بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

حل عددی معادله اغتشاشی مسیر حرکت ماهواره

نگارش

سمانه پیرعلی

استاد راهنما

دکتر سید حجت اله مؤمنی ماسوله

استاد مشاور

دکتر نیما اسدیان

آبان ۱۳۹۰

به پاس

تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی،

به پاس

عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این
سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است،

به پاس

قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی
و ترس، در پناهشان به شجاعت می گراید

و به پاس

محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند،

این پایان نامه را به پدر و مادر عزیزتر از جانم تقدیم می نمایم.

تقدیر و تشکر

بارخدایا سپاس گویم تو را که در اوج عظمتی و اقتدار؛ و با کرم و بخشش خود به همگان نزدیکی و غمگسار و گره هر مشکل بزرگ و گرفتاری جانکاه را گشاینده ...
تو را بر باران مهربانی و کرم و دریای بی‌کران نعمت‌هایت سپاس گویم.

امتنان و سپاس می‌گزارم زحمات و راهنمایی‌های ارزشمند و بی‌شائبه استاد فرهیخته و فرزانه‌ام جناب آقای دکتر سید حجت‌اله مؤمنی ماسوله که با کرامتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی‌های کارساز خویش بارور ساختند؛ و نیز صمیمانه سپاسگزارم از استاد مشاور گرانقدرم جناب آقای دکتر نیما اسدیان با راهنمایی‌های ارزشمندشان. همچنین از اساتید محترم، جناب آقای دکتر علاءالدین ملک و جناب آقای دکتر بهروز رئیسی که زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شدند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

و بی‌نهایت‌ترین سپاس را دارم از پربهاترین گنج گیتی پدر و مادر دلسوز و مهربانم گرچه بسیار ناچیز است این سپاسگزاری در مقایسه با انبوه لطف و فداکاری‌هایشان. همچنین از برادر بزرگوار و مهربانم حمید و همسر گرامی‌اش غزال عزیز، خواهر مهربان و صبورم مریم، همسر با گذشت و خوبش محمد آقا و فرزند دوست داشتنی‌شان پرهام عزیز و دیگر برادران کوشا و پر تلاشم محمد و محمود، که همگی آرامش روحی و آسایش فکری فراهم نمودند تا با حمایت‌های همه جانبه در محیطی مطلوب، مراتب تحصیلی و نیز پایان‌نامه درسی را به نحو احسن به اتمام برسانم سپاسگزاری می‌نمایم.

کمال تشکر و قدردانی دارم از جناب آقای مهندس حجت یاحقی فر، آقای دکتر رضا شکاری بیدختی، آقای مهدی جعفری ندوشن دانشجوی دکترای هوا فضا، آقای انیس هیثم دانشجوی دکترای ریاضی، گروه صنایع فضایی صا ایران و تمامی دوستان عزیز و همراه که محبت نمودند، یاریگر من بودند و با حضور دلگرم کننده‌شان مرا مورد لطف قرار دادند.

برای همه عزیزان آرامش الهی، لطف و بخشش الهی، عشق و هدایت الهی، سلامتی و تندرستی، رزق و روزی فراوان و از صمیم قلب دلی شاد آرزومندم.

سمانه پیرعلی
آبان ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان‌نامه به حل عددی معادله اغتشاشی مسیر حرکت ماهواره (مسئله دو جسم اغتشاشی)، که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم با مقدار اولیه می‌باشد با استفاده از روش تعمیمی جدید بدون مش که بر پایه شبکه‌های عصبی مصنوعی، تکنیک‌های مینیمم سازی و روش‌های هم محلی است؛ پرداخته شده است.

اغتشاشی که در این مسئله لحاظ شده اغتشاشات گرانش زمین است. این مسئله با روش‌های عددی مختلفی از جمله انواع رونگه- کوتا، رونگه- کوتا- نیستروم، رونگه- کوتا- فلبرگ، اویلر، هیون، آدامز- بشفورث و آدامز- مولتون حل شده است؛ نتایج نشان می‌دهد که در این بین روش رونگه- کوتا- فلبرگ۷۸ بهترین دقت را دارا است.

در روش پیشنهادی ابتدا یک جواب تقریبی از شبکه عصبی مصنوعی شامل پارامترهای قابل تنظیم برای معادله دیفرانسیل تعریف می‌شود. با استفاده از فرایند یادگیری شبکه‌های عصبی مصنوعی مقادیر بهینه برای پارامترهای قابل تنظیم بدست می‌آیند. در نهایت با جایگذاری مقادیر بهینه پارامترها در جواب تقریبی، جواب آزمایشی حاصل می‌شود. در شبکه عصبی مصنوعی از پرسپترون سه لایه با یک لایه ورودی، یک لایه پنهان دارای تابع تحریک لوژستیک، یک لایه خروجی دارای تابع تحریک همانی و یک نرون در لایه پنهان استفاده شده است. از تابع کتابخانه‌ای NLPSolve موجود در بسته نرم افزاری Maple۱۳ برای مینیمم سازی مورد نیاز در فرایند یادگیری شبکه عصبی مصنوعی به منظور یافتن جواب بهینه استفاده شده است.

ماکسیمم خطای نقطه‌ای در کل بازه حداکثر $۱۰^{-۲۰}$ بود. بنابراین ماکسیمم خطای نتایج، برای یک دوره مداری، در مقایسه با رونگه- کوتا- فلبرگ۷۸، ۱۲۷ متر بود که نشان می‌دهد روش پیشنهادی به دقت روش رونگه- کوتا- فلبرگ۷۸ است.

بر اساس اطلاعات موجود، نزدیک‌ترین جواب عددی در دسترس به جواب آزمایشگاهی، جواب رونگه- کوتا- فلبرگ۷۸ است.

کلمات کلیدی: مسئله دو جسم اغتشاشی، توابع لوژستیک، شبکه عصبی مصنوعی، شتاب گرانشی اغتشاشی.

پیشگفتار

تحلیل حرکت ماهواره‌ها حول یك جرم سماوی (مثل زمین) و همچنین حرکت سیارات حول خورشید، همگی ناشی از نیروی جاذبه و کشش بین اجرام می‌باشد که به کمك قانون جاذبه‌ی عمومی نیوتن قابل بیان است. این نیرو باعث حرکت اجرام روی مسیرهایی می‌شود که در حالت دو جسم به شکل یك مقطع مخروطی هستند. این مسیرها تحت عنوان **مدارحرکت**[۱] شناخته می‌شوند.

در تحلیل واقعی حرکت اجرام سماوی، باید تأثیر متقابل تمام اجرام روی یکدیگر بررسی شود. اما به دلیل پیچیده بودن چنین تحلیلی و همچنین به دلیل تأثیر کم اجرام سماوی دور در حرکت یك سیاره یا ماهواره، عموماً تحلیل حرکت، فقط با استفاده از تأثیر متقابل دو جرم بررسی می‌شود. این مسئله، تحت عنوان **مسئله‌ی دو جسم** [۲] بررسی می‌شود.

مرکز جرم کل سیستم نقطه‌ای بین دو جرم است که می‌توان فرض کرد کل جرم در آنجا قرار دارد. در مسئله‌ی دو جسم، می‌توان نشان داد که در صورت فقدان نیروهای خارجی، مرکز جرم کل سیستم در فضا ثابت و یا با سرعت ثابت در حال حرکت است. همچنین در صورتی که یکی از اجرام بسیار بزرگتر از جسم دیگر باشد، می‌توان جرم بزرگتر را در فضا ثابت فرض کرد. در این حالت تحلیل حرکت، فقط روی بررسی حرکت جرم کوچکتر حول جرم بزرگتر متمرکز می‌شود.

همچنین در مسئله‌ی دو جسم، در صورتی که شرایط اولیه‌ی موقعیت و سرعت دو جسم در فضا مشخص باشد، می‌توان مدار حرکت را محاسبه کرد. این مدار در صورت عدم اعمال نیرو، بجز نیروی گرانشی، به اجرام، ثابت خواهد بود. به عبارت دیگر وقتی جسمی روی مدار خاصی قرار بگیرد، بدون نیاز به اعمال نیرو و صرف انرژی، مدار حرکت خود را حفظ خواهد کرد (البته در مدارهای ارتفاع پایین که نیروی پسای آیرودینامیکی [۳] هم‌چنان وجود دارد برای حفظ مدار نیاز به انرژی داریم) بنابراین برای انتقال یك جرم (مثل ماهواره) از یك مدار به مدار دیگر نیاز به صرف انرژی وجود دارد. این مبحث تحت عنوان کلی مانورهای مداری[۴] مورد بررسی قرار می‌گیرد [۴۶].

---

[۱] Orbit of motion
[۲] Two body problem
[۳] Aerodynamic drag
[۴] Orbital maneuvers

مراکزی در سطح دنیا وجود دارند که اجرام را در مدار زمین رصد می‌کنند. بیشتر این اشیا، زباله‌های فضایی هستند که تهدیدی برای فضاپیماهای دیگر به شمار می‌آیند که شامل فضاپیماهای حامل سرنشین نیز می‌شود بدین صورت که ممکن است به هم برخورد نمایند. مراکز این اجسام را به چندین دلیل دنبال می‌کنند. یکی از آن دلایل این است که زمانی را که ممکن است برخوردی رخ دهد پیش‌بینی کنند و با حرکتی سریع از این تصادم جلوگیری نمایند.

معادله اغتشاشی که در این پایان‌نامه به حل آن پرداخته شده است به صورت زیر می‌باشد:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{|\vec{r}|^{۳}}\vec{r} + \vec{a_g}.$$

که در آن $\ddot{\vec{r}}$ بردار شتاب، $\vec{r}$ بردار موقعیت ماهواره، GM حاصل‌ضرب ثابت جاذبه در جرم زمین و a_g بردار شتاب اغتشاشی گرانش زمین است. معادله مسیر حرکت ماهواره معادله دیفرانسیلی مرتبه دوم برداری و سه بعدی است پس به ازای هر بردار، سه مختصه خواهیم داشت و در نهایت به منظور حل معادله شش مختصه موقعیت و سرعت ماهواره در یك دستگاه مورد نیاز است. حال این معادله دیفرانسیل مرتبه دوم بایستی به دو دسته معادله سرعت و موقعیت تقسیم شود تا بتوان برخی از روش‌های عددی را برای حل آن به‌کار گرفت.

ملک و شکاری در مراجع [۳۶، ۲] برای حل معادلات دیفرانسیل از یک روش ترکیبی استفاده نموده‌اند که بر اساس روش‌های شبکه عصبی مصنوعی، تکنیک‌های مینیمم سازی و روش‌های هم محلی[۵] است. در این پایان‌نامه نیز مسئله مذکور را با استفاده از این روش البته با تغییراتی در آن، از جمله تغییر در روش مینیمم‌سازی، حل نمودیم و حداکثر خطایی که در کل بازه بدست آوردیم $۱۰^{-۲۰}$ است.

در فصل ۱ تاریخچه و تعاریف اولیه‌ای در مورد مسئله دو جسم ارائه می‌شود، همچنین برای حل مسئله دو جسم اغتشاشی روش‌های اویلر[۶]، هیون[۷]، رونگه-کوتا[۸] مرتبه ۲ (RK۲)، رونگه-کوتا مرتبه ۴ (RK۴)، رونگه-کوتا مرتبه ۵ (RK۵)، و رونگه-کوتا مرتبه۸ (RK۸)، را به کار بردیم که ابتدا هر معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را به دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل می‌کنیم و سپس

[۵] Collocation
[۶] Euler
[۷] Heun
[۸] Runge-Kutta

با افزودن شرایط اولیه، کل دستگاه که متشکل از شش معادله دیفرانسیل مرتبه اول می‌شود را حل نموده‌ایم و نتایج را با رونگه- کوتا- فلبرگ[۹] ۷۸ (RKF۷۸)، حاصل از نرم‌افزار $STK^{©}$ [۱۷]، مقایسه کرده‌ایم. نتایج نشان می‌دهد که حداکثر خطای مورد نظر حدود ۲۸۶ متر است.

فصل ۲ به توضیحاتی در رابطه با شبکه‌های عصبی طبیعی و مصنوعی، انواع شبکه‌های عصبی مصنوعی، یادگیری و کابرد شبکه‌های عصبی مصنوعی و نیز مزایا و محدودیت استفاده از روش شبکه‌های عصبی مصنوعی اختصاص دارد.

در فصل ۳ چگونگی مدل‌سازی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم با مقدار اولیه با استفاده از شبکه عصبی بیان می‌شود.

در فصل‌های ۴ و ۵ مسئله را بدون اغتشاش و با اغتشاش، با استفاده از روش شبکه‌های عصبی حل نموده‌ایم و نتایج بدست آمده را به ترتیب با جواب تحلیلی و جواب رونگه- کوتا- فلبرگ۷۸ حاصل از نرم‌افزار $STK^{©}$، مقایسه کرده‌ایم. نتایج نشان می‌دهد که حداکثر خطای بدست آمده ۲۲ متر و ۱۲۷ متر به ترتیب برای مسئله بدون اغتشاش و با اغتشاش بوده است. در انتهای فصل ۵ به نتیجه‌گیری کلی و پیشنهادات پرداخته‌ایم.

مقالات اصلی که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار گرفته است مقالات آقایان دکتر علاءالدین ملک و دکتر رضا شکاری بیدختی می‌باشند [۳۶، ۲].

[۹] Runge-Kutta-Fehlberg

فهرست مطالب

۱ تعاریف مقدماتی **۱**

۱.۱ تاریخچه ۲

۲.۱ ماهواره‌ها ۴

۳.۱ دستگاه‌ها ۶

۱.۳.۱ دستگاه مرجع ۶

۲.۳.۱ دستگاه لخت ۷

۴.۱ نیروی جاذبه ۷

۵.۱ معادله حرکت ۸

۶.۱ نیروهای اغتشاشی ۱۰

۷.۱ معادله مسیر حرکت ماهواره ۱۲

۸.۱ حل معادله اغتشاشی مسیر حرکت ماهواره ۱۴

۲ شبکه‌های عصبی **۲۵**

۱.۲ مفاهیم اولیه ۲۶

۲.۲ مدل ریاضی نرون ۳۰

۳.۲ یادگیری در شبکه‌های عصبی ۳۳

۴.۲ انواع شبکه‌های عصبی ۳۵

۵.۲ پرسپترون ۳۶
۶.۲ الگوریتم پس انتشار خطا ۴۱
۷.۲ مزایا و محدودیت‌ها ۴۲

۳ کاربرد شبکه‌های عصبی در حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی ۴۴
۱.۳ مقدمه ۴۵
۲.۳ حل عددی با استفاده از روش شبکه عصبی ۴۵
۳.۳ توصیف ریاضی روش ۴۷
۴.۳ دستگاه معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه ۴۹

۴ حل عددی معادله مسیر حرکت ماهواره با استفاده از شبکه عصبی ۵۲
۱.۴ حل عددی روش ۵۳

۵ حل عددی معادله اغتشاشی مسیر حرکت ماهواره با استفاده از شبکه عصبی ۶۳
۱.۵ حل عددی روش ۶۴
۲.۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادات ۷۴

فهرست تصاویر

۱.۱ کپلر نشان داد که مقدار زمان حرکت سیاره از نقطه A به B با مقدار زمان حرکتش از C به D به یک اندازه است [۱۵]. ۳

۲.۱ کانون‌های اشغال شده و اشغال نشده [۴۶]. ۸

۳.۱ نمایش مسیر حرکت ماهواره با روش اویلر و رونگه-کوتا-فلبرگ۷۸. . . . . ۲۰

۴.۱ نمایش مسیر حرکت ماهواره با روش هیون و رونگه-کوتا-فلبرگ۷۸. . . . . ۲۰

۵.۱ نمایش مسیر حرکت ماهواره با روش رونگه-کوتا۲ و رونگه-کوتا-فلبرگ۷۸. . . . . ۲۱

۶.۱ نمایش مسیر حرکت ماهواره با روش رونگه-کوتا۴ و رونگه-کوتا-فلبرگ۷۸. . . . . ۲۱

۷.۱ نمایش مسیر حرکت ماهواره با روش رونگه-کوتا۵ و رونگه-کوتا-فلبرگ۷۸. . . . . ۲۲

۸.۱ نمایش مسیر حرکت ماهواره با روش رونگه-کوتا۸ و رونگه-کوتا-فلبرگ۷۸. . . . . ۲۲

۱.۲ نمایش نرون بیولوژیکی [۱۸]. ۲۷

۲.۲ نمایش مدل ریاضی نرون عصبی [۱۶]. ۳۰

۳.۲ نمایش مدل ریاضی شبکه عصبی مورد استفاده برای مسائل این پایان‌نامه. ۳۳

۴.۲ شبکه عصبی سه لایه و پیشخور قضیه تقریب سایبنکو. ۴۰

۱.۴ روند همگرایی ضرایب وزنی ورودی طی دوره‌های متوالی فرایند یادگیری. ۵۸

۲.۴ روند همگرایی ضرایب وزنی خروجی طی دوره‌های متوالی فرایند یادگیری. ۵۸

۳.۴ روند همگرایی بایاس‌ها طی دوره‌های متوالی فرایند یادگیری. ۵۹

۴.۴ نمایش جواب‌های تحلیلی و جواب‌های تقریبی شبکه عصبی در معادله دو جسم. . . . ۶۰

۱.۵ روند همگرایی ضرایب وزنی ورودی طی دوره‌های متوالی فرایند یادگیری. ۶۹

۲.۵ روند همگرایی ضرایب وزنی خروجی طی دوره‌های متوالی فرایند یادگیری. ۶۹

۳.۵ روند همگرایی بایاس‌ها طی دوره‌های متوالی فرایند یادگیری. ۷۰

۴.۵ نمایش جواب‌های RKF۷۸ و جواب‌های تقریبی شبکه عصبی در معادله دو جسم اغتشاشی. ۷۱

فهرست جداول

۱.۱ مقایسه تعدادی از روش‌های عددی برای حل معادله دو جسم. ۱۹

۲.۱ مقایسه تعدادی از روش‌های عددی برای حل معادله دو جسم اغتشاشی. . . . ۱۹

۳.۱ مقادیر نرم اقلیدسی بردار جواب بدست آمده (بر حسب Km) با روش تحلیلی و تعدادی از روش‌های عددی برای حل معادله دو جسم در چندین زمان مختلف. ۲۳

۴.۱ مقادیر نرم اقلیدسی بردار جواب بدست آمده (بر حسب Km) با روش RKF۷۸ و تعدادی از روش‌های عددی برای حل معادله دو جسم اغتشاشی در چندین زمان مختلف. ۲۴

۱.۲ توابع تحریک با علائم قراردادی [۴۹]. ۳۲

۱.۴ خطای حاصل از مینیمم نمودن معادله (۵.۴)با طول گام‌های مختلف طی چند دوره یادگیری. ۵۷

۲.۴ مقایسه خطای بدست آمده (بر حسب Km) از روش تحلیلی و مقادیر محاسبه شده با استفاده از شبکه عصبی در دوره‌های مختلف فرایند یادگیری در تعدادی از زمان‌ها با طول گام ۱. . . . . ۵۹

۳.۴ مقادیر نرم اقلیدسی بردار جواب بدست آمده (بر حسب Km) با روش تحلیلی و روش شبکه عصبی برای حل معادله دو جسم در چندین زمان مختلف. ۶۲

۱.۵ خطای حاصل از مینیمم نمودن معادله (۵.۵)با طول گام‌های مختلف طی چند دوره یادگیری. ۶۸

۲.۵ مقایسه خطای بدست آمده (بر حسب Km) از روش RKF۷۸ و مقادیر محاسبه شده با استفاده از شبکه عصبی در دوره‌های مختلف فرایند یادگیری در تعدادی از زمان‌ها با طول گام۲. . . . . ۷۰
۳.۵ مقادیر نرم اقلیدسی بردار جواب به دست آمده (بر حسب Km) با روش RKF۷۸ و روش شبکه عصبی برای حل معادله دو جسم اغتشاشی در چندین زمان مختلف. . . . ۷۳

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

با توجه به موضوع پایان‌نامه، در این فصل به عنوان مقدمه و مدخلی به مباحث اصلی آن، به تاریخچه‌ای در مورد حل مسئله دو جسم و دو جسم اغتشاشی، نکاتی چند پیرامون تعاریف اولیه و چگونگی بدست آمدن معادله اغتشاشی مسیر حرکت ماهواره و همچنین تعدادی از روش‌های حل آن، پرداخته می‌شود.

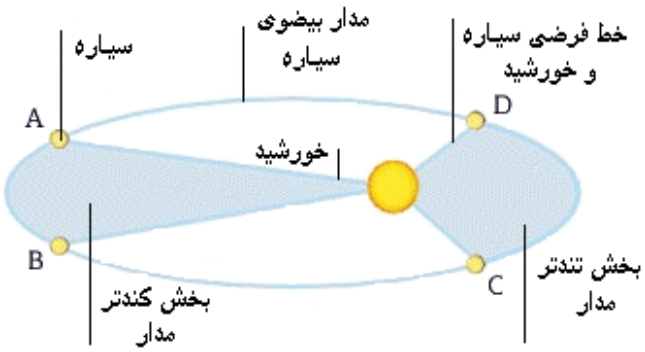
۱.۱ تاریخچه

در قرن شانزدهم نیکولا کپرنیک[۱] (۱۵۴۳-۱۴۷۳)، ستاره شناس لهستانی با مدل زمین مرکزی منظومه شمسی که در آن زمان رایج بود مخالفت کرد و مدل نوینی به نام مدل خورشید مرکزی را مطرح نمود، مدلی که امروزه مورد استفاده قرار می‌دهیم؛ خورشید در مرکز زمین و سیارات بر روی دوایری در حال گردش به دور آن می‌باشند. وی پایه گذار اخترشناسی جدید است [۵۰].

تیکو براهه[۲] (۱۶۰۱-۱۵۴۶)، یک اشراف زاده دانمارکی بود که بسیار دقیق، دارای هوش استثنایی در مکانیک و تهی از توانایی‌های ریاضی و نظریه‌پردازی تئوری بود و داده‌های دقیق در مورد موقعیت سیارات را جمع آوری می‌نمود [۵۰، ۳۳].

یوهانس کپلر[۳] (۱۶۳۰-۱۵۷۱)، ستاره شناس آلمانی فقیر و رنجور، صبور و دارای ادراک ریاضی ذاتی لازم برای گشودن و آشکار نمودن رازهای پنهان در مورد داده‌های براهه بود. او با استفاده از مدل خورشید مرکزی کپرنیک و مشاهدات براهه به ضرورت وجود مدارهای سیاره‌ای بیضی شکل پی برد. وی با بررسی حرکت سیارات به دور خورشید سه قانون عمومی حاکم بر حرکت سیارات را در سال ۱۶۰۹ و ۱۶۱۹ ارائه نمود. این قوانین بر اساس مشاهدات و رصد حرکت اجرام سماوی به دور خورشید حاصل شده بود و جنبه‌ی تجربی داشت. همچنین او نشان داد که چگونه زمان گردش سیاره در مدار خورشید (دوره تناوب مداری) با فاصله افزایش می‌یابد (به بیانی ساده‌تر، زمانی که سیاره به خورشید نزدیکتر می‌شود، سریعتر حرکت می‌کند). این کشفها به قوانین حرکت سیاره‌ای کپلر معروف شدند [۳۹، ۵۲].

[۱] Nicholas Copernic
[۲] Tycho Brahe
[۳] Johannes Kepler



شکل ۱.۱: کپلر نشان داد که مقدار زمان حرکت سیاره از نقطه A به B با مقدار زمان حرکتش از C به D به یک اندازه است [۱۵].

قوانین کپلر

سه قانون حرکت سیارات منظومه شمسی که توسط کپلر ارائه شد عبارتند از (شکل ۱.۱):

۱. هر سیاره در مسیر بیضی در اطراف خورشید حرکت می‌کند، که خورشید در یکی از کانونهای آن قرار دارد.

۲. بردار موقعیت بین خورشید و سیاره مساحتهای مساوی را در فواصل زمانی مساوی جاروب می‌کند.

۳. مربع دوره تناوب مداری یک سیاره متناسب با مکعب نصف قطر بزرگ بیضی است.

این قوانین زمینه را برای کشف عظیم آیزاك نیوتن[۴] تحت عنوان گرانش آماده نمود [۳۹].

در سال ۱۶۶۶ این نابغه ۲۳ ساله قوانین عمومی حاکم بر حرکت را ارائه نمود. وی همچنین قانون گرانش عمومی را کشف کرد با این توضیح که هر دو جسم یکدیگر را با نیروی نسبی جذب می‌کنند که با حاصل ضرب جرم دو جسم نسبت مستقیم و با فاصله دو جسم نسبت معکوس دارد و

[۴] Isaac Newton

به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\vec{F_g} = -\frac{GMm}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \qquad (۱.۱)$$

که در آن F نیروی وارد شده از جرم M به m، r بردار فاصله مابین M و m و G ثابت گرانش جهانی است. نیوتن توانست حرکت سیاراتی را که کپلر بر اساس رصدهای براهه، به‌صورت بیضی شکل تشریح کرده بود به کمک قوانین خود استنتاج نماید [۲۱، ۵۲].

معادله (۱.۱) حالتی از مسئله دو جسم می‌باشد که تلاش‌های فراوانی برای حل آن صورت گرفته است اما در نهایت به نتیجه رسیدند مسیری که با استفاده از حل مسئله دو جسم به دست می‌آید با مسیر واقعی متفاوت است چرا که نیروهای اغتشاشی در آن لحاظ نشده است.

مسئله دو جسم اغتشاشی توسط افراد زیادی مورد بررسی و حل قرار گرفته است. از جمله این افراد می‌توان به کلارینت[۵]، آدامز[۶] و لوریر[۷] اشاره نمود [۵۰].

این مسئله با روش‌های عددی مختلفی از جمله رونگه- کوتا ،[۸] اشتورمر- کول[۹] و آدامز، انتگرال‌های تک گامی آدامز- بشفورث- مولتون[۱۰] و شامپاین- گوردن[۱۱] حل و بررسی شده است [۳۰]. در ادامه روش‌هایی که به حل معادله دو جسم پرداخته‌اند مرور می‌گردند و در انتهای فصل به مقایسه و بررسی تعدادی از این روش‌ها پرداخته می‌شود.

۲.۱ ماهواره‌ها

انواع ماهواره‌های مصنوعی (قمرها) طبق مأموریتشان طبقه‌بندی می‌شوند. شش نوع اصلی از ماهواره‌های مصنوعی وجود دارند که عبارتند از [۴۶]:

۱. تحقیقاتی

این ماهواره‌ها اکثراً برای بررسی و اندازه‌گیری خواص مختلف در فضا مورد استفاده قرار

[۵] Clairant
[۶] Adams
[۷] Leverrier
[۸] Runge-Kutta
[۹] Stormer-Cowell
[۱۰] Adams-Bashforth-Moulton
[۱۱] Shampine-Gordon

می‌گیرند خواصی مانند میدانهای مغناطیسی، تشعشعات کیهانی و مشخصه‌های اجرام فضایی که از زمین اندازه‌گیری آنها مقدور نیست. مطالعه انتشار امواج از خورشید و امواج نوری و رادیویی از ستارگان دور و از اتمسفر زمین نمونه‌های این تحقیقات هستند. بیشتر این ماهواره‌ها در مدارهای با ارتفاع پایین کار می‌کنند.

۲. هواشناسی

دسته دوم از ماهواره‌ها ماهواره‌هایی هستند که برای مطالعات جوی و هواشناسی بکار برده می‌شوند و بوسیله داده‌های آنها نظیر موقعیت ابرها و غیره، وضعیت هوا برای آینده پیش‌بینی می‌شود.

۳. مخابراتی

ماهواره‌های مخابراتی برای ارتباطات رادیویی، تلویزیونی و اینترنتی و کلاً ارتباطات مخابراتی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۴. هدایت و ناوبری

این ماهواره‌ها برای تعیین موقعیت و کمك به هدایت و ناوبری وسایل نقلیه هوایی، دریایی و زمینی مورد استفاده قرار می‌گیرند و با تجاری شدن این ماهواره‌ها افراد بطور شخصی نیز از این قابلیت می‌توانند استفاده نمایند.

۵. شناسایی

همانطور که از نام این ماهواره‌ها پیداست این دسته توسط سنسورهای مختلف اطلاعات گوناگونی را از زمین دریافت و به مراکز کنترل ارسال می‌نمایند. این اطلاعات بطور مثال می‌تواند تصاویر با طیف نوری و یا مادون قرمز و حتی اطلاعات راداری باشد. ماهواره‌های شناسایی استفاده‌های گسترده‌ای دارند و درجاهای مختلف از جمله زمین‌شناسی، کشاورزی، منابع آبی، بررسی بلاهای طبیعی، نقشه‌برداری، حفاظت از محیط زیست و ... از آنها استفاده می‌شود.

۶. نظامی

این ماهواره‌ها می‌توانند نقشه‌های جاسوسی، دفاعی و حتی حمله را بر عهده بگیرند. استفاده‌هایی مثل دریافت و شنود اطلاعات و مکالمات اهداف نظامی، شناسایی حملات موشکی، شناسایی مراکز نظامی، هدایت نیروها، ایجاد اغتشاش در ارتباطات دشمن و حتی حمله به اهداف زمینی و یا حتی فضایی دشمن از جمله کاربردهای ماهواره‌های نظامی هستند. البته اطلاعات زیادی از این ماهواره‌ها در دنیا منتشر نمی‌شود.

۳.۱ دستگاه‌ها

می‌دانیم حرکت امری نسبی است، یعنی سرعت و شتاب اجسام نسبت به دستگاههای مختصات مختلف متفاوت است. به عنوان مثال یک اتومبیل را که با شتاب به راه می‌افتد در نظر بگیرید حرکت مسافر درون این اتومبیل نسبت به دستگاه مختصات متصل به جاده شتابدار است، اما همین مسافر نسبت به دستگاه مختصات که به خود اتومبیل متصل باشد ساکن است، یعنی شتاب ندارد. اما شتابی که در رابطه $a = \frac{F}{m}$ برای جسم بدست می‌آید نسبت به کدام دستگاه مختصات است؟ یا برای تعیین نیروی وارد بر یک جسم، شتاب جسم نسبت به کدام دستگاه مختصات باید در نظر گرفته شود؟

۱.۳.۱ دستگاه مرجع

دستگاه مرجع یعنی محورهای مختصاتی که حرکت جسم نسبت به آنها سنجیده می‌شود، بدین معنی که ناظر روی مرکز این چهارچوب مختصات نشسته و حرکت جسم را مشاهده می‌نماید.