[اُـ]

[اُـ] [اُـ]

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه الزهراء(س)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی

عنوان

روش جواب‌های بنیادی برای حل برخی مسائل هدایت گرمایی معکوس

استاد راهنما

دکتر علی‌مردان شاهرضایی

استاد مشاور

دکتر یداله اردوخانی

دانشجو

مریم رضائی‌پور

مهر ۱۳۸۸

قدردانی و تشکر

سپاس بی‌کران بر ایزد یکتا، آن یگانه مطلق هستی که حدی را بر لطف بی‌کرانش نتوان یافت.

آموختن و آموزاندن عبادت است، یعنی همان غرض اول از خلقت. پس در حصول غرض از خلقت لازم شد که انسان بیاموزد، چرا که بدون آموختن نمی‌تواند پی به شناخت اسرار هستی ببرد. این است که خداوند نیز به برگزیده‌اش می‌فرماید: اِقْرَأْ بِسْمِک ... .

بی‌شک مدیون زحمات عزیزان و اساتید بسیاری هستم که هر یک در رشد و تعالی این حقیر تلاش‌ها نموده‌اند که بردن نام آنها در این مقوله کوتاه، کاری نشدنی است. برای همه آنها عزت و سربلندی خواستارم.

بر خود واجب می‌دانم از زحمات استاد ارجمند جناب آقای دکتر شاهرضایی که امر هدایت و استاد محترم، جناب دکتر اردوخانی که زحمت مشاوره پایان نامه را برعهده داشته‌اند و با عنایت، توجه همیشگی و راهنمایی‌های مدبرانه خود مرا یاری نموده‌اند، تشکر و قدردانی نمایم.

همچنین از اساتید محترم، جناب آقای دکتر جوادی به عنوان داور خارجی و سرکار خانم دکتر طاهری به عنوان داور داخلی نیز کمال سپاسگزاری خود را ابراز می‌دارم.

در نهایت درود می‌فرستم بر پدر و مادر بسیار عزیزم که ذهماتشان در ذهن حقیر فراموش نشدنی است.

چکیده

مسأله‌ی هدایت گرمایی معکوس

$$
\begin{array}{ll}
u_t - a^2 u_{xx} = 0; & 0 < x < 1, \quad 0 < t < t_{\max}, \\
u(x,0) = \varphi(x); & 0 \le x \le 1, \\
\beta \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) + \gamma u(1,t) = g(t); & 0 \le t \le t_{\max}, \\
u(x^*,t) = h(t); & x^* \in [0,1], \quad 0 \le t \le t_{\max},
\end{array}
$$

را در نظر می‌گیریم که در آن φ، g و h توابع پیوسته بر دامنه‌هایشان و $t_{\max}$ و a اعداد مثبت و x^*، β و γ اعداد نامنفی و ثابت معلوم‌اند. شرط کرانه‌ای $u(0,t)$ و شار حرارتی $-u_x(0,t)$ برای هر $0 \le t \le t_{\max}$ و نیز درجه حرارت $u(x,t)$ برای هر $0 < x < 1$ و $0 < t < t_{\max}$، در این مسأله مجهول‌اند.

مسائل هدایت گرمایی معکوس از مسائل به روز در معادلات با مشتقات جزئی می‌باشند که می‌توان آن را با استفاده از روش‌های مختلف حل نمود.

در این رساله، روش عددی جدیدی برای حل مسأله‌ی هدایت گرمایی معکوس بدون استفاده از شبکه‌بندی و انتگرال‌گیری به کار گرفته شده است. در این روش عددی با استفاده از جواب بنیادی، به عنوان توابع پایه‌ای، جواب اصلی معادله گرما مطرح می‌شود که برای تقریب درجه گرمای توزیع شده، لازم است فقط در شرط کرانه‌ای و داده‌های معلوم صدق کند آنگاه دستگاه معادلات خطی بد وضع حاصل می‌شود که برای حل آن، روش منظم سازی تیخانف[1] و روش منحنی L را به طور موفقیت آمیزی به کار می‌گیریم.

کلمات کلیدی: مسأله‌ی هدایت گرمایی معکوس، بد خیم، شار گرمایی، منظم سازی، منحنی L، پارامترمنظم‌ساز.

---

[1] Tikhonov

فهرست مندرجات

پیش گفتار

انتقال حرارت به مطالعه‌ی تبادل انرژی ناشی از اختلاف دما در اجسام می‌پردازد. مهندسان و پژوهشگران در شاخه‌های مختلف علوم پایه و مهندسی با مسائل انتقال حرارت مواجه می‌شوند، گرچه عموماً انتقال حرارت به مهندسی مکانیک نسبت داده می‌شود لیکن حوزه‌ی کاربرد آن در زمینه‌ی مهندسی شیمی، هوا—فضا، متالوژی و الکترونیک نیز می‌باشد. یکی از دلایل اهمیت مسأله‌ی انتقال حرارت، بنیادین بودن و گستردگی تأثیر آن می‌باشد و باعث گسترش این علم در مهندسی و علوم پایه شده است.

ریاضیدانان بزرگی چون پروفسور کنان [2]، پروفسور بِک [3]، پروفسور علیفانف [4] و نظایر آنها، آثار متعددی شامل مقاله و کتاب در زمینه‌ی حل مسائل معکوس نگاشته‌اند. پروفسور کنان، جواب بنیادی معادله گرما را معرفی کرده و با استفاده از معادلات انتگرالی به اثبات وجود و یکتایی جواب بسیاری از مسائلِ معادلات با مشتقات جزئی سهموی پرداخته است [٦]. همچنین پروفسور بِک برخی مسائل هدایت گرمایی معکوس را به روشهای مشخص کردن تابع با استفاده از قضیه دوهامل حل نموده است [٢].

در مسائل هدایت گرمایی معکوس، هدف تعیین درجه حرارت یا دما و شار گرمایی در میله با اندازه‌گیری‌هایی که در نقاط داخلی جسمی مانند یک میله با استفاده از حسگر به دست آمده است، می‌باشد. این مسائل به مسائل بدخیم معروف‌اند که برای رفع بدخیمی نیز روش‌هایی در کتاب بِک ارائه شده است.

این رساله به قرار زیر سازماندهی شده است:

در فصل اول به معرفی برخی پیش نیازها پرداخته‌ایم. در فصل دوّم به معرّفی برخی از کاربردهای مسأله هدایت گرمایی معکوس در صنعت اشاره شده است. در فصل سوّم به معرفی و بررسی روش منظم‌سازی تیخانف و منحنی L که برای حل مسأله‌ی اخیر به کار می‌روند، پرداخته شده است. در فصل چهارم، روش جواب بنیادی برای حل مسأله‌ی

---

[2] Cannon

[3] Beck

[4] Alifanov

هدایت گرمایی معکوس مورد مطالعه قرار گرفته است و در نهایت در فصل پنجم برخی مثال‌های عددی، برای روشن شدن بیشتر مطالب ارائه شده است و همچنین در پایان پیشنهادات و نظرات مربوط به این مطالب برای تعمیم آنها آورده شده که امید است در آینده مفید واقع گردد.

مریم رضائی‌پور
مهر ۱۳۸۸

فصل ۱

تعاریف، مفاهیم پایه و پیش نیازها

در این فصل به ارائه‌ی تعاریفی می‌پردازیم که در فصول آتی به آنها نیاز داریم.

۱.۱ مفاهیم پایه در آنالیزحقیقی

تعریف ۱.۱.۱ مجموعه X از مجموعه اعداد حقیقی را یک فضای‌برداری روی R گویند هرگاه توابعی مانند $X.X \to X$: (.) و یا $R.X \to X$: (.) وجود داشته باشند به طوری که در شرایط زیر صدق کنند:

$\bullet \forall x, y \in X; x + y = y + x$

$\bullet \forall x, y, z \in X; (x + y) + z = x + (y + z)$

$\bullet \exists 0 \in X, \forall x \in X; x + 0 = 0 + x = x$

$\bullet \forall x, y \in X, \forall \lambda \in R; \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

$\bullet \forall x \in X, \forall \lambda, \mu \in R; (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

$\bullet \forall x \in X, \forall \lambda, \mu \in R; (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$

$\bullet \forall x \in X; 1x = x1 = x$

.

مثال۱.۱.۱ مجموعه‌ی ماتریس های $M_{m\times n}$ تشکیل یک فضای برداری می‌دهند.

تعریف۲.۱.۱ فرض کنید X یک فضای برداری روی R باشد. به تابع $\|\cdot\|$ از X به R^+ یک نرم گویند هرگاه[۲۱]:

۱) به ازای هر $x \in X$ ، $\|x\| \geq 0$ و $x = 0$ اگر و تنها اگر $\|x\| = 0$،

۲) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ و $x \in X$ داریم $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$،

۳) به ازای هر $x, y \in X$ می‌یابیم $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

تعریف۳.۱.۱ به فضای خطی X که دارای یک نرم است، فضای خطی نرم‌دار گوییم .
اگر X یک فضای خطی نرم‌دار باشد و برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $d(x, y) = \|x - y\|$، به d یک متر روی X گوییم (d یک متر تولید شده به وسیله نرم است). بنابراین هر فضای نرم‌دار یک فضای متری است.

تعریف۴.۱.۱ برای بردار مفروض x از فضای برداری X، نرم p با نماد $\|\cdot\|_p$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}; \qquad p \in N, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

همچنین برای بردار مفروض x، نرم بی‌نهایت به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

تعریف۵.۱.۱ فرض کنید M فضای برداری همه ماتریس‌های $n \times n$ باشد. تابع $\|.\|$ از M به R^+ را نرم ماتریسی گویند هرگاه در شرایط زیر صدق کند:[۲۳]

۱) به ازای هر ماتریس $A \in M$ همواره $\|A\| \geq 0$، همچنین $\|A\| = 0$ اگر و تنها اگر $A = 0$.

۲) به ازای هر $\alpha \in R$ و $A \in M$ ، $\|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|$.

۳) به ازای هر $A, B \in M$ ، $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

۴) به ازای هر $A, B \in M$ ، $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

مثال ۲.۱.۱ L_p – نرم ماتریس A چنین تعریف می‌گردد:

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

اگر $p = 2$ باشد آنگاه آن نرم را نرم اقلیدسی گویند.

مثال ۳.۱.۱ L_∞ – نرم ماتریس A یا نرم مجموع درایه های سطری ماتریس A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

مثال ۴.۱.۱ L_1 – نرم ماتریس A یا نرم مجموع درایه های ستونی ماتریس A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

تعریف ٦.۱.۱ یک خانواده غیرتهی از زیر مجموعه‌ی X چون M را یک جبر گویند هرگاه برای هر A و B در M داشته باشیم:

۱) $A \cup B \in M$ ،

۲) $X - A \in M$.

تعریف ۱.۱.۷ یک خانواده غیرتهی از زیر مجموعه‌ی X چون M را یک $\sigma-$ جبر گویند هرگاه اجتماع شمارش‌پذیر از عناصر M در مجموعه M قرار داشته باشد.

تعریف ۱.۱.۸ فرض کنیم X یک مجموعه دلخواه و M یک $\sigma-$ جبر روی X باشد $\mu : M \to [0,\infty)$ را یک اندازه گوییم هرگاه داشته باشیم :

۱) $\mu(\emptyset)=0$،

۲) اگر $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله از مجموعه‌های مجزا در M باشد آنگاه $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$.

تعریف ۱.۱.۹ سه تایی (X,M,μ) را یک فضای اندازه گوییم که در آن μ یک تابع اندازه تعریف شده بر σ جبر M روی X است. اعضای M را مجموعه‌های اندازه‌پذیر گوییم.

تعریف ۱.۱.۱۰ برای $1\le p<\infty$، فضای متشکل از تمام توابع اندازه پذیر $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ که در شرط $\int_a^b |f(x)|^p dx<\infty$ صدق می‌نمایند را فضای $L^p[a,b]$ گوییم. پس خواهیم داشت:

$$L^p[a,b]=\{f|f:[a,b]\to\mathbb{C}\ ;\ \text{اندازه پذیر } f \text{ و } \int_a^b |f(x)|^p dx<\infty\}.$$

تعریف ۱.۱.۱۱ فضای خطی مختلط (یا حقیقی) X را یک فضای ضرب داخلی گوییم هرگاه یک تابع مختلط (یا حقیقی) روی $X\times X$ که آن را با نماد (,) نشان می‌دهیم، وجود داشته باشد به طوری که برای هرx، y و z از X و هر $\alpha\in\mathbb{C}$ داشته باشیم:

۱) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$،

۲) $(x,y)=\overline{(y,x)}$،

۳) $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$،

۴) $(x=0 \Leftrightarrow (x,x)=0)$ و $(x,x)\ge 0$.

آنگاه (x,y) ضرب داخلی x وy نامیده می‌شود.

این ضرب داخلی یک نرم به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$\forall x\in X,\quad \|x\|=\sqrt{(x,x)}.$$

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنید X و Y فضای خطی نرم دار باشند. عملگر خطی $T : X \to Y$ را پیوسته گوییم هرگاه برای هر دنباله‌ی $\{x_n\}$ همگرا به x داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - Tx\| = 0.$$

تعریف ۱۳.۱.۱ اگر (X, d) یک فضای متریک و $M \subset X$ باشد، خانواده $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ از مجموعه‌های باز X یک پوشش باز برای M گوییم هرگاه $M \subseteq \bigcup_{\alpha\in J} G_\alpha$.

تعریف ۱۴.۱.۱ اگر (X, d) یک فضای متریک و $M \subset X$ باشد، M را در X فشرده گویند هرگاه به ازای هر پوشش باز $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ برای M یک زیر پوشش متناهی از آن، M را بپوشاند.

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض کنید X و Y دو فضای برداری باشند. عملگر $A : X \to Y$ یک عملگر پیوسته کامل یا فشرده نامیده می‌شود هرگاه A یک عملگر پیوسته بوده و به ازای هر زیر مجموعه‌ی کراندار M از X، بستار تصویر M تحت عملگر A یک مجموعه فشرده باشد.

تعریف ۱۶.۱.۱ هرگاه (X, d) یک فضای متریک و $M \subset X$، M در X چگال است اگر هر نقطه X یا یک نقطه حدی M یا متعلق به M باشد.

تعریف ۱۷.۱.۱ تابع f را روی فاصله‌ی I محدب گویند هرگاه به ازای هر x_1 و x_2 در I داشته باشیم:

$$f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

تعریف ۱۸.۱.۱ تابع f را روی فاصله I مقعر گویند اگر به ازای هر x_1 و x_2 در I داشته باشیم:

$$f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

قضیه۱.۱.۱ اگر تابع f به ازای هر $x \in I$، در شرط $f''(x) < 0$ صدق کند آنگاه $f(x)$ روی فاصله I محدب می‌باشد. همچنین اگر تابع f به ازای هر $x \in I$، در شرط $f''(x) > 0$ صدق کند در این صورت $f(x)$ روی فاصله I مقعر می‌باشد و سوی تقعر منحنی به سمت yهای مثبت است.

۲.۱ تقریب توابع

تعریف۱.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی و $x, y \in X$ باشند. x را بر y عمود گوییم هرگاه برای $x \neq y$ داشته باشیم $(x, y) = 0$ وآن را با نماد $x \perp y$ نمایش می‌دهیم.
اگر به ازای هر $x, y \in A$ داشته باشیم:

$$(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \neq y, \\ \alpha > 0 & ; \quad x = y, \end{cases}$$

آنگاه زیرمجموعه‌ی A از X را متعامد گوییم .
اگر برای هر $x \in A$ داشته باشیم $\|x\| = 1$، مجموعه A را متعامد یکه یا نرمال گوییم .

قضیه۱.۲.۱ اگرf_1، f_2، ... و f_n دنباله‌ی متناهی از توابع متعامد نرمال (یکه) در $L^2(a,b)$ و $f \in L^2(a,b)$ باشند آنگاه α_1، α_2، ... و α_n ی وجود دارد که $\left\| f - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right\|_2$ مینیمم شود.
به$\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ تقریب کمترین مربعات گویند[۲۸].

اثبات: مطابق ارتباط نرم و ضرب داخلی می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right\|_2^2 &= (f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i, f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i) \\ &= (f,f) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (f_i, f) - \sum_{j=1}^{n} \bar{\alpha}_j (f, f_j) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \bar{\alpha}_j (f_i, f_j). \end{aligned}$$

از اینرو فرض می‌کنیم$\eta_i = (f, f_i)$. پس می‌یابیم:

$$\left\|f-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i\right\|_2^2=\|f\|_2^2-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{\eta}_i-\sum_{i=1}^{n}\bar{\alpha}_i\eta_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{\alpha}_i+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\bar{\eta}_i-\sum_{i=1}^{n}\eta_i\bar{\eta}_i$$
$$=\|f\|_2^2+\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\eta_i)(\bar{\alpha}_i-\bar{\eta}_i)-\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^2.$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\left\|f-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i\right\|_2^2=\|f\|_2^2-\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^2+\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i-\eta_i|^2.$$

این عبارت وقتی مینیمم است که برای $i=1,2,\dots,n$ داشته باشیم $\alpha_i=\eta_i$. دراین صورت داریم:

$$\left\|f-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i\right\|_2^2=\|f\|_2^2-\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^2.$$

لذا اگر $f\in L^2(a,b)$ و مجموعه‌ی $\{f_i\}_{i=1}^{n}$ یک دستگاه متعامد نرمال در $L^2(a,b)$ باشد آنگاه

$$\left\|f-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i\right\|_2,$$

حداقل است. به عبارت دیگر، اگر $f\simeq\sum_{i=1}^{n}(f,f_i)f_i$ ، آنگاه $\left\|f-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i\right\|_2$ حداقل است. □

۳.۱ انتقال حرارت

مقدار انرژی‌ای که قسمت گرمتر یک جسم یا ماده آن به قسمت سردتر می‌دهد را حرارت گویند. علم انتقال حرارت، شدت انتقال این انرژی بین دو جسم یا ماده در حالت‌های مختلف جامد، مایع یا گاز را ارائه یا پیش‌بینی می‌کند.

انتقال حرارت، انتقال انرژی است که در اثر اختلاف درجه حرارت به وجود می‌آید. به عبارت دیگر تماس فیزیکی بین دو لایه در درجه حرارت‌های مختلف، باعث تغییراتی در انرژی جسم می‌شود که ممکن است تغییرات در سرعت مولکول‌ها یا اتم‌های جسم باشد.

شاخه‌ای از علم که به تأثیر متقابل گرما و کار در یک سیستم با محیط اطراف آن می‌پردازد، ترمودینامیک نامیده می‌شود. در ترمودینامیک گرما شکلی از انرژی است که از کران سیستم ترمودینامیکی به واسطه اختلاف دمایی که بین سیستم و محیط اطرافش وجود دارد، عبور می‌کند.

به عبارت دیگر حرارت همان انرژی انتقال یافته از خط کرانه‌ای سیستم است که اختلاف دما باعث انتشار و افزایش آن می‌شود. چون گرما، انرژی در حال انتقال است می‌توان درباره میزان انتقال حرارت و یا جریان گرما بحث کرد.

۱.۳.۱ مکانیسم‌های انتقال حرارت

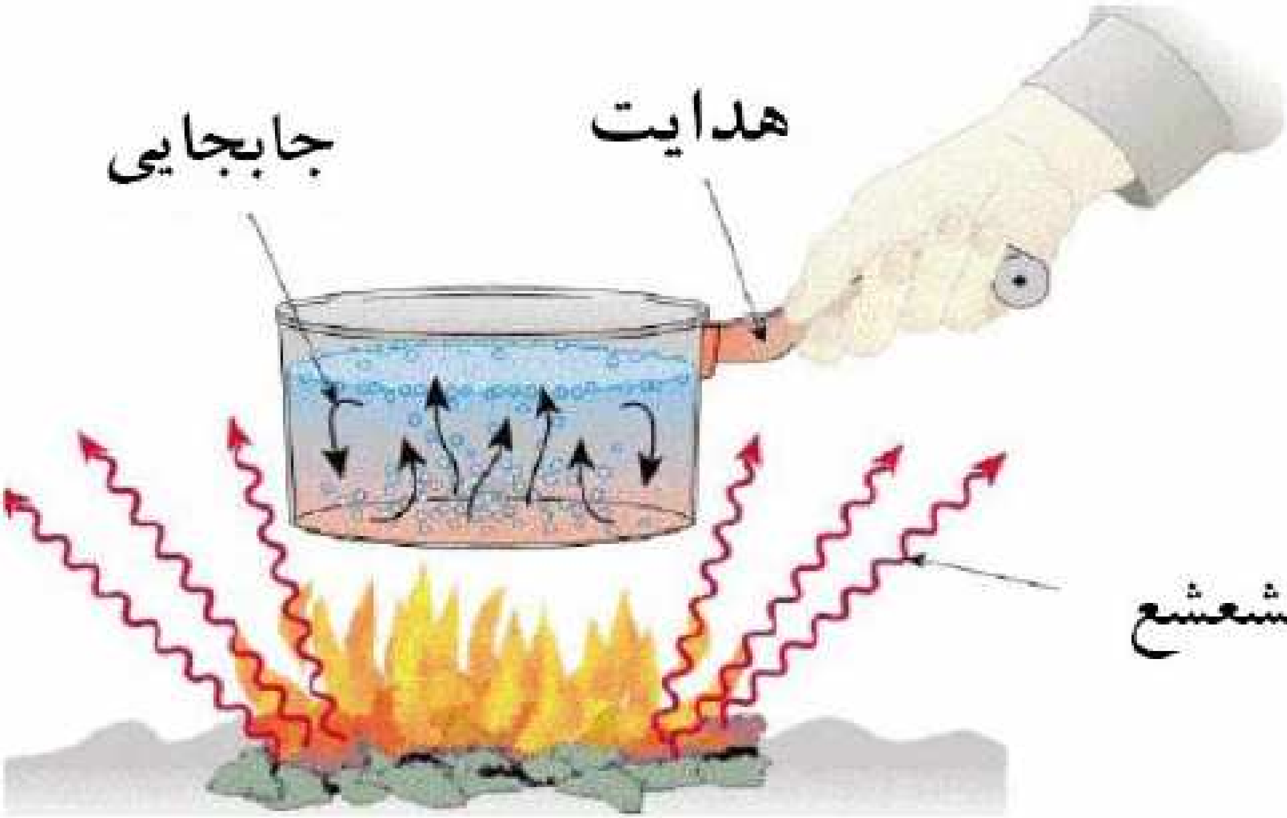
مکانیسمی که توسط آن، حرارت به صورت تبدیل حرارتی یا یک سیستم تبدیل انرژی، انتقال می‌یابد، کاملاً پیچیده است. با این وجود، انتقال حرارت بر اساس سه مکانیسم مبنایی و مستقل صورت می‌گیرد:

۱ــ هدایت یا رسانش
۲ــ تشعشع یا تابش
۳ــ جابجایی یا همرفت

توجه کنید که در هر یک از سه روش فوق باید اختلاف درجه حرارت موجود باشد تا انتقال صورت گیرد. جهت انتقال همواره از جسم گرم به سرد است.

هدایت

هدایت، فرآیندی از انتقال حرارت است که توسط جنبش مولکول‌ها صورت می‌گیرد و در بعضی موارد توسط جریان آزاد الکترون‌ها و ارتعاشات شبکه‌ای، از میان یک جسم (جامد، مایع یا گاز) از ناحیه‌ی با دمای بالاتر به ناحیه‌ی با دمای پایین‌تر انجام می‌شود. انتقال حرارت از طریق هدایت، ممکن است در اثر تماس یا اتصال بین دو جسم با دماهای متفاوت صورت گیرد. مکانیسم انتقال حرارت هدایتی در مایعات و گازها، بر اثر انتقال انرژی جنبشی توسط حرکت مولکول‌ها انجام می‌شود. با انتقال انرژی گرمایی به سیال، انرژی داخلی آن افزایش می‌یابد. افزایش انرژی جنبشی ناشی از ارتعاش مولکول‌ها، توسط افزایش دما اندازه‌گیری می‌شود. افزایش دمای اندازه‌گیری شده، معرف افزایش انرژی جنبشی مولکول‌ها می‌باشد. لذا، هدایت گرمایی در اثر انتقال انرژی جنبشی از مولکول‌های با فعالیت زیاد در نواحی با دمای بالا به مولکول‌های واقع در نواحی با دمای پایین‌تر، در اثر برخوردهای متوالی صورت می‌گیرد. به بیان دیگر، هدایت گرما در جامداتی که ساختمان کریستالی دارند به انتقال انرژی ناشی از ارتعاش شبکه‌ها و حرکت توده الکترون‌های آزاد وابسته است. به طور کلی، انتقال انرژی از حرکت الکترون‌های آزاد به مراتب بیشتر از انرژی منتقل شده



شکل (۱.۱): مکانیسم‌های انتقال حرارت

توسط حرکت مولکول‌ها و ارتعاش شبکه‌ای است.

تشعشع

تشعشع حرارتی و به بیان ساده تابش، انتقال حرارتی به شکل امواج الکترومغناطیس است. به طور کلی هر جسم در اثر دمایی که دارد امواج الکترومغناطیسی از خود متساعد می‌کند و این امواج، گرمای جسم را به محیط و اجسام اطراف منتقل می‌کند و همیشه قابلیت جذب این انرژی را توسط تشعشع دارا می‌باشد. انتقال حرارت به شیوه تابش در اجسام انجام می‌شود و همچنین تابش قادر به عبور از میان انواع مواد مانند شفاف و نیمه شفاف و همین طور خلأ می‌باشد. این در حالی است که انتقال گرما به طریق هدایت گرمایی به یک محیط مادی نیاز ضروری دارد. به عنوان مثال یک

جسم گرم مانند یک گرم کننده در داخل یک اتاق را در نظر می‌گیریم. نحوه‌ی انتقال حرارت از این گرم کننده به محیط اطرافش بیشتر از نوع تشعشع می‌باشد. همچنین به دلیل جریان هوا، انتقال حرارت به شیوه همرفت (جابجایی) نیز وجود دارد.

همرفت

در انتقال حرارت به وسیله همرفت، مولکول‌ها متحرک بوده و انرژی حرارتی را با خود جابه‌جا می‌کنند. در این حالت قسمتی از سیال با قسمت دیگر مخلوط شده و عمل همرفت انجام می‌پذیرد. اگر در مایعات و گازها، جنبش و حرکت سیال قابل ملاحظه نباشد، مکانیسم انتقال حرارت به صورت هدایت می‌باشد. با این وجود، اگر سیال، حرکت ماکروسکوپی داشته باشد انرژی همچنین می‌تواند به شکل انرژی داخلی توسط حرکت سیال منتقل گردد که این روش انتقال، همرفت است.

جهت مطالعه بیشتر می‌توان به مرجع [۱۳]، مراجعه نمود.

۲.۳.۱ معادله انتقال حرارت

در این قسمت، روش به دست آمدن معادله‌ی معروف به معادله گرما به طور مختصر شرح داده می‌شود. برای آشنایی بیشتر می‌توان به مرجع [۱۳]، مراجعه نمود.

اگر گرادیان درجه حرارت در یک جسم وجود داشته باشد، آزمایش نشان می‌دهد که از قسمت گرم به قسمت سرد انتقال انرژی خواهیم داشت. شدت این انتقال انرژی برای واحد جسم با گرادیان درجه حرارت متناسب است، یعنی:

$$\frac{q}{A} \sim \frac{\partial u}{\partial x},$$

که برای ایجاد تساوی، ضریب k را در نظر گرفته و می‌یابیم:

$$q = -kA\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{۱}$$

در رابطه فوق، q شدت جریان حرارتی، A سطح جسم و $\frac{\partial u}{\partial x}$ گرادیان درجه حرارت می‌باشد. علامت منفی در رابطه (۱) بدین جهت است که جهت جریان حرارتی خلاف جهت افزایش درجه حرارت در جسم است. اگر سیستم جریان حرارتی ثابت باشد، یعنی درجه حرارت نقاط مختلف بر حسب زمان تغییر نکند و فقط انتقال حرارت در جهت محور x صورت پذیرد، مسأله ساده بوده و کافی است از رابطه (۱) انتگرال‌گیری کنیم. ولی اگر درجه حرارت در جسم بر حسب زمان تغییر کند و یا اگر