



دانشگاه پیام نور

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته فیزیک

دانشکده علوم پایه

گروه علمی فیزیک

عنوان پایان نامه:

مطالعه چرخنده ضربه ای کوانتومی تعمیم یافته

استاد راهنما:

دکتر عبدالرسول قرائتی

استاد مشاور:

دکتر رضا خرداد

نگارش:

حسین برومندی

بهمن ۱۳۸۸



دانشگاه پیام نور بسمه تعالی

تصویب پایان نامه / رساله

پایان نامه تحت عنوان : مطالعه چرخنده ضربه ای کوانتومی تعمیم یافته

که توسط حسین برومندی در مرکز شیراز تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأیید می

باشد. تاریخ دفاع: ۱۳۸۸/۱۱/۱۱ نمره: -/۱۹ درجه ارزشیابی: عالی

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی هیأت داوران مرتبه علمی

امضاء

۱- دکتر عبدالرسول قرائتی جهرمی استاد راهنما دانشیار

۲- دکتر رضا خرداد استاد مشاور استادیار

۳- دکتر مرتضی محسنی استاد داور دانشیار

۴- سرکار خانم دکتر الهام اسراری نماینده تحصیلات تکمیلی استادیار

تشکر و تقدیر

سپاس بی پایان، پروردگاری را که به انسان نیروی اندیشه و بیان، عطا فرمود تا بتوانیم به رهبری آن و به یاری حکمت، اندیشه خود را بارور ساخته، ذهن خویش را روشن سازیم و هر چه بیشتر به رموز هستی و قدرت صنعتش پی ببریم و چون پویندگان راستین راه حق در تعظیم و تکریمش بکوشیم.

در آغاز لازم می دانم از زحمات پدر و مادر گرامی ام و کلیه کسانی که در دوران تحصیل همواره مشوق و پشتیبان اینجانب بوده اند کمال تشکر را بنمایم. همچنین از زحمات اساتید محترم و دانشجویان صمیمی و مهربان دانشگاه پیام نور شیراز و به خصوص اساتید ارجمند بخش فیزیک جناب دکتر عبدالرسول قرائتی، عضو هیئت علمی و مدیر گروه بخش فیزیک دانشگاه و دکتر رضا خرداد که با راهنمایی های مختلف خود در راستای انجام این پایان نامه در طول یک سال گذشته راهگشای اینجانب بوده اند کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم.

چکیده

مطالعه چرخنده ضربه ای کوانتومی تعمیم یافته

بوسیله

حسین برومندی

در این پایان نامه مدل چرخنده ضربه ای تعمیم یافته ای را که حالت کلاسیکی آن تحت شرایطی آشوبناک می شود مورد بررسی قرار می دهیم. مدلی را که در نظر می گیریم چرخنده یک بعدی برای پتانسیل ویژه ای است که در فاصله زمانهای مساوی T ضربه ای به آن اعمال می شود. تحول تابع موج را بین دو ضربه متوالی توسط ماتریس یکانی به دست می آوریم، عناصر ماتریس یکانی به طور توانی کاهش می یابند. تغییرات زمانی مقدار انتظاری انرژی را در دو حالت کوانتومی و کلاسیکی با هم مقایسه می کنیم. برای حالت کوانتومی دو حالت مجزا وجود دارد. ۱- حالت تشدید ۲- حالت غیر تشدید. تحول انرژی در حالت تشدید به دو صورت کاملاً متناوب و حالت تشدید اساسی تقسیم بندی می شود، که آن را به طور تحلیلی به دست می آوریم. نشان می دهیم که در حالت تشدید اساسی انرژی با مجذور زمان (تعداد ضربه ها)، افزایش می یابد. در حالت غیر تشدید، تغییرات انرژی حول یک مقدار متوسطی نوسان می کنند. که این با حالت کلاسیکی آن که در یک حالت مشخصی آشوبناک می شود کاملاً متفاوت است.

فهرست مطالب

صفحه		عنوان
ز	فهرست نمودارها	
۱	مقدمه	فصل اول
۱	۱-۱ مفهوم آشوب	
۲	۲-۱ تاریخچه آشوب	
۳	۳-۱ سیستم های هامیلتونی	
۴	۴-۱ انتگرال پذیری در سیستم های کوانتومی	
۵	۵-۱ بررسی آشوب از دیدگاه کوانتومی	
۸	مطالعه آشوب از دیدگاه کلاسیکی	فصل دوم
۸	۱-۲ مقدمه	
۸	۲-۲ آشوب و روشهای مطالعه آن	
۱۱	۳-۲ نگاشت استاندارد (چرخنده ضربه ای)	
۱۹	۴-۲ بررسی سیستم های آشوبناک به روش محاسبه توان لیاپونوف	
۲۰	آشوب در سیستم های کوانتومی	فصل سوم
۲۰	۱-۳ مقدمه	
۲۱	۲-۳ مطالعه نگاشت استاندارد	
۲۲	۱-۲-۳ فضای فاز	
۲۴	۲-۲-۳ تحول انرژی	
۲۵	۳-۳ محاسبه تابع موج چرخنده ضربه ای	
۲۷	۴-۳ محاسبه تابع موج چرخنده ضربه ای در حالت خاص	
۳۵	۵-۳ خواص ماتریس تحول	
۳۶	۶-۳ مطالعه تحول انرژی	
۳۷	۷-۳ حالت تشدید	
۵۶	۸-۳ حالت غیر تشدید	
۵۹	۹-۳ نتایج و کاربرد	
۶۰	پیوست الف- محاسبه فضای فاز معادله (۷-۲) و تحول انرژی معادله (۲-۱۱)	

۶۱	پیوست ب- محاسبه مقدار انتضاری انرژی معادله (۳-۷۳).....
۶۲	مراجع پیشنهادی
۶۵	چکیده به انگلیسی

فهرست نمودارها

صفحه	نمودار
۱۴	۲-۴الف فضای فاز سیستم به ازاء $k=0.5$ ، با شرط اولیه $x(0)=0.5$ و $p(0)=0$ فقط چند نقطه مشخص را تکرار می کنند.....
۱۴	۲-۴ب فضای فاز سیستم به ازاء $k=0.5$ ، با شرط اولیه $x(0)=0.35$ و $p(0)=0.01$ نقاط روی یک مسیر قرار می گیرند.....
۱۵	۲-۴ج شبیه به نمودار ۲-۴الف با شرط اولیه $x(0)=0.01$ و $p(0)=0.01$ نقاط فقط قسمتی از صفحه را می پوشانند.....
۱۵	۲-۴د شبیه به نمودار ۲-۴ج به ازاء $k=1.5$ ، با شرط اولیه $x(0)=0.01$ و $p(0)=0.01$ نقاط قسمت بیشتری از صفحه را می پوشانند.....
۱۵	۲-۴ه شبیه به نمودار ۲-۴ج به ازاء $k=2.5$ ، با شرط اولیه $x(0)=0.01$ و $p(0)=0.01$ نقاط تقریباً تمام صفحه را می پوشانند.....
۱۶	۲-۵الف نمایش تغییرات انرژی بر حسب زمان به ازاء $k=0.005$ ، با شرط اولیه $x(0)=0.5$ و $p(0)=0.01$ دامنه انرژی در این حالت 0.02 می باشد.....
۱۶	۲-۵ب شبیه الف به ازاء $k=0.5$ ، با شرط اولیه $x(0)=0.01$ و $p(0)=0.01$ دامنه انرژی به مقدار 2.5 رسیده و در این حالت سیستم آشوبناک نیست.....
۱۷	۲-۵ج شبیه الف به ازاء $k=0.97$ ، با شرط اولیه $x(0)=0.05$ و $p(0)=0.1$ با افزایش مقدار k در این حالت دامنه انرژی مقدار 5 و سیستم در مرز آشوب قرار گرفته است، در این حالت سیستم از قضیه KAM تبعیت می کند.....
۱۷	۲-۶الف شبیه به نمودار ۲-۵الف به ازاء $k=0.987$ ، با شرط اولیه $x(0)=0.05$ و $p(0)=0.1$ با افزایش مقدار k دامنه انرژی به مقدار 4.5 رسیده، در این حالت هنوز سیستم در مرز آشوب قرار گرفته است و قضیه KAM در این مورد نیز صدق می کند.....
۱۷	۲-۶ب شبیه به نمودار ۲-۶الف به ازاء $k=2$ ، با شرط اولیه $x(0)=1$ و $p(0)=0.1$ در این حالت دامنه انرژی سیستم نسبت به حالت قبل تغییرات ناگهانی پیدا کرده به مقدار 350 رسیده و سیستم آشوبناک می باشد.....
۱۸	

- شبيهه به نمودار ۲-۶ الف به ازاء $k=5$ و شرایط اولیه $p(0) = 0.1$ و $x(0) = 1$. در این حالت نیز دامنه انرژی نیز با افزایش مقدار k به مقدار 6000 رسیده، که نشان دهنده آشوبناک بودن سیستم می باشد.....
- ۱۸
 ۲۱ نمایش تغییرات پتانسیل به ازاء $b=0$ و $k=0.8$ الف ۳-۱
 ۲۲ نمایش تغییرات پتانسیل به ازاء $b=0.5$ و $k=0.8$ ب ۳-۱
 ۲۲ نمایش تغییرات پتانسیل به ازاء $b=0.99$ و $k=0.8$ ج ۳-۱
 ۲-۳ نمایش فضای فاز سیستم به ازاء شرایط اولیه $x(0) = 0.01, p(0) = 0.01$ و $k=0.5$ (الف) به ازاء $b=0$ ، (ب) به ازاء $b=0.01$ ، (ج) به ازاء $b=0.5$ و (د) به ازاء $b=0.99$ ۲۳
 ۳-۳ نمایش تغییرات انرژی بر حسب زمان به ازاء شرایط اولیه $x(0) = 0.01, p(0) = 0.01$ و $k=0.5$ (الف) به ازاء $b=0$ ، (ب) به ازاء $b=0.01$ ، (ج) به ازاء $b=0.5$ و (د) به ازاء $b=0.99$ ۲۴
 ۴۰-۳ نمایش تغییرات انرژی بر حسب زمان (ضربه) به ازاء $T/4\pi=1/2$ ، $k=0.5$ و $b=0$ الف ۴-۳
 ۴۰-۳ شبيهه به نمودار ۳-۴ الف به ازاء $T/4\pi=1/2$ ، $k=0.5$ و $b=0.01$ ب ۴-۳
 ۴۱-۳ شبيهه به نمودار ۳-۴ الف به ازاء $T/4\pi=1/2$ ، $k=0.5$ و $b=0.1$ ج ۴-۳
 ۴۱-۳ شبيهه به نمودار ۳-۴ الف به ازاء $T/4\pi=1/2$ ، $k=0.5$ و $b=0.99$ د ۴-۳
 ۴۲-۳ نمایش تغییرات انرژی بر حسب زمان (ضربه) به ازاء $T/4\pi=1/2$ ، $k=2$ و $b=0$ الف ۵-۳
 ۴۲-۳ شبيهه به نمودار ۳-۵ الف به ازاء $T/4\pi=1/2$ ، $k=2$ و $b=0.01$ ب ۵-۳
 ۴۳-۳ شبيهه به نمودار ۳-۵ الف به ازاء $T/4\pi=1/2$ ، $k=2$ و $b=0.1$ ج ۵-۳
 ۴۳-۳ شبيهه به نمودار ۳-۵ الف به ازاء $T/4\pi=1/2$ ، $k=2$ و $b=0.99$ د ۵-۳
 ۴۷-۳ نمایش تغییرات انرژی بر حسب زمان (ضربه) به ازاء $T/4\pi=1$ ، $b=0$ و $k=0.5$ الف ۶-۳
 ۴۷-۳ نمایش تغییرات انرژی بر حسب زمان (ضربه) به ازاء $T/4\pi=1$ ، $b=0.1$ و $k=0.5$ ب ۶-۳
 ۴۸-۳ نمایش تغییرات انرژی بر حسب زمان (ضربه) به ازاء $T/4\pi=1$ ، $b=0.5$ و $k=0.5$ ج ۶-۳
 ۴۸-۳ نمایش تغییرات انرژی بر حسب زمان (ضربه) به ازاء $T/4\pi=1$ ، $b=0.99$ و $k=0.5$ د ۶-۳
 ۴۸-۳ نمایش تغییرات انرژی بر حسب زمان (ضربه) به ازاء $T/4\pi=3/7$ ، $b=0$ و $k=2$ الف ۷-۳
 در این حالت دامنه انرژی متناسب با زمان به طور صعودی افزایش می یابد و به

- ۴۹ 40 می رسد.....
- ۳-۷ب شبیه به نمودار ۳-۷الف به ازاء $T/4\pi = 3/7$ ، $b=0.5$ و $k=2$. همانطور که مشاهده می شود دامنه انرژی با افزایش مقدار b ، مسیر صعودی دارد و از 40 به 160 افزایش یافته است.....
- ۳-۷ج شبیه به نمودار ۳-۷الف به ازاء $T/4\pi = 3/7$ ، $b=0.99$ و $k=2$. در این حالت نیز دامنه انرژی با افزایش مقدار b به اندازه 4500 رسیده است. بنابراین دامنه انرژی در حالت تشدید با افزایش b ، افزایش می یابد.....
- ۳-۸الف نمایش تغییرات انرژی بر حسب زمان(ضربه) به ازاء $T/4\pi = 9/17$ ، $b=0$ و $k=2$. در مقایسه با نمودار ۳-۷الف با افزایش مقدار q ، دامنه انرژی به مقدار 18 کاهش یافته است.....
- ۳-۸ب شبیه به نمودار ۳-۸الف به ازاء $T/4\pi = 9/17$ ، $b=0.5$ و $k=2$. همانطور که مشاهده می شود دامنه انرژی با افزایش مقدار b ، با افت و خیز حول یک مقدار متوسط نوسان می کند و انرژی از 18 به 1.4 کاهش یافته است.....
- ۳-۸ج شبیه به نمودار ۳-۸الف به ازاء $T/4\pi = 9/17$ ، $b=0.99$ و $k=2$. هر چند در نمودار ۳-۸ب افزایش مقدار b ، به کاهش دامنه انرژی منجر شد (که علت آن افزایش مقدار p و q می باشد)، ولی با افزایش مجدد مقدار b ، در این نمودار، انرژی با همان افت و خیز افزایش یافته به یک مقدار ثابت 18 رسیده است.....
- ۳-۹الف نمایش تغییرات انرژی بر حسب زمان(ضربه) به ازاء $T/4\pi = 8/13$ ، $b=0$ و $k=0.8$. در این حالت دامنه انرژی 0.35 می باشد، انرژی با افت و خیز حول یک مقدار متوسط نوسان می کند.....
- ۳-۹ب شبیه به نمودار ۳-۹الف به ازاء $T/4\pi = 8/13$ ، $b=0.5$ و $k=0.8$. در اینجا دامنه انرژی در حالی که مقدار k ثابت است با افزایش مقدار b ، از 0.35 به مقدار 0.7 افزایش یافته است و هنوز حالت نوسانی دارد.....
- ۳-۹ج شبیه به نمودار ۳-۹الف به ازاء $T/4\pi = 8/13$ ، $b=0.99$ و $k=0.8$. در این حالت دامنه انرژی تغییر ناگهانی پیدا می کند، مسیر صعودی به خود گرفته و از مقدار 0.35 به 250 رسیده است.....
- ۳-۱۰الف نمایش تغییرات انرژی بر حسب زمان(ضربه) به ازاء $T/4\pi = 8/13$ ، $b=0$ و $k=2$.

- در مقایسه با نمودار ۳-۹ الف دامنه انرژی با افزایش مقدار k ، از 0.35 به 2.5 افزایش یافته است. در این حالت انرژی با افت و خیز از وضعیت تعادل خارج شده، و مسیر صعودی به خود گرفته است. ۵۴
- ۳-۱۰ ب شبیه به نمودار ۳-۱۰ الف به ازاء $T/4\pi = 8/13$ ، $b=0.5$ و $k=2$. در مقایسه با حالت ۳-۱۰ الف، با افزایش مقدار b ، نمودار حالت صعودی به خود گرفته و دامنه انرژی از 2.5 به مقدار 12 افزایش یافته است. ۵۵
- ۳-۱۰ ج شبیه به نمودار ۳-۱۰ الف به ازاء $T/4\pi = 8/13$ ، $b=0.99$ و $k=2$. در این حالت نیز دامنه انرژی در مقایسه با نمودار ۳-۱۰ الف، با افزایش مقدار b ، از 2.5 به مقدار 60 افزایش یافته است. ۵۵
- ۳-۱۱ الف نمایش تغییرات انرژی بر حسب زمان (ضربه) به ازاء $T/4\pi = 17711/28657$ ، $b=0$ و $k=4.8$. در این حالت دامنه انرژی 15 می باشد و انرژی حول مقدار متوسطی نوسان می کند. ۵۷
- ۳-۱۱ ب شبیه به نمودار ۳-۱۱ الف به ازاء $T/4\pi = 17711/28657$ ، $b=0.5$ و $k=4.8$. در این حالت نیز دامنه انرژی با افزایش مقدار b از 15 به 18 افزایش یافته است و انرژی حول مقدار متوسطی نوسان می کند. ۵۷
- ۳-۱۱ ج شبیه به نمودار ۳-۱۱ الف به ازاء $T/4\pi = 17711/28657$ ، $b=0.99$ و $k=4.8$. با افزایش مجدد مقدار b ، دامنه انرژی از 15 به 20 افزایش یافته است ولی انرژی با افت و خیز حول مقدار متوسطی نوسان می کند و محدود باقی می ماند. ۵۸

فصل ۱

مقدمه

۱-۱ مفهوم آشوب

در طبیعت سیستم های دینامیکی فراوانی وجود دارد، که معادلات حاکم بر آن ها به صورت هامیلتونی است، که تحول زمانی و مکانی اندکی از آنها مورد مطالعه قرار گرفته است و رفتارشان قابل پیش بینی است. در اکثر سیستم ها تحول زمانی آن ها به راحتی قابل پیش بینی نمی باشد، و رفتار دراز مدت آنها غیر قابل پیش بینی است. به چنین سیستم هایی، سیستم های آشوبناک گفته می شود [1-2].

پدیده آشوب در شاخه های مختلف علوم تجربی از جمله فیزیک، شیمی، زیست شناسی و... دیده می شود. با نگاهی گذرا، روزانه با سیستم های دینامیکی مختلفی روبه رو می شویم، به عنوان مثال پدیده هایی چون جوشش یک ظرف آب، امواج اقیانوسها، ریزش آبشارها، بارش بارانها، ایجاد گرد و خاک، وقوع زلزله ها، تخریب ساختمانها، چرخش زمین حول خورشید یا جزر و مد دریاها و در مرحله بالاتر، تشکیل اتمها، مولکولها، سلولها و نهایتاً موجودات زنده از جمله تحولاتی هستند که مکانیسم تحول آنها قابل پیش بینی نیست. آشوب ممکن است در تحول زمانی یا مکانی باشد، موضوع بحث این پایان نامه سیستم های دینامیکی آشوبناک در زمان است.

فیزیکدانان بیشتر به تحلیل مسائلی پرداخته اند که معادلات حاکم بر آن ها خطی است، و تحول شان قابل پیش بینی است. اگر حالت اولیه یک سیستم N ذره ای در لحظه t_0 ، $q(0)$ باشد، تحول آن را در لحظه t به صورت زیر خواهد شد،

$$q(t) = Mq(0) \quad (1-1)$$

که در آن $q(t)$ نشان دهنده تمام مؤلفه های مکان و تکان سیستم می باشد و M عملگری است که سیستم را از لحظه t_0 به لحظه t متحول می نماید.

معادلات حاکم بر حرکت سیستم های آشوبناک الزاماً غیر خطی است و دارای دو مشخصه بارزند:

- ۱- تغییرات ناچیز در شرایط اولیه منجر به حادثه بزرگ و مسیر کاملاً نامعین خواهد شد. بنا براین به شرایط اولیه بسیار حساس هستند.
- ۲- تحول آن ها متناوب نیست، با وجود متناوب بودن پتانسیل در بعضی سیستم ها، رفتار سیستم هنوز می تواند آشوبناک باشد.

۲-۱ تاریخچه آشوب

پس از کشف قوانین نیوتن در قرن هفدهم و پیروزی چشم گیر آن بین دانشمندان این باور به وجود آمد که با داشتن شرایط اولیه می توان آینده هر دستگاهی را با هر تقریبی و تا هر زمانی پیش بینی نمود. اولین کسی که محدودیت پیش بینی در دستگاههای دینامیکی را دریافت پوانکاره¹ بود. مطالعه او در زمینه پایداری دستگاه خورشید و دستگاههای ارگودیک² بود. وی متوجه طبقه عظیمی از حرکات نامنظم شد و دریافت که پیش بینی دراز مدت این حرکات غیر ممکن است. پوانکاره این نتایج را در اواخر قرن نوزدهم به دست آورد. در سال ۱۹۶۳، ادوارد لورنتز³ ریاضی دان و جوشناس آمریکایی از دانشگاه MIT مقاله ای منتشر کرد که در جستجوی یک مدل ریاضی برای توضیح تلاطم جوی و هواشناسی بود. او در مدلسازی به معادلات دیفرانسیل غیر خطی برخورد کرد که به ازاء پارامترهای مختلف، رفتارهای بسیار متفاوتی از خود نشان می دادند، که غیر منظم و غیرتناوبی بودند [3]. پس از آن فایگن بوم⁴ با مطالعه این توابع دریافت که کلیه این توابع دارای خصوصیات مشترکی هستند، که با تغییر بعضی از پارامترهای موجود یک مجموعه دو برابر شدن پی در پی دوره تناوب وجود دارد که این دوره تناوب به سمت بی نهایت میل می کند، و در این حد سیستم به آشوب کشانده می شود [4]. این دو کاربرد در محاسبات کامپیوتری مشاهده شده اند.

در دهه اخیر فیزیکدانان مدل‌های کلاسیکی متعددی در نظر گرفته، پدیده آشوب را مطالعه کرده اند. یکی از مدل‌های مشهور، نگاشت استاندارد⁵ است. که اولین بار توسط تیلور⁶ معرفی شد [5]. و توسط چریکوف⁷ با جزئیات زیادی مورد مطالعه قرار گرفت [6-7].

نگاشت استاندارد به گونه های مختلف تعبیر می شود. در یکی از این تعبیر چرخنده ای به طول l و به جرم m فرض می شود که در فاصله زمانهای مساوی T ضربه ای به شدت $kT \sin \theta$ به آن وارد می شود. هامیلتونی چنین سیستمی به صورت زیر است،

$$H = \frac{P_0^2}{2ml^2} + kT \cos \theta \sum_n \delta(t - nT) \quad (2-1)$$

که در آن θ و l زاویه و تکانه زاویه ای ذره و kT دامنه نیرو است. هامیلتونی (۲-۱) در حد $T \rightarrow 0$ به هامیلتونی یک پاندول ساده تبدیل می شود که تعبیر دیگری از سیستم (۲-۱) است. نقاط ثابت

1. Poincare

3. Edward Lorentz

5. Standard map

7. B.V. Chirikov

2. Ergodic System

4. M. J. Feigenbaum

6. J. B. Taylor

نگاشت استاندارد (۲-۱) توسط محققین مختلفی مورد مطالعه قرار گرفته است [8-11]. برای سیستم (۲-۱)، از دیدگاه کلاسیک نشان داده شد که به ازاء $kT \geq 0.971635$ ، سیستم آشوبناک می شود [6, 12-17]. از آن به بعد مطالعه آشوب در سیستم های کوانتومی مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است، بر اساس این مطالعات نشان داده شد که دامنه تابع موج در سیستم های کوانتومی آشوبناک، به طور نمایی جایگزیده، ولی در سیستم های پایدار، تناوبی می باشد [18-20].

۳-۱ سیستم های هامیلتونی

در این بخش بحث ما مربوط به سیستم هایی است که از معادلات هامیلتونی تبعیت می کنند. بعضی سیستم های هامیلتونی می توانند حامل آشوب باشند، اگر $H(p, q)$ هامیلتونی سیستمی با N درجه آزادی باشد، که مکانش به وسیله مختصات q_1, \dots, q_N و اندازه حرکت p_1, \dots, p_N تعریف شده باشد در آن صورت معادلات حرکت به صورت زیر خواهد شد [21]:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i=1, \dots, N) \quad (3-1)$$

. که در آن

$$H(p, q) \equiv H(p_1, q_1, \dots, p_N, q_N) \quad (4-1)$$

اگر هر مختصه q_i در تابع H ظاهر نشود در این صورت از معادله (۳-۱) نتیجه می شود که:

$$p_i = \text{ثابت} \quad (5-1)$$

بنا براین به درجات آزادی که در H ظاهر نمی شوند، مختصه قابل اغماض یا ثابت حرکت گفته می شود. برای یک سیستم پایستار که هامیلتونی بستگی صریح به زمان ندارد، هامیلتونی یک ثابت حرکت بوده و انرژی کل سیستم خواهد بود. هر مختصه قابل اغماض به وسیله (۳-۱) به صورت انتگرالی روی t به دست می آید:

$$q_i(t) = q_i(0) + \int_0^t \frac{\partial H}{\partial p_i} dt. \quad (6-1)$$

داشتن سیستمی با N درجه آزادی حداکثر $(2N-1)$ ثابت حرکت می تواند داشته باشد. هرچه تعداد ثابت های حرکت بیشتر باشد، سیستم محدودتر خواهد شد [22]. مثلاً برای ذره ای که در فضای فاز دو بعدی حرکت می کند، اگر انرژی آن ثابت باشد، مسیر سیستم در فضای فاز یک منحنی خواهد بود. به ازای هر ثابت حرکت سیستم یک درجه آزادی از دست می دهد و مسیر سیستم منطقه محدودتری از فضای فاز را اشغال می کند. برای هر سیستم با N درجه آزادی که معادلات حرکت آن

از معادله (۳-۱) تبعیت کند، هرگاه N ثابت حرکت مستقل از هم وجود داشته باشد، سیستم را انتگرال پذیر گویند. واگر یکی از ثابتهای حرکت هامیلتونی باشد، سیستم را هامیلتونی انتگرال پذیر^۱ گویند [23-24]. اگر F_i و F_j ثابت های حرکت مستقل از زمان باشند خواهیم داشت:

$$\{F_i, F_j\} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \frac{\partial F_j}{\partial p_k} - \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} = 0, \quad (۷-۱)$$

که $\{, \}$ کروشه پواسون نامیده می شود. از آنجا که انرژی کل سیستم پایستار می باشد یک درجه آزادی از سیستم های هامیلتونی یک بعدی همیشه انتگرال پذیراند، بنا براین چنین سیستم های آشوبناک نیستند. سیستم های با $N > 2$ بندرت انتگرال پذیر هستند. و در بیشتر حالات به غیر از هامیلتونی بیش از یک ثابت حرکت وجود نخواهد داشت، و در صورتی که شرایط قضیه KAM داشته باشند [25]، آشوبناک نیستند. سیستم های انتگرال پذیر را می توان بر حسب متغیر های عمل J و زاویه ω نیز بیان کرد، طوری که با N درجه آزادی دارای N متغیر عمل ثابت، و N متغیر زاویه باشند. در حالت $N=1$ حرکت سیستم در فضای فاز بر محیط دایره ای به شعاع J انجام می گیرد. در نتیجه سیستم انتگرال پذیر و کاملاً متناوب است. در حالت $N=2$ حرکت روی سطح چنبره ای در فضای سه بعدی است، در صورتی که مسیر بسته باشد سیستم کاملاً متناوب است، و در صورتی که مسیر بسته نباشد، مسیر تمام سطح چنبره را خواهد پوشاند و چنین سیستمی را ارگودیک گویند [22].

۴-۱ انتگرال پذیری در سیستم های کوانتومی

مانند سیستم های هامیلتونی کلاسیک، سیستم های کوانتومی انتگرال پذیر نیز تعریف می شود. در سیستم های کوانتومی وقتی که N ثابت حرکت موجود باشد، N ثابت حرکت معادل N عدد کوانتومی است. اگر f یک ثابت حرکت کلاسیکی باشد. عملگر معادل آن در مکانیک کوانتومی از رابطه زیر به دست می آید [26].

$$F(p, q) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2N}} \int d^N \theta d^N \tau d^N p d^N q f(p, q) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\tau(\hat{p} - p) + \theta(\hat{q} - q))\right] \quad (۸-۱)$$

که در آن $(p, q) = (p_1, q_1, \dots, p_N, q_N)$ است. در این صورت F عملگری در فضای هیلبرت است، که متناظر با تابع عددی f در فضای فاز است و در این صورت وقتی عمل گر F_i ثابت حرکت است

1. Integrable Hamiltonian Systems

که رابطه زیر برقرار باشد:

$$[F_i, F_j] = F_i F_j - F_j F_i = 0 \quad (i, j \in (1, \dots, N)), \quad (9-1)$$

F_j و F_i ثابت های حرکت مستقل از زمان هستند و [...] نیز گروه پواسون کوانتومی نامیده می شود. گذار از مکانیک کلاسیک به مکانیک کوانتومی به طور مشخص با گذار به عملگرها و قرار دادن جابه جایی $[\cdot, \cdot]_{ih} = \frac{1}{ih}$ ، به جای گروه پواسون $\{, \}$ انجام می شود [27]. در حالت کلاسیک F_j و F_i هایک تابع کلاسیک عددی هستند، ولی در حالت کوانتومی F_j و F_i ها عملگر می باشند.

به عنوان مثال، برای نیروهای مرکزی، پتانسیل وابسته فقط تابعی از شعاع r است. بنا براین عملگر تکانه زاویه ای $\hat{L}^2 = -\hbar^2 \nabla_{\theta, \varphi}^2$ با $\hat{V}(r)$ جا به جا می شود [27]. ها میل تونی به شکل زیر می باشد:

$$\hat{H} = \hat{T}_r + \hat{L}^2 / 2mr^2 + \hat{V}(r) \quad (10-1)$$

بنا براین، عملگرهای L^2, H و L_z برای مسئله نیروهای مرکزی، داریم:

$$[H, L^2] = 0, [H, L_z] = 0, [L^2, L_z] = 0 \quad (11-1)$$

عملگر انرژی کل \hat{H} ، وقتی صریحاً وابسته به زمان نباشد، ثابت حرکت است. در کوانتوم مکانیک سیستم هایی با N درجه آزادی که N ثابت حرکت دارند، سیستم های انتگرال پذیر گویند. که مشابه تعریف انتگرال پذیری در سیستم های کلاسیکی است. چنانچه تعداد ثابت های حرکت کمتر از N باشند. یعنی سیستم انتگرال ناپذیر باشد. در این حالت ممکن است سیستم آشوبناک باشد. در این صورت انرژی سیستم طیف نامنظم¹ دارد [28-29].

۵-۱ بررسی آشوب از دیدگاه کوانتومی

در مطالعه کوانتومی، سیستم هایی که هامیلتونی کلاسیک آنها آشوبناک است، به دلیل اهمیت زیادی که دارند، مورد توجه قرار گرفته اند. و علت آن این است که به طور مثال مفهومی بنام مسیردر مکانیک کوانتومی وجود ندارد و بر پایه خصلت موجی ذرات واصل عدم قطعیت هایزنبرگ $(\Delta x \Delta p \geq \hbar/2)$ ، استوار است. در صورتی که ظهور آشوب در سیستم های کلاسیکی بر پایه خاصیت ناپایداری مسیرها در فضای فاز است. برای این کار معادله شرودینگر وابسته به زمان $H\psi(\theta, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\theta, t)}{\partial t}$ را حل

1. Irregular Spectrum

می کنیم، این موضوع در فصل ۳، مورد بررسی قرار خواهد گرفت. کازاتی^۱ و دیگران، معادل کوانتومی سیستم (۲-۱) را مطالعه کردند. آنها تحول کوانتومی سیستم را پس از هر ضربه توسط ماتریس یکانی به دست آوردند [30]. و به طور عددی تحول مقدار انتظاری انرژی سیستم را پس از هر ضربه به دست آورده، با معادل کلاسیک آن مقایسه کرده اند. اختلاف قابل توجهی بین دو سیستم کلاسیکی و کوانتومی وجود دارد، در سیستم های کوانتومی حالت شدید وجود داشت، (وقتی نسبت فرکانس سیستم به فرکانس ضربه ها عددی صحیح باشند، $T/4\pi = m$ که m عددی صحیح است)، که در حالت کلاسیک تا آن زمان مشاهده نشده بود.

ایزرایلف^۲ و شپیلینانسکی^۳ مدل نگاشت استاندارد را برای حالت کلی تری از زمان ضربه کرده، حالت های مشابه حالت $T/4\pi = m$ را مشاهده کرده اند [31].

هوگ^۴ و هیوبرمن^۵ ثابت کردند که برای سیستم های کوانتومی بسته که پتانسیل آنها متناوب است، حالت آشوبناکی وجود نخواهد داشت [32-33].

چریکوف و دیگران، نشان دادند که در سیستم های کوانتومی آشوب موقت وجود دارد. به طوری که تا مدت زمان مشخص سیستم های مشابه کلاسیک و کوانتومی، آشوبناک هستند، ولی از آن زمان به بعد پدیده های تداخلی کوانتومی اثر خود را نشان می دهند [34].

گرمپل^۶ و دیگران، مدل چرخنده ضربه ای را در نظر گرفتند و نشان دادند که مدلهای ضربه ای به صورت

$$H = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{d^2}{d\theta^2} + kV(\theta) \sum_n \delta(t - nT) \quad (12-1)$$

که در آن پتانسیل تابع متناوبی از زمان t و زاویه θ است، را می توان با تبدیلهایی به مدل همبستگی قوی یا مدل آندرسون^۷ تبدیل کرد [35-36]. (مدل آندرسون، شبکه های بلوری یک بعدی را که دارای پتانسیل تصادفی ایستا هستند، توصیف می کند.) و نشان می دهند که طول جایگزیده^۸ γ^{-1} که از محاسبات عددی به دست می آورند، با آنچه که توسط تالس^۹ به طور تحلیلی محاسبه شده،

1. G. Casati

3. D. Shepelyansky

5. B. A. Huberman

7. Anderson Model

9. D. J. Thouless

2. F. M. Izrailev

4. J. Hogg

6. D. R. Grempel

8. Localization length

یکسان است [37]. دورزی¹ و دیگران، پتانسیل سیستم (۱-۱۲) را به صورت زیر در نظر گرفته اند،

$$V(\theta) = 2tg^{-1}\left(\frac{k}{2}\cos\theta\right) \quad (13-1)$$

که در حد k های کوچک نگاهت استاندارد است. آنها تغییرات مقدار انتظاری انرژی را بر حسب زمان به طور عددی مطالعه کرده اند [38]. با توجه به اینکه تا کنون پتانسیل برای دو مدل حدی تابع دلتا و کسینوس برای مدل همبستگی قوی در نظر گرفته شده در این پایان نامه ما پتانسیل را به صورت زیر در نظر گرفته ایم،

$$V(\theta) = 2tg^{-1}\left(\frac{k \cos \theta}{2(1-b \cos \theta)}\right), \quad |b| < 1, k \in R \quad (14-1)$$

این پتانسیل به گونه ای است که تحت شرایط خاصی به مدل واقعی تر تبدیل می شود، که به ازاء

$b \rightarrow 1$ مدل به صورت تابع دلتا و به ازاء $b \rightarrow 0$ به مدل پتانسیل کسینوسی تبدیل می شود.

تحول تابع موج سیستم (۱-۱۴) را برای این پتانسیل به کمک ماتریس یکانی به دست می آوریم. به وسیله تابع موج به دست آمده، تحول زمانی مقدار انتظاری انرژی سیستم را در حالت های خاص به طور تحلیلی به دست می آوریم. و آنها را با مشابه کلاسیک و همچنین با مدل نگاهت ساده کوانتومی ($b=0$) آن مقایسه می کنیم.

روش های مختلفی برای بررسی آشوب وجود دارد. دو روش که در این پایان نامه مورد بحث قرار گرفته اند عبارتند از:

۱- روش پوانکاره

۲- روش توانی لیاپونوف²

این مطالب را در فصول آینده بیشتر مورد بحث قرار می دهیم. در فصل دوم آشوب در سیستم های کلاسیکی را مورد بحث قرار می دهیم. در فصل سوم سیستم (۱-۲) را به طور کوانتومی بررسی کرده، نتایج به دست آمده را با مدل نگاهت ساده کوانتومی ($b=0$) آن مقایسه می کنیم.

فصل ۲

مطالعه آشوب از دیدگاه کلاسیک

۱-۲ مقدمه

مسائل فیزیکی را می توان از دو جنبه کلاسیک و کوانتوم بررسی کرد. نتایج این بررسی گاهی مشابه هم و گاهی به نتایج کاملاً متفاوتی منجر می شود. بحث اصلی ما بررسی آشوب از دیدگاه کوانتومی است که در فصل ۳ بحث خواهیم کرد، ولی قبل از آن پدیده آشوب را از دیدگاه کلاسیکی در این فصل بررسی می کنیم. سیستم های هامیلتونی که معادلات دیفرانسیل حاکم بر آنها خطی است، به خوبی حل و بررسی شده اند. تحول چنین سیستمهایی قابل پیش بینی است. اگر به هامیلتونی چنین دستگاه هایی یک عامل اغتشاشی غیر خطی افزوده شود، ممکن است تحول آنها غیر قابل پیش بینی و در نتیجه به سیستمی آشوبناک تبدیل شود. تأثیر عامل اغتشاشی بر حرکت سیستم ممکن است زیاد یا کم باشد. مثلاً وقتی که سیستم در حالت تشدید باشد، تأثیر اغتشاشی زیاد و اگر سیستم دارای شرایط قضیه KAM باشد این اثر کم است.

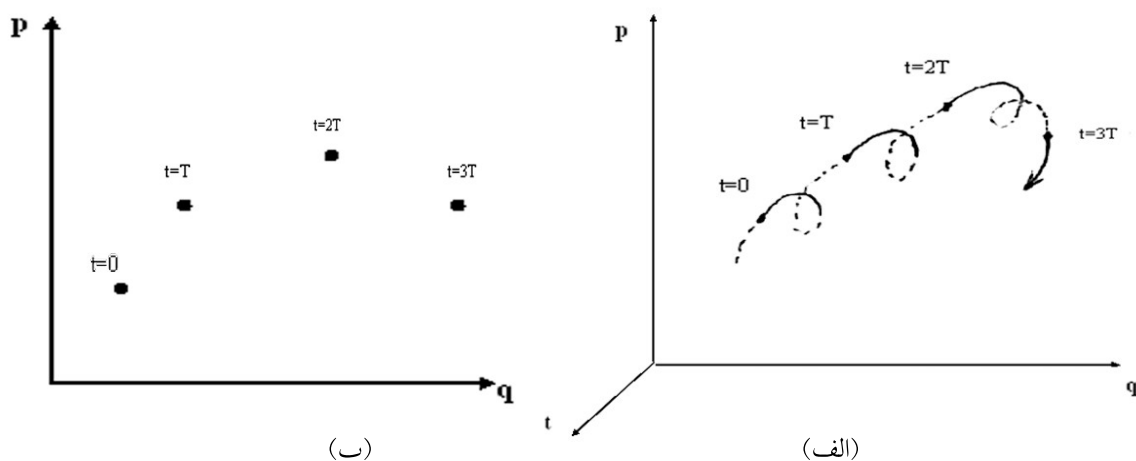
سیستم های پایدار ممکن است بر اثر عامل اغتشاش ناپایدار شوند و برعکس. بعضی از معیارها برای سیستم های آشوبناک همراه با مثالی ساده در بخش (۲-۲) بحث خواهیم کرد. در بخش (۲-۳) روش پوانکاره را توضیح خواهیم داد، و در بررسی مسائل آشوبناک از آن استفاده خواهیم کرد. در بخش (۲-۴) روش محاسبه توان لیاپونوف را توضیح خواهیم داد.

۲-۲ آشوب و روشهای مطالعه آن

همان طور که در بخش (۲-۱) بیان شد، سیستم های آشوبناک به ازای شرایط اولیه مختلف ممکن است مسیرهای بسیار متفاوتی را انتخاب کند. از این رو سیستم های آشوبناک به شرایط اولیه حساسیت زیادی دارند. در این بخش به مطالعه فضای فاز کلاسیکی، که به روش سطح مقطع یا مبتکران پوانکاره معروف است می پردازیم [39-40].

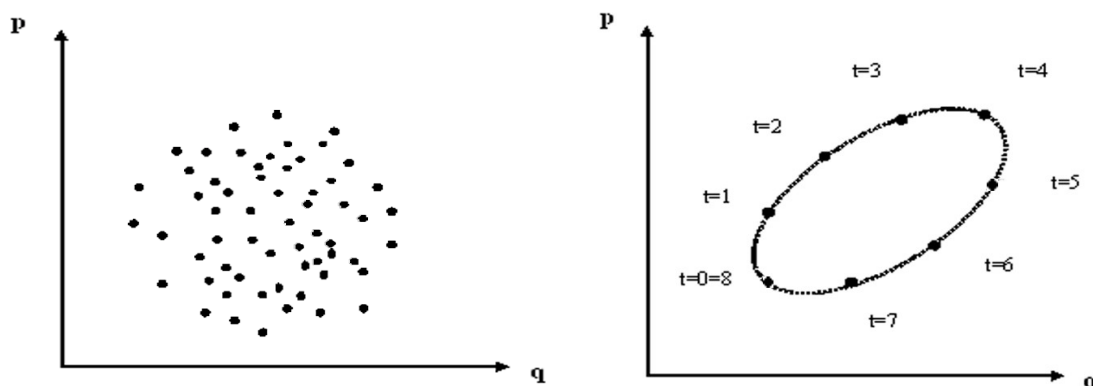
روش سطح مقطع برای مطالعه سیستم های آشوبناک استفاده می شود، در این روش اگر (p_0, q_0) به عنوان شرط اولیه باشد، اولین نقطه از تبدیل $(p_1, q_1) = M(p_0, q_0)$ به دست می آید، که (p_1, q_1)

سطح مقطع مسیر با صفحه (p, q) در زمان $t=T$ است. دومین نقطه از تبدیل $(p_2, q_2) = M(p_1, q_1)$ به دست می آید، که در زمان $t=2T$ است و n امین آن از تبدیل به صورت $(p_n, q_n) = M(p_{n-1}, q_{n-1})$ در زمان $t=nT$ است، که در آن عملگر انتقال می باشد. شکل ۱-۲ روش سطح مقطع برای مطالعه سیستم های آشوبناک را نمایش می دهد.



شکل ۱-۲. روش سطح مقطع برای مطالعه سیستم های آشوبناک
 الف: مسیر سیستم در فضای (p, q, t) را نمایش می دهد،
 ب: مقطع مسیر در صفحه (p, q) را برای شکل الف نشان می دهد.

اگر پس از چند تبدیل نقاط به دست آمده تشکیل منحنی بسته ای دهند، در آن صورت آنرا پایدار گویند، شکل ۲-۲ الف. و مسیر مشابه آن در فضای فاز تشکیل سطوح KAM یا چنبره ناورد می دهند. اگر نقاط در صفحه (p, q) پراکنده باشند، در آن صورت مسیر مشابه به آن در فضای فاز منحنی مشخصی ندارند، و در این حالت سیستم آشوبناک است. شکل ۲-۲ ب.



شکل ۲-۲ ب: ناحیه آشوبناک

شکل ۲-۲ الف: ناحیه پایدار

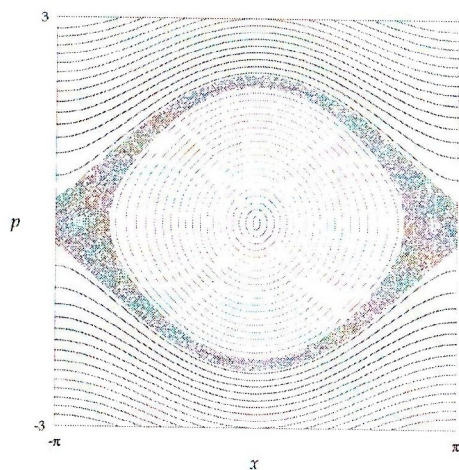
مثال ۱. فضای فاز یک آونگ ساده کلاسیکی را که از معادله هامیلتونی زیر پیروی می کند در نظر بگیرید:

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2} - \cos(x). \quad (1-2)$$

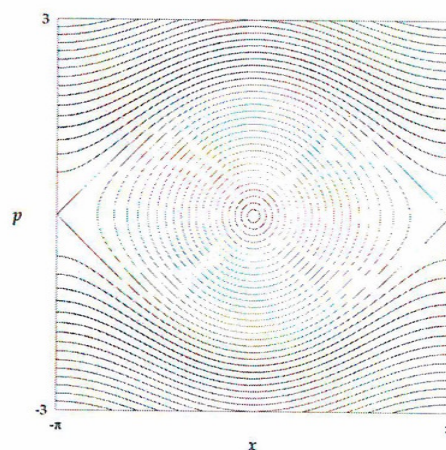
شکل ۲-۳ فضای فاز (۱-۲) را نمایش می دهد. در شکل ۲-۳ الف، ناحیه $(x, p) = (0, 0)$ مربوط به حالتی است که چرخنده مسیر بسته را طی می کند در این حالت چرخنده در تعادل پایدار می باشد. ممکن است چرخنده به ازاء شرایط اولیه مختلف، ولو خیلی نزدیک به هم دارای مسیر های مختلفی در صفحه (x, p) باشند. همان طور که در ناحیه $(x, p) = (\pi, 0)$ یا $(x, p) = (-\pi, 0)$ دیده می شود چرخنده در این ناحیه در تعادل ناپایدار می باشد، مسیر ناحیه بالا به سمت راست و ناحیه پائین به سمت چپ می باشد. حال اگر هامیلتونی (۱-۲) وابسته به زمان به صورت زیر باشد

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} - (1 + 0.5 \cos t) \cos(x). \quad (2-2)$$

فضای فاز (۲-۲) به شکل ۲-۳ ب خواهد شد. در این حالت هامیلتونی به زمان بستگی خواهد داشت و ثابت حرکت نیست و بنابراین یک درجه آزادی به سیستم اضافه شده و سیستم تحت شرایطی آشوبناک خواهد شد. ناحیه نقطه چین در شکل ۲-۳ ب مربوط به ناحیه آشوبناک بودن سیستم می باشد. نواحی آشوبناک در فضای فاز منحنی مشخصی ندارند و این از مشخصه سیستم های آشوبناک می باشد.



(ب)



(الف)

شکل ۲-۳. فضای فاز یک آونگ ساده، (الف) ساختار فضای فاز آونگ ساده، (ب) فضای فاز آونگ (فضای فاز پوانکاره) و ناحیه نقطه چین ناحیه آشوبناک می باشد.