteq X$ است هرگاه $A \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{A}} U$.

اگر همه عناصر $\mathcal{A}$ باز باشند، پوشش را یک پوشش باز برای A می‌نامیم. همچنین $A \subseteq X$ را فشرده گوییم، هرگاه، هر پوشش باز آن دارای زیرپوشش متناهی باشد.

تذکر ۱.۱.۴۱. اجتماع شمارا از مجموعه‌های فشرده را σ- فشرده می‌نامیم.

---
[3] Tietze

قضیه ۴۲.۱.۱. (*تیخونوف*[۴])
فرض کنیم $(X_i, \mathcal{T}_i)$ $1 \leq i \leq n$ *، یک دسته از فضاهای توپولوژیک و* $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ *مجهز به توپولوژی حاصلضربی باشد، دراین‌صورت* X *فشرده است اگر و تنها اگر به‌ازای هر* i *،* X_i *فشرده باشد.*

اثبات. به [۲۱ قضیه ۲۶.۷ صفحه ۱۸۳] مراجعه کنید. □

تعریف ۴۳.۱.۱. یک فضای توپولوژیک را فشرده موضعی یا موضعاً فشرده گوییم، اگر و تنها اگر حول هر نقطه مجموعه باز با بستار فشرده وجود داشته باشد.

مثال ۴۴.۱.۱. خط حقیقی $\mathbb{R}$ هم موضعاً فشرده و هم σ-فشرده است. اما مجموعه اعداد گویا $\mathbb{Q}$ موضعاً فشرده نیست ولی σ-فشرده است.

قضیه ۴۵.۱.۱. *برای هر زیرفضای فشرده* A *از فضای موضعاً فشرده* X *، و هر مجموعه باز* V *شامل* A *، مجموعه باز* U *موجود است به‌طوری‌که* $A \subset U \subset \overline{U} \subset V$ *و* $\overline{U}$ *فشرده است.*

اثبات. برای هر $x \in A$، همسایگی V_x از x را طوری می‌یابیم که $\overline{V}_x \subset V$ همسایگی W_x از x را طوری‌که $\overline{W}_x$ فشرده باشد. مجموعه $\overline{U}_x$، جایی‌که $U_x = V_x \cap W_x$، فشرده است، زیرا زیرمجموعه‌ای بسته از فضای فشرده $\overline{W}_x$ است. چون A فشرده است، مجموعه متناهی $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset A$ موجود است، به‌طوری‌که $A \subset U = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \ldots \cup U_{x_k}$، همچنین

$$\overline{U} = \overline{U}_{x_1} \cup \overline{U}_{x_2} \cup \ldots \cup \overline{U}_{x_k}$$

فشرده است و به‌وضوح $\overline{U} \subset \overline{V}_{x_1} \cup \overline{V}_{x_2} \cup \ldots \cup \overline{V}_{x_k} \subset V$. □

تعریف ۴۶.۱.۱. فرض کنیم $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ و $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t \in T}$ دو پوشش برای مجموعه‌ی X باشند. گوییم پوشش $\mathcal{B}$ تظریفی از پوشش $\mathcal{A}$ است هرگاه برای هر $B_t \in \mathcal{B}$ عضوی مانند $A_s \in \mathcal{A}$ وجود داشته باشد به‌طوری که $B_t \subset A_s$. در این وضع می‌نویسیم $\mathcal{B} < \mathcal{A}$.

تعریف ۴۷.۱.۱. پوشش $\mathcal{A}' = \{A'_s\}_{s \in S'}$ از X یک زیرپوشش برای پوشش $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ از X است هرگاه $S' \subset S$ و برای هر $s \in S'$، $A'_s = A_s$. به ویژه هر زیرپوشش یک تظریف است.

تعریف ۴۸.۱.۱. فضای X را لیندلف [۵] گوییم هر گاه هر پوشش باز آن دارای زیرپوشش شمارا باشد.

---

[۴] Tychonoff

[۵] Lindelof

تعریف ۴۹.۱.۱. فرض کنیم X فضای توپولوژیک و $\{f_i\}$ دنباله‌ای از توابع از X به $\mathbb{R}$ باشد. گوییم دنباله‌ی $\{f_i\}$ همگرای یکنواخت به تابع حقیقی مقدار f است، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، عدد طبیعی k وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $x \in X$ و $i \geq k$ داشته باشیم $|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon$.

قضیه ۵۰.۱.۱. *اگر دنباله‌ی $\{f_i\}$ از توابع پیوسته از X به $\mathbb{R}$ همگرای یکنواخت به تابع حقیقی مقدار f باشند، آنگاه f یک تابع پیوسته از X به $\mathbb{R}$ است.*

اثبات. به [۱۲، قضیه ۱.۴.۷] مراجعه کنید. □

تعریف ۵۱.۱.۱. نگاشت پیوسته‌ی $f : X \to Y$ یک نگاشت بسته (باز) نامیده می‌شود هرگاه برای هر مجموعه‌ی بسته (باز) $A \subset X$ نقش $f(A)$ در Y بسته (باز) باشد.

تعریف ۵۲.۱.۱. نگاشت دوسویی (یک به یک و پوشا) $f : X \to Y$ همسانریختی نامیده می‌شود هرگاه f و f^{-1} پیوسته باشند. دو فضای توپولوژیک X و Y را همسانریخت گوییم هرگاه یک همسانریختی از X به Y وجود داشته باشد.

بدیهی است که برای هر فضای X نگاشت همانی $id_X : X \to X$ همسانریختی است. همچنین اگر f همسانریختی باشد، f^{-1} نیز همسانریختی خواهد بود. اگر $f : X \to Y$ یک همسانریختی باشد، آنگاه دنباله‌های همگرای فضاهای X و Y با هم متناظرند. به عبارت دقیق‌تر، به ازای هر دنباله‌ی (x_n) در X داریم

$$(x_n \to x) \Longleftrightarrow (f(x_n) \to f(x)).$$

گزاره ۵۳.۱.۱. *برای هر نگاشت یک به یک f از فضای توپولوژیک X به‌روی فضای توپولوژیک Y گزاره‌های زیر هم‌ارز هستند.*

(۱) *نگاشت f همسانریختی است.*

(۲) *نگاشت f بسته است.*

(۳) *نگاشت f باز است.*

(۴) *مجموعه‌ی $f(A)$ در Y بسته است اگر و تنها اگر A در X بسته باشد.*

(۵) *مجموعه‌ی $f^{-1}(B)$ در X بسته است اگر و تنها اگر B در Y بسته باشد.*

(۶) *مجموعه‌ی $f(A)$ در Y باز است اگر و تنها اگر A در X باز باشد.*

(۷) *مجموعه‌ی $f^{-1}(B)$ در X باز است اگر و تنها اگر B در Y باز باشد.*

اثبات. به [۱۲، گزاره ۱.۴.۸] مراجعه کنید. □

قضیه ۵۴.۱.۱ (لاورنتیو [۶]). *فرض کنیم X و Y فضاهای متریک کامل و $A \subset X$ و $C \subset Y$ زیرفضاهای دلخواه باشند. هر همسانریختی مانند $f : A \to C$ قابل گسترش به همسانریختی $F : B \to D$ است که در آن $A \subset B \subset X$، $C \subset D \subset Y$، B و D هر دو به‌ترتیب G_δ- مجموعه در X و Y هستند.*

اثبات. به [۱۲، قضیه ۴.۳.۱۹] مراجعه کنید. □

واضح است که اگر E و F دو فضای متریک و تابع $f : E \to F$ تناظر دوسویی باشد. اگر f پیوسته و E فشرده باشد، آنگاه f یک همسانریختی است.

تعریف ۵۵.۱.۱. فضای توپولوژیک X دارای خاصیت نقطه ثابت است اگر برای هر نگاشت پیوسته‌ی $f : X \to X$، نقطه‌ی $x \in X$ وجود داشته باشد به‌طوری که $f(x) = x$.

مقصود از نشاندن، تابعی یک‌به‌یک است که خود و وارونش پیوسته باشند. هر نشاندن پوشا یک همسانریختی است.

تعریف ۵۶.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک، $Y = \{Y_s\}_{s\in S}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک و $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s\in S}$ که در آن $f_s : X \to Y_s$ است، خانواده‌ای از نگاشت‌های پیوسته باشد. گوییم خانواده‌ی $\mathcal{F}$ نقاط را جدا می‌کند یا کلی است، هرگاه برای هر جفت مجزا از هم $x, y \in X$، نگاشت $f_s \in \mathcal{F}$ وجود داشته باشد به‌طوری که $f_s(x) \neq f_s(y)$. اگر برای هر $x \in X$ و هر مجموعه‌ی بسته‌ی $F \subset X$ که $x \notin F$، نگاشت $f_s \in \mathcal{F}$ وجود داشته باشد به‌طوری که $f_s(x) \notin \overline{f_s(F)}$ در این‌صورت گوییم خانواده‌ی $\mathcal{F}$ نقاط و مجموعه‌های بسته را جدا می‌کند.
توجه کنیم که اگر X فضای T_0 باشد، در این‌صورت هر خانواده‌ی $\mathcal{F}$ که نقاط و مجموعه‌های بسته را جدا کند، نقاط را نیز جدا خواهد کرد. در واقع اگر $x \neq y$ چون فضا T_0 است بنابراین مجموعه‌ی باز U در X وجود دارد که دقیقاً شامل یکی از نقاط x یا y است؛ فرض کنیم z یکی از نقاط x یا y باشد که در مجموعه‌ی بسته‌ی $F = X \setminus U$ قرار ندارد، به ازای f_sای در $\mathcal{F}$ داریم $f_s(z) \notin \overline{f_s(F)}$. بنابراین به‌وضوح داریم $f_s(x) \neq f_s(y)$.

لم ۵۷.۱.۱. *فرض کنیم $f : X \to Y$ نگاشت پیوسته و یک به یک باشد و نقاط و مجموعه‌های بسته را جدا کند، در این‌صورت f یک نشاندن است.*

[۶] Lavrentieff

اثبات. کافیست نشان دهیم که برای هر مجموعه‌ی بسته‌ی $F \subset X$ داریم $\overline{f(F)} \cap f(X) = f(F)$. اگر $y = f(x) \in f(X) \setminus f(F)$، در این‌صورت $x \notin F$ و $y = f(x) \notin \overline{f(F)}$. بنابراین $f(X) \cap \overline{f(F)} \subset f(F)$. طرف دیگر شمول بدیهی است. $\square$

تعریف ۵۸.۱.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک باشند یک کپی بسته از Y در X زیرفضایی بسته مانند $Y' \subseteq X$ است به‌طوری که Y و Y' همسانریخت هستند.

تعریف ۵۹.۱.۱. فرض کنیم $(X, \mathcal{T})$ فضایی توپولوژیک، S یک مجموعه و $f(X) = S$ در این‌صورت توپولوژی خارج قسمتی $\mathcal{Q}$ بزرگترین توپولوژی در S است به قسمی که f پیوسته باشد.

تعریف ۶۰.۱.۱. فرض کنیم $(X, \mathcal{T})$ فضایی توپولوژیک و R یک رابطه هم‌ارزی در X باشد. گردایه همه‌ی رده‌های R -هم‌ارزی در X را با X / R و نگاشت متعارف از X به X / R تعریف شده توسط ضابطه‌ی $\varphi(x) = [x]$ را با φ نمایش می‌دهیم.

هرگاه $\mathcal{Q}$ توپولوژی خارج قسمتی در X / R معین شده توسط φ باشد، آنگاه $(X / R, \mathcal{Q})$ فضایی خارج قسمتی است.

مثال ۶۱.۱.۱. فرض می‌کنیم $X = [0, 1]$ و قرار می‌دهیم $(x, y) \in R$ اگر و فقط اگر x و y هر دو گویا و یا هر دو گنگ باشند. در این‌صورت R یک رابطه هم‌ارزی در X است و فضای خارج قسمتی X / R فضای دو نقطه‌ای ناگسسته می‌باشد.

۱-۲ فشرده‌سازی، فضاهای متریک، همبندی

در این بخش سه مفهوم مهم در توپولوژی را به طور مختصر توضیح خواهیم داد. در ابتدا مفهوم فشرده‌سازی را بیان می‌کنیم، بعد کمی درباره‌ی فضاهای متریک صحبت خواهیم کرد و در آخر مفهوم همبندی را که خیلی مورد استفاده قرار خواهد گرفت، بیان خواهیم کرد.

فشرده‌سازی

تعریف ۱.۲.۱. جفت $(Y, \mathcal{C})$ که X فضایی هاسدورف، Y یک فضای فشرده و $\mathcal{C} : X \to Y$ یک نشاندن همسانریخت از X به Y است به‌طوری که $\overline{\mathcal{C}(X)} = Y$، فشرده‌سازی از فضای X نامیده می‌شود.