
بسم الله الرحمن الرحيم

بسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلي

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب سیدمحمدعلي طاهري تاري متعهد مي‌شوم که مطالب مندرج در این پایان‌نامه حاصل کار پژوهشي اینجانب است و دستاوردهاي پژوهشي دیگران که در این پژوهش از آن‌ها استفاده شده است، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع و مأخذ ذکر گردیده است. این پایان‌نامه/رساله قبلا براي احراز هیچ مدرك هم سطح یا بالاتر ارایه نشده است. در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرك تحصیلي صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

کلیه حقوق مادي و معنوي این اثر متعلق به دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایي مي‌باشد.

نام و نام‌خانوادگي دانشجو

امضاء

تهران- لویزان- کدپستي ۱۶۷۸۸- صندوق پستي ۱۶۳-۱۶۷۸۵ تلفن ۹-۲۲۹۷۰۰۶۰ (داخلي ۲۳۴۷)

نمابر ۲۲۹۷۰۰۱۱ پست الکترونیکي Sru @ sru.ac.ir

دانشکده علوم پایه

مشتق شوارتزي منفي و نتايج آن

نگارش:

سيد محمدعلي طاهري تاري

استاد راهنما: خانم دکتر منيره اکبري

استاد مشاور: خانم دکتر فرحبخش کمالي

پاياننامه براي دريافت درجه کارشناسي ارشد

در رشته رياضي محض

بهمن ماه ۱۳۸۹

چکیده

در اینجا می‌خواهیم نشان دهیم اگر $f: I \longrightarrow I$ یک نگاشت یک کوهانی[1] C^3 دارای یک نقطه بحرانی نامسطح باشد، شرط مشتق شوارتزی[2] منفی اضافی است.

همچنین در قضیه‌ای دیگر نشان خواهیم داد که برای هر نگاشت یک کوهانی C^3 روی یک بازه با یک نقطه بحرانی نامسطح، یک بازه حول مقدار بحرانی وجود دارد، بطوریکه نگاشت اولین ورود[3] به این بازه دارای مشتق شوارتزی منفی است و در نهایت برآوردی دیگر برای نسبت توافقی[4] بدست می‌آوریم.

کلمات کلیدی: نگاشت اولین ورود ، نسبت توافقی ، مشتق شوارتزی ، نگاشت یک کوهانی

---

[1]- unimodal map
[2]- Schwarzian derivative
[3]- first entry map
[4] - cross- ratio

فهرست مطالب

عنوان صفحه

بخش اول: مقدمه ۱-۳
بخش دوم: مشتق شوارتزي ۴-۸
بخش سوم: نسبت توافقي و ويژگي‌هاي آن ۹-۱۶
بخش چهارم: چگونه مي‌توان شرط مشتق شوارتزي منفي را حذف كرد ۱۷-۲۰
بخش پنجم: نتايج عدم وجود بازه‌هاي سرگردان ۲۱-۲۳
بخش ششم: بازگشت بالا، پايين و مركزي..................................... .... ۲۴-۲۵
بخش هفتم: توسيع شاخه‌ها ۲۶-۳۳
بخش هشتم: برآورد مشتقات نگاشت در نقاط مدار يك بازه ۳۴-۳۸
بخش نهم: مشتق شوارتزي نگاشت اولين ورود.............................. ۳۹-۴۲
بخش دهم: برآوردي براي نسبت توافقي......... ۴۳-۴۶
مراجع.............................. ۴۷-۴۸

بخش اول:

مقدمه

اکثر ریاضیدانها با مشتق شوارتزي برخورد داشته‌اند و یا با آن کار کرده‌اند. مشتق شوارتزی اولین بار در مقاله‌اي توسط لاگرانژ در سال ۱۷۸۱ مورد استفاده قرار گرفت همچنین این مفهوم در سال ۱۸۳۶ در مقاله‌اي از کومر[1] ظاهر شده است. اما در نهایت کیلي اولین بار فرمول مورد نظر را مشتق شوارتزي نامید و اولین بار توسط سینگر[2] در سال ۱۹۷۸ در مطالعه سیستمهاي دینامیکي یک بعدي مورد استفاده قرار گرفت[3] .

از جمله کاربردهاي مشتق شوارتزي در آنالیز مختلط و معادلات دیفرانسیل و سیستمهاي دینامیکي و .... مي‌توان نام برد.

در این پایان‌نامه مشتق شوارتزي براي مطالعه سیستم هاي دینامیکي یک بعدي استفاده می کنیم در واقع مشتق شوارتزي یک محک مناسب و کاربردي در توابع مختلط و سیستمهاي دینامیکي یک بعدي مي‌باشد.

---

1 - kumeer
2 - singer

در ادامه کاربردهایي از مشتق شوارتزي در سیستمهاي دینامیکي یك بعدي را بیان ميکنیم.

اگر f یك نگاشت با یك نقطه بحراني باشد براي این نگاشت ما نميتوانیم مرزی براي غیرخطي بودن آن مشخص کنیم بدین مفهوم که نميتوانیم با توجه به موقعیت نقطه بحراني یك بازه تعریف کنیم و بگوییم نگاشت در خارج از این بازه خطي است و در داخل بازه غیرخطي است[1].

بهرحال اگر این نگاشت داراي ویژگي اضافي باشد بهتر ميتواند مورد بررسي قرار گیرد، براي مثال مشتق شوارتزي نگاشت منفي باشد.

اگر نگاشت بالا با ویژگي مشخص شده وجود داشته باشد ميتوانیم بگوییم که نگاشت نسبت توافقي را افزایش ميدهد. این ویژگي به طور قطع براي تمام قضایاي زیادي که داراي مشتق شوارتزي منفي ميباشند مورد بررسي قرار ميگیرند.

در حالت کلي براي بررسي یك قضیه در نگاشتهاي بدون مشتق شوارتزي منفي، باید یك برآورد از طول بازههاي مدار داشته باشیم که بدست آوردن این برآورد طول بازههاي مدار همواره ساده نیست.

به علاوه باید به این نکته توجه داشت که فرض مشتق شوارتزي منفي یك فرض غیرطبیعي است و براي تمام نگاشتها نمي‌توان آن را مورد فرض قرار داد.

در واقع شرط مشتق شوارتزي منفي یك مفهوم دینامیکي نمي‌تواند داشته باشد و یك تغییر مناسب مي‌توان این خاصیت نگاشت را از بین ببرد[2].

هدف اصلي این پایان‌نامه این است که یك راه کلي مشخص کنیم که این راه ما را قادر مي‌سازد نگاشتهاي یك کوهاني را در حالتي که نقطه بحرانی نگاشت نا مسطح مي‌باشد مورد بررسي قرار دهیم. از طرفي دیگر نگاشتها با مشتق شوارتزي منفي داراي خاصیتهاي ویژه‌اي هستند که این خاصیتها در نگاشتهاي دیگر وجود ندارد، براي مثال: یك نگاشت یك کوهاني با مشتق شوارتزي منفي بیشتر از دو نقطه تناوبي جاذب ندارد، حال آنکه نگاشت یك کوهاني دلخواه مي‌تواند نقاط تناوبي جاذب زیادي داشته باشد و یا نگاشتهایي که مشتق شوارتزي آنها منفي مي باشد نسبت توافقي را افزایش مي‌دهند.

اولین بار شرط مشتق شوارتزي منفي براي نگاشتهای روي یك بازه به وسیله کیلي معرفي شد او ملاحظه کرد که اگر یك نگاشت f داراي مشتق شوارتزي منفي مي‌باشد، $|f'|$ مینیمم موضعي مثبت ندارد[1].

در سراسر این پایان نامه مراجع اصلی [1],[3]می باشند.ودر جایی که مرجع قید نشده باشد از این مرجع استفاده شده است.

بخش دوم :

مشتق شوارتزي

در این بخش فرض می‌کنیم I یک بازه و $f: \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ تابعی پیوسته است.

تعریف(۲-۱) : اگر f یک نگاشت $C^{۳}$ باشد و $f'(x_{\circ}) \neq \circ$ مشتق شوارتزی f در نقطه $x_{\circ}$ با $sf(x_{\circ})$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر بدست می‌آید.

$$sf(x_{\circ}) = \frac{f'''(x_{\circ})}{f'(x_{\circ})} - \frac{۳}{۲}\left(\frac{f''(x_{\circ})}{f'(x_{\circ})}\right)^{۲}$$

و برای تعریف بالا تعاریف معادل دیگری نیز وجود دارد که به مواردی از آن اشاره می‌کنیم [3] [1] ,[2].

$$sf(x_{\circ}) = (Lnf'(x_{\circ}))'' - \frac{۱}{۲}((Lnf'(x_{\circ}))^{۲}$$

$$sf(x_{\circ}) = \left(\frac{f''(x_{\circ})}{f'(x_{\circ})}\right)' - \frac{۱}{۲}\left(\frac{f''(x_{\circ})}{f'(x_{\circ})}\right)^{۲}$$

مثال (۲-۲) در زیر مشتق شوارتزی چند نگاشت را بدست آورده ایم.

الف) $f_{\lambda}(x) = \lambda \sin x$

$$Sf_{\lambda}(x) = \frac{-\lambda \cos x_{\circ}}{\lambda \cos x_{\circ}} - \frac{۳}{۲}\left(\frac{-\lambda \sin x_{\circ}}{\lambda \cos x_{\circ}}\right)^{۲} = -۱ - \frac{۳}{۲}\tan^{۲} x_{\circ}$$
$$= -(۱ + \frac{۳}{۲}\tan^{۲} x_{\circ}) < \circ$$

ب) $f_{\lambda}(x) = \lambda x(1-x)$

$$Sf_{\lambda}(x_{\circ}) = \frac{\circ}{\lambda - ۲\lambda x_{\circ}} - \frac{۳}{۲}\left(\frac{-۲\lambda}{\lambda - ۲\lambda x_{\circ}}\right)^{۲} = \frac{-۶}{(۱-۲x_{\circ})^{۲}} < \circ$$

ج) $f_\lambda(x)=\dfrac{\lambda}{x}$

$$Sf_\lambda(x)=\left(\frac{\frac{-6\lambda}{x^4}}{\frac{-\lambda}{x^2}}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{\frac{2\lambda}{x^3}}{\frac{-\lambda}{x^2}}\right)^2$$

$$=\frac{6}{x^2}-\frac{6}{x^2}=0$$

د) $f(x)=x^3+3x$

$$Sf(x_0)=\frac{6}{3x_0^2+3}-\frac{3}{2}\left(\frac{6x_0}{3x_0^2+3}\right)^2=\frac{2}{x_0^2+1}-\frac{6x_0^2}{\left(x_0^2+1\right)^2}=\frac{-4x_0^2+1}{\left(x_0^2+1\right)^2}$$

لم (۲-۳): اگر f و g دو نگاشت از بازه I به I با مشتق شوارتزي منفي باشند، مشتق شوارتزي تركيبشان نيز منفی است.

اثبات: با توجه به قاعده زنجیری در مشتق داریم:

$$(fog)'(x)=f'(g(x))\,g'(x)$$

$$(fog)''(x)=f''(g(x))(g'(x))^2+f'(g(x))\,g''(x)$$

$$(fog)'''(x)=f'''(g(x))(g'(x))^3+3f''(g(x))\,g''(x)\,g'(x)+f'(g(x))\,g'''(x)$$

با بكار بردن روابط بالا در مشتق شوارتزي داريم.

$$s(f\circ g)(x)=\frac{(f\circ g)'''(x)}{(f\circ g)'(x)}-\frac{3}{2}\left(\frac{(f\circ g)''(x)}{(f\circ g)'(x)}\right)^2$$

$$=\frac{f'''(g(x))(g'(x))^3+3f''(g(x))\,g''(x)\,g'(x)+f'(g(x))\,g'''(x)}{f'(g(x))\,g'(x)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(g(x))\,(g'(x))^2+f'(g(x))\,g''(x)}{f'(g(x))\,g'(x)}\right)^2$$

$$=\frac{f'''(g(x))(g'(x))^3}{f'(g(x))\,g'(x)}+3\frac{f''(g(x))\,g''(x)}{f'(g(x))}+\frac{g'''(x)}{g'(x)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(g(x)\,g'(x)}{f'(g(x))}\right)^2-3\frac{f''(g(x))\,g''(x)}{f'(g(x))}-\frac{3}{2}\left(\frac{g''(x)}{g'(x)}\right)^2$$

$$=\left(\frac{f'''(g(x))}{f'(g(x))}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(g(x)}{f'(g(x))}\right)^2\right)\left(g'(x)\right)^2+\frac{g'''(x)}{g'(x)}-\frac{3}{2}\left(\frac{g''(x)}{g'(x)}\right)^2$$

$$= Sf(g(x))\,(g'(x))^{۲} + Sg(x)$$

با توجه به فرض قضیه چون sf و sg منفي است نتیجه مي‌گیریم $sf \circ g$ نیز مقداري منفي است.

یك نتیجه مهم وكاربردي از قضیه بالا بدست مي‌آید، آن نتیجه این است كه اگر مشتق شوارتزي نگاشت f در یك نقطه منفي باشد براي هر $n > ۰$ مشتق شوارتزي f^n در آن نقطه عددي منفي است. پس اگر مشتق شوارتزي در یك نقطه منفي باشد مشتق شوارتزي مدار آن نیز منفي است.

لم (۲-۴): اگر $p(x)$ یك چند جمله اي باشد به طوریكه همه ریشه هاي $p'(x)$ حقیقي باشد، آنگاه $p(x) > ۰$ است.

اثبات: چون $p'(x)$ داراي ریشه هاي حقیقي است، در این صورت اگر a_i ریشه هاي $p'(x) = ۰$ باشد. آنگاه $p'(x)$ رامی توان به صورت $p'(x) = \prod_{i=۱}^{n} (x - a_i)$ نوشت. (n تعداد ریشه هاي $p'(x) = ۰$ مي‌باشد.)

پس داریم:

$$p''(x) = \sum_{j=۱}^{n} \frac{p'(x)}{x - a_j}$$

طبق تعریف مشتق شوارتزي داریم:

$$sp(x) = \left(\frac{p''(x)}{p'(x)}\right)' - \frac{۱}{۲}\left(\frac{p''(x)}{p'(x)}\right)^{۲}$$

$$= \left(\frac{\sum_{j=۱}^{n} \frac{p'(x)}{x-a_j}}{p'(x)}\right)' - \frac{۱}{۲}\left(\frac{\sum_{j=۱}^{n} \frac{p'(x)}{x-a_j}}{p'(x)}\right)^{۲}$$

$$= \left(\sum_{j=۱}^{n} \frac{۱}{x-a_j}\right)' - \frac{۱}{۲}\left(\sum_{j=۱}^{n} \frac{۱}{x-a_j}\right)^{۲}$$

$$= \sum_{j=۱}^{n} \left(\frac{۱}{x-a_j}\right)' - \frac{۱}{۲}\left(\sum_{j=۱}^{n} \frac{۱}{x-a_j}\right)^{۲}$$

$$= -\sum_{j=۱}^{n} \frac{۱}{(x-a_j)^{۲}} - \frac{۱}{۲}\left(\sum_{j=۱}^{n} \frac{۱}{x-a_j}\right)^{۲}$$

$$=-[\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(x-a_j)^2}+\frac{1}{2}\sum(\frac{1}{x-a_j})^2]<0$$

لم (۲-۵): اگر مشتق شوارتزي نگاشت $f:I\to I$ منفي باشد نگاشت $g(x)=f'(x)$ $g(x)=f'(x)$ $g(x)=f'(x)$ داراي ماكزيمم موضعي منفي و مينيمم موضعي مثبت نيست.

اثبات: فرض كنيم $g(x)=f'(x)$ و x_0 يك نقطه بحراني $g(x)$ باشد. پس طبق خاصيت نقطه بحراني داريم $g'(x_0)=0$ و $g'(x_0)=f''(x_0)$ پس داريم $f''(x_0)=0$. طبق تعريف مشتق شوارتزي و نكته بالا پس $Sf(x_0)=\frac{f'''(x_0)}{f'(x_0)}$. چون مشتق شوارتزي f منفي است در نتيجه $\frac{f'''(x_0)}{f'(x_0)}$ منفي است. يعني $f'''(x_0),f'(x_0)$ مختلف العلامه مي‌باشند. يعني اگر $f'''(x_0)$ منفي باشد $f'(x_0)$ مثبت باشد و در اين حالت چون $f'''(x_0)$ منفي است تقعر منحني $g(x)=f'(x)$ به سمت پايين مي‌باشد در نتيجه x_0ماكزيمم موضعي است. و يا اگر $f'''(x_0)$ مثبت باشد $f'(x_0)$ منفي است و در اين حالت تقعر منحني $g(x)$ به سمت بالاست پس x_0مينيمم موضعي است.

لم (۲-۶): فرض كنيد T يك بازه بسته با نقاط انتهايي a و b باشد و $f:T\to R$ يك نگاشت با مشتق شوارتزي منفي، اگر براي هر $x_0\in T$ و $f'(x_0)\neq 0$ باشد آنگاه براي هر $x\in(a,b)$, $|f'(x)|>\min\{|f'(a)|,|f'(b)|\}$ مي‌باشد.

اثبات: طبق فرض $f'(x_0)\neq 0$ پس $f'(x_0)>0$ و يا $f'(x_0)<0$.

اگر $f'(x_0)>0$ باشد چون f مينيمم موضعي مثبت ندارد در نتيجه به ازاي هر $x\in(a,b)$, $f'(x)>\min\{f'(a),f'(b)\}$. اگر $f'(x_0)<0$ باشد چون f داراي ماكزيمم موضعي منفي نيست در نتيجه به ازاي هر $x\in(a,b)$, $f'(x)<\max\{f'(a),f'(b)\}$ و اين بدين معناست كه [2]:

$$|f'(x)|>\min\{|f'(a)|,|f'(b)|\}$$

لم (۲-۷): اگر P يك نقطه بحراني نامسطح[1] براي نگاشت f باشد آنگاه يك همسايگي W حول نقطه P وجود دارد به طوريكه براي هر $x\in W-\{P\}$ مشتق شوارتزي $f(x)$منفي است.

اثبات اين قضيه را مي‌توان در بخش ۹ قضيه (الف)مشاهده كرد.

---

[1] - non- flat

بخش سوم :

نسبت توافقي و ويژگي‌هاي آن

براي نسبت توافقي چندين تعريف وجود دارد كه كم بيش سودمند مي‌باشند ولي ما در اينجا شكل استاندارد را مورد استفاده قرار مي‌دهيم، كه طبق رابطه زير تعريف مي‌شود.

تعريف (۳-۱): اگر M يك بازه بسته و J يك بازه كه $J\subset M$ باشد و M^{+} ، M^{-} مولفه هاي همبندی $M-J$ باشد در اينصورت داريم.

$$a(M,J)=\frac{|M||J|}{|M^{-}\cup J||M^{+}\cup J|}$$

و يك نسبت توافقي مفيد ديگر به صورت زير تعريف مي‌شود.

$$b(M,J)=\frac{|M||J|}{|M^{-}||M^{+}|}$$

كه در اينجا M^{+} و M^{-} همان مولفه هاي همبندي $M-J$ مي‌باشد.

در صورتيكه f يك نگاشت پيوسته و يكنوا روي يك بازه باشد و بخواهيم بررسي كنيم كه اين نگاشت نسبت توافقي را چگونه تغيير مي‌دهد از نماد گذاري زير استفاده مي‌كنيم.

$$A(f,M,J)=\frac{a(f(M),f(J))}{a(M,J)}$$

$$B(f,M,J)=\frac{b(f(M),f(J))}{b(M,J)}$$

با توجه به تعريف بالا اگر نسبتهاي بدست آمده كمتر از يك شود اين نشان مي‌دهد كه نگاشت f نسبت توافقي را كاهش مي‌دهد و اگر بيشتر از يك شود افزايش و در غير اين صورت نسبت توافقي تحت ثابت مي‌ماند.

تعريف (۳-۲): $f:R\longrightarrow R$ يك تبديل موبيوس ناميده مي‌شود هرگاه $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ كه در آن $a,b,c,d,x\in R$ و $ad-bc\neq 0$ باشد[8].

لم (۳-۳): اگر f روي T و g روي $f(T)$ يكنوا باشد در اينصورت داريم:

الف) $B(gof, T, J) = B(g, f(T), f(J)) \times B(f, T, J)$

ب) $A(gof, T, J) = A(g, f(T), f(J) \times A(f, T, J)$

اثبات الف: براي اثبات ابتدا نسبتهاي سمت راست را در نظر ميگيريد و تعريف را برايشان مينويسيم.

$$B(g, f(T), f(J)) \times B(f, T, J) = \frac{b(g(f(T)), g(f(J))}{b(f(T), f(J)} \times \frac{b(f(T), f(J))}{b(T, J)} =$$

$$= \frac{b(g(f(T)), g(f(J))}{b(T, J)} = \frac{b(gof(T), gof(J))}{b(T, J)} =$$
$$= B(gof, T, J)$$

قسمت ب مشابه قسمت الف ثابت ميشود.

در ادامه سه ويژگي كاربردي و مهم تبديلهاي موبيوس را مورد بررسي قرار ميدهيم.

لم (۳-۴): اگر ϕيك تبديل موبيوس دلخواه باشد. مشتق شوارتزي ϕ برابر صفر است.

اثبات: فرض كنيد $\phi(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ يك تبديل موبيوس دلخواه باشد.

$$S\phi(x) = \frac{\phi'''(x)}{\phi'(x)} - \frac{۳}{۲}\left(\frac{\phi''(x)}{\phi'(x)}\right)^{۲}$$
$$= \frac{\frac{۶c^{۲}(ad-bc)}{(cx+d)^{۴}}}{\frac{ad-bc}{(cx+d)^{۲}}} - \frac{۳}{۲}\left(\frac{\frac{-۲c(ad-bc)}{(cx+d)^{۳}}}{\frac{ad-bc}{(cx+d)^{۲}}}\right)$$

$$= \frac{۶c^{۲}}{(cx+d)^{۲}} - \frac{۶c^{۲}}{(cx+d)^{۲}} = ۰$$

پس ميتوان نتيجه گرفت $S\phi(x)$برابر صفر است.

لم (۳-۵): اگر مشتق شوارتزي نگاشت f روي w منفي باشدو ϕ,ψ دو تبديل موبيوس دلخواه در اين صورت $S(\phi o f o \psi)$ روي $\psi^{-1}(w)$ منفي است.

اثبات: طبق تعريف مشتق شوارتزي تركيب تابع داريم

$$S(\phi o f o \psi(x)) = S\phi o f(\psi(x))\ (\psi'(x))^{2} + S\psi(x)$$

چون $S\psi(x)=0$ داريم:

$$S(\phi o f o \psi(x)) = S\phi o f(\psi(x)) \times (\psi'(x))^{2}$$
$$= [S\phi(f(\psi(x)) \times (f'(\psi(x)))^{2} + sf(\psi(x))](\psi'(x))^{2}$$

و چون ϕ نيز يك تبديل موبيوس مي‌باشد پس $S\phi=0$ در نتيجه داريم:

$$S(\phi o f o \psi(x)) = Sf(\psi(x)) \times (\psi'(x))^{2}$$

و اين رابطه همواره منفي است.

لم (۳-۶): اگر ϕ يك تبديل موبيوس يكنوا روي $T\subset R$ باشد و $J\subset T$ يك بازه باشد.

آنگاه:

$$B(\phi,T,J)=1$$
$$A(\phi,T,J)=1$$

لم (۳-۷): اگر f يك نگاشت C^{3} با مشتق شوارتزي منفي باشد و M يك بازه به طوريكه $f|_{M}$ يك وابرنختي است در اينصورت براي هر زير بازه $J\subset M$ داريم.

$$A(f,M,J)\geq 1$$
$$B(f,M,J)\geq 1$$

اثبات: سه نقطه دلخواه $x<y<z$ در بازه $(-\infty\ ,\ +\infty)$ وجود دارند به طوريكه براي اين سه نقطه دلخواه تبديل موبيوس منحصر بفرد ϕ مي‌توان پيدا كرد به طوريكه $\phi(x)=0\ ,\ \phi(y)=1, \phi(z)=\infty$. بنابراين يك تبديل موبيوس ϕ مي‌توان بدست آورد به طوريكه اين تبديل يك وابرنختي از بازه بسته M به روي $x\in[0,1]$ باشد.

تبديل موبيوس $\phi_{\lambda}(x)$ را مي‌توان از بازه $[0,1]$ به روي بازه $[0,1]$ به ترتيب زير مي‌توان ساخت. $\phi_{\lambda}(x)=\dfrac{x}{\lambda x+1-\lambda}$. براي هر $x\in[0,1]$ داريم:

$\phi_{\lambda}(x)\longrightarrow 1$ زماني كه $\lambda\longrightarrow 1$ ميل كند و $\phi_{\lambda}(x)\longrightarrow 0$ زماني كه $\lambda\to\infty$ ميل كند. بنابراين براي هر $\alpha,\alpha'\in[0,1]$ يك λ منحصر بفرد وجود دارد به طوريكه $\phi_{\lambda}(\alpha')=\alpha$.

چون ترکیب با تبدیل موبیوس نسبت توافقي و مشتق شوارتزي را حفظ مي‌کند، مي‌توانيم فرض کنيم $M=[\circ,\text{۱}]$ و f يك نگاشت جهت نگهدار از بازه M به روي M است و M^- را به M^- مي نگارد و مي‌توانيم قرار دهيم $M^-=[\circ,\alpha], J=[\alpha,\beta]$

ما داريم $f(\circ)=\circ$, $f(\alpha)=\alpha$, $f(\text{۱})=\text{۱}$. چون f در بازه $[\circ,\text{۱}]$ داراي مشتق شوارتزي منفي است پس داراي نقطه ثابت ديگري نيست. ادعا مي‌کنيم براي هر $x\in(\alpha,\text{۱})$, $f(x)>x$.

برهان خلف فرض مي‌کنيم چنين نباشد چون f در بازه $[\alpha,\text{۱}]$ نقطه ثابت ندارد پس براي هر $x\in(\alpha,\text{۱})$, $f(x)<x$ مي‌باشد و اين نشان مي‌دهد که:

$$f'(\text{۱})=\lim_{x\longrightarrow \text{۱}}\frac{f(x)-f(\text{۱})}{x-\text{۱}}=\lim_{x\longrightarrow \text{۱}}\frac{f(x)-\text{۱}}{x-\text{۱}}\geq \text{۱}$$

$$f'(\alpha)=\lim_{x\longrightarrow \alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\longrightarrow \alpha^+}\frac{f(x)-\alpha}{x-\alpha}\leq \text{۱}$$

و اگر براي هر $x\in(\circ,\alpha)$, $f(x)>x$ باشد مي‌توان همانند بالا نتيجه گرفت که $f'(\circ)\geq\text{۱}$ و $f'(\alpha)$ به طور اکيد از $\min\{f'(\circ),f'(\text{۱})\}$ بزرگتر نمي‌باشد و اين با شرط منفي بودن مشتق شوارتزي در تناقض است.

و اگر براي هر $x\in(\circ,\alpha)$, $f(x)<x$ مي‌توان نتيجه گرفت که $f'(\alpha)=\text{۱}$ و يك $x\in(\alpha,\text{۱})$ وجود دارد به طوريکه $f'(x)\leq\text{۱}$ پس $f'(x)$ به طور اکيد از $\min\{f'(\alpha),f'(\text{۱})\}$ بزرگتر نيست. که دوباره با شرط منفي بودن مشتق شوارتزي به تناقض مي‌رسيم.

و چون f در بازه $(\circ,\alpha)$ نقطه ثابت ندارد، اين دو حالت تنها حالات ممکنه هستند و ادعا با برهان خلف به اثبات مي‌رسد.

پس داريم:

چون $f(\beta)>\beta$ و با توجه به شکل (۳-۱) داريم[3]:

$$A(f,M,J)=\frac{\frac{\text{۱}}{\text{۱}}\cdot\frac{f(\beta)-\alpha}{\beta-\alpha}}{\frac{\text{۱}-\alpha}{\text{۱}-\alpha}\cdot\frac{f(\beta)}{\beta}}>\text{۱}$$