بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت معلم

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

پایان نامهٔ کارشناسی‌ارشد

ریاضی محض (آنالیز)

عنوان

ویژگی‌های نگاشت‌های ناگسترده روی فضاهای باناخ

استاد راهنما:

دکتر علیرضا مدقالچی

پژوهش :

راضیه فرخزاد رستمی

دی ۱۳۸۵

تاریخ :
شماره :
پیوست :
واحد :

بسمه تعالی

دانشکده علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

دانشگاه تربیت معلم

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان نامه خانم راضیه فرخزاد رستمی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض تحت عنوان :

ویژگی های نگاشت های ناگسترده روی فضاهای باناخ

درروز شنبه مورخ ۸۵/۱۰/۳۰ دردانشکده علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجه آزمون به شرح زیر تعیین می گردد .

نمره این آزمون هیجده و نیم (۱۸/۵) می باشد .

۱- عالی ☑
۲- بسیار خوب ☐
۳- خوب ☐
۴- قابل قبول ☐
۵- غیر قابل قبول ☐

استاد راهنما	داور داخلی	داور خارجی
دکتر علیرضا مدقالچی	دکتر حکیمه ماهیار	دکتر عبدالحمید ریاضی

جواد لآلی
رئیس دانشکده علوم ریاضی
و مهندسی کامپیوتر

۱۳۸۷/۲/۱۹

تهران : خیابان طالقانی ، بعد از چهار راه بهار ، شماره ۵۹۹ ، کدپستی ۱۵۶۱۸ تلفن : ۷۷۵۰۷۷۷۲- فاکس : ۷۷۶۰۲۹۸۸
کرج : خیابان شهید بهشتی ، میدان دانشگاه ، دانشگاه تربیت معلم ، کدپستی ۳۷۵۵۱-۳۱۹۷۹ تلفن : ۴۵۷۹۶۰۰-۰۲۶۱

من لم يشكر المخلوق لم يشكر الخالق

مجموعهٔ حاضر درسی است بسیار ناقص که شاگردی کوچک به محضر استادان بزرگ خود پس می‌دهد، « تا چه قبول افتد و چه در نظر آید».

دین عظیمی که پدر، مادر و اساتید گرانقدر بر من دارند، گرانبارتر از آن است که با الفاظ و کلمات قابل ادا باشد، ولی این کمترین کاری است که از من ساخته است.

پس از تقدیر از پدر و مادرم که همواره وام دار مهرشان هستم، از استاد راهنمای گرامی آقای دکتر مدقالچی، سپاسگزارم که در تمام مراحل تدوین این مجموعه

مرا از همراهی و نظرات روشنگرانهٔ خود بهره‌مند ساختند و قبول زحمت فرمودند.

در بیشتر رشته‌های علمی هر نسل ساخته‌های نسل قبل را ویران و رشته‌های آن نسل را پنبه می‌کند. فقط در ریاضیات است که هر نسل طبقهٔ جدیدی بر ساختمان قدیم می‌افزاید.

هرمان هانکل

چکیده

بحث اساسی در این پایان نامه در مورد فضاهای باناخ به طور یکنواخت نامربع و پیمانهٔ نزدیکی به همواری یکنواخت یک فضای باناخ است که ابتدا آنها را به طور مختصر تعریف می‌کنیم.

فضای باناخ X به طور یکنواخت نامربع است اگر $\varepsilon_0(X) < 2$.($\varepsilon_0(X)$ مشخصهٔ تحدب فضای باناخ X است.)

اگر X یک فضای باناخ باشد پیمانهٔ نزدیکی به همواری یکنواخت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma_X(t) = \sup\{\inf_{n>1}(\frac{\|x_1 + tx_n\| + \|x_1 - tx_n\|}{2} - 1) \ : \ \text{دنباله پایه در } B_X \text{ است } \{x_n\}\}$$

و قرار می‌دهیم:

$$\Gamma'_X(0) = \lim_{t\to 0}\frac{\Gamma_X(t)}{t}\ .$$

در این پایان نامه نشان می‌دهیم که اگر پیمانهٔ نزدیکی به همواری یکنواخت ($\Gamma_X(t)$) یک فضای باناخ انعکاسی در رابطهٔ $\Gamma'_X(0) < 1$ صدق کند آنگاه هر زیرمجموعهٔ بستهٔ محدب و کراندار از X دارای ویژگی نقطهٔ ثابت برای نگاشت‌های ناگسترده است.

به ویژه ثابت می‌کنیم که فضاهای به طور یکنواخت نامربع این ویژگی را دارند. به عبارت دیگر ثابت می‌شود که فضاهای به طور یکنواخت نامربع به طور اکید در مجموعهٔ همهٔ فضاهای باناخ با $\Gamma'_X(0) < 1$، قرار می‌گیرند.

واژه‌های کلیدی: نگاشت‌های ناگسترده، نقاط ثابت، فضاهای به طور یکنواخت نامربع و نزدیک به همواری یکنواخت.

مقدمه

این پایان نامه شامل پنج فصل است و بحث اصلی آن در مورد نگاشت‌های ناگسترده است که در زیر تعریف شده است.

نگاشت‌هایی که فاصلهٔ بین هر جفت از نقطه‌ها و تصویر آنها افزایش نمی‌یابد نگاشت ناگسترده نامیده می‌شود.

از سال ۱۹۶۵ تلاش‌های چشمگیری در زمینهٔ گسترش قضیهٔ نقطهٔ ثابت برای نگاشت ناگسترده به ویژه در چارچوب فضاهای باناخ حقیقی انجام شده که منجر به نتایج بسیار گسترده‌ای شده است. در این پایان نامه نیز روی فضاهای باناخ حقیقی کار می‌کنیم.

فصل اول این پایان نامه به یادآوری مقدماتی از آنالیز حقیقی و آنالیز تابعی اختصاص دارد. در این فصل پایه شاوردر، دنبالهٔ پایه و نگاشت لیپ شیتسی[1] معرفی شده و ویژگی‌های توپولوژی ضعیف، توپولوژی ضعیف ستاره، قضیهٔ اصل انقباض باناخ و قضایایی در مورد فضای باناخ انعکاسی بررسی می‌شود.

در فصل دوم به معرفی و بررسی نگاشت‌های ناگسترده، ساختار نرمال و فضاهای باناخ اکیداً محدب و به طور یکنواخت محدب می‌پردازیم. در ادامهٔ این فصل تعریف می‌کنیم که اگر پیمانهٔ تحدب فضای باناخ X کوچکتر اکید از ۲ $(\varepsilon_\circ(X) < 2)$ باشد X را فضای باناخ به طور یکنواخت نامربع می‌گوییم. همچنین دو قضیهٔ اساسی زیر در مورد نقطهٔ ثابت نگاشت ناگسترده ثابت شده است.

قضیه ۱. فرض کنید K یک زیرمجموعهٔ بستهٔ کراندار و محدب از یک فضای به طور یکنواخت محدب است. اگر $T : K \longrightarrow K$ نگاشت ناگسترده باشد آنگاه T یک نقطهٔ ثابت دارد.

---

[1] Lipschitzian

اف. براودر[۲] و دی. گاود[۳] هر یک جداگانه قضیهٔ بالا را ثابت کردند. در همین زمان نتایج بیشتری توسط دابلیو.آ. کیرک[۴] ثابت شده است.

قضیه ۲. فرض کنید K یک زیرمجموعهٔ محدب و فشردهٔ ضعیف از یک فضای باناخ با ساختار نرمال است. اگر $T : K \longrightarrow K$ نگاشت ناگسترده باشد آنگاه T یک نقطهٔ ثابت دارد.

ساختار نرمال یک ویژگی هندسی است که تا حدودی بیشتر از ویژگی تحدب یکنواخت عمومیت دارد.

در [۴۱] جزئیاتی از شرایط کافی برای این ویژگی همانند ویژگی‌های پایدار آنها، بررسی شده است.

برای ساده کردن عبارت بالا و قضیه‌های مشابهٔ دیگر معمول است که بگوییم یک فضای باناخ X برای نگاشت‌های ناگسترده ویژگی نقطهٔ ثابت دارد (به طور مختصر FPP) هر گاه هر خودنگاشت ناگسترده از هر زیرمجموعهٔ ناتهی، بسته، محدب و کراندار K از X، یک نقطهٔ ثابت داشته باشد. هر گاه چنین حالتی برای هر زیرمجموعهٔ محدب و فشردهٔ ضعیف K از X برقرار باشد می‌گوییم X برای نگاشت‌های ناگسترده ویژگی نقطهٔ ثابت ضعیف (به طور مختصر $WFPP$) دارد. واضح است که این دو ویژگی برای فضای‌های باناخ انعکاسی یکسان هستند.

پایان این فصل نیز به اثبات قضیهٔ لیندشتراس[۵] و تزفرری[۶] که خود یک قضیهٔ اساسی برای اثبات قضیهٔ اصلی این پایان نامه می‌باشد می‌پردازیم.

مقالهٔ زیر مقالهٔ اصلی استفاده شده در این پایان نامه است که فصل‌های بعدی بر اساس آن تنظیم شده است.

---

[۲] F. Browder
[۳] D. Göhde
[۴] W.A. Kirk
[۵] Lindenstrass
[۶] Tzafriri

[۱۹] J. Garcia-Falset, E. Llorens-Fuster, E.M. Mazcuñan-Navarro, *Uniformly nonsquare Banach spaces have the fixed point property for nonexpansive mappings J. Fun. Anal* **233** (2006) P. 494-514.

در فصل سوم و چهارم ضریب‌های $R(a,X)$، $M(X)$ و $MW(X)$ تعریف شده است و با بررسی رابطهٔ بین آنها ثابت می‌کنیم که اگر X یک فضای باناخ با $MW(X) > ۱$ باشد آنگاه X ویژگی $WFPP$ دارد.

و اما نتیجهٔ زیر که هدف اصلی این پایان نامه است در فصل پایانی ثابت می‌شود.

اگر X یک فضای باناخ به طور یکنواخت نامربع باشد آنگاه $M(X) > ۱$ و در نتیجه X ویژگی FPP دارد.

در سال ۱۹۸۱ دی. آلسپچ[۷] [۳۲] یک نگاشت ناگسترده روی زیرمجموعه‌ای از $L^۱[۰,۱]$ که محدب و فشردهٔ ضعیف نیست پیدا کرد که فارغ از نقطهٔ ثابت است و تا به حال نیز به عنوان مثال برجسته‌ای در فضاهای باناخ (غیر انعکاسی) که ویژگی $WFPP$ ندارد شناخته شده است.

از طرفی دیگر علی‌رغم این که بی. موری[۸] قبل از ۱۹۸۲ [۱۱] نشان داد که هر زیرمجموعهٔ ناتهی، بسته، محدب و کراندار از فضاهای باناخ سوپرانعکاسی برای ایزومتری‌ها ویژگی FPP دارد، این که آیا فضای‌های باناخ انعکاسی ویژگی FPP دارند هنوز یک مسئلهٔ باز است. به علاوه درستی این مسئله برای فضاهای باناخ سوپرانعکاسی نیز ثابت نشده است.

از آنجا که هر فضای باناخ به طور یکنواخت نامربع $(\varepsilon_۰(X) < ۲)$ سوپرانعکاسی است، حالت خاصتر مسئلهٔ بالا به صورت زیر می‌باشد:

آیا $\varepsilon_۰(X) < ۲$ ویژگی FPP برای X نتیجه می‌دهد؟ این سئوال به طور دقیق در چندین مقاله مانند [۳۹،۲۶،۱۶،۱۵،۱۲،۸،۷] مطرح شده است.

طبق قضیهٔ براودر-گاود اگر X فضای باناخی باشد به طوری که $\varepsilon_۰(X) = ۰$، آنگاه X ویژگی FPP

---

[۷] D. Alspach

[۸] B. Maurey

دارد. به علاوه در سال ۱۹۷۰ کی. گوبل [۹] [۲۰] نشان داد که هر فضای باناخ X با $\varepsilon_{\circ}(X) < 1$ ساختار نرمال دارد و بنابراین دارای ویژگی FPP است.

از طرفی دیگر در سال ۱۹۷۲ دابلیو.ال. باینم[۱۰] نشان داد که روش ساختار نرمال برای اثبات ویژگی FPP فضاهای باناخ با $\varepsilon_{\circ}(X) < 2$ کافی نیست. او در [۶] خاطر نشان کرد که فضاهای باناخ $\ell_{2,\infty}$ در $\varepsilon_{\circ}(\ell_{2,\infty}) = 1$ صدق می‌کند اما ساختار نرمال ندارد.

به دنبال آن مسئلهٔ ویژگی FPP برای فضاهای باناخ به طور یکنواخت نامربع —بدون ساختار نرمال— به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفت. در ۳۰ سال اخیر فعالیت‌های زیادی در زمینهٔ قضیهٔ نقطهٔ ثابت متریک صورت گرفته است که شرایط کافی برای ویژگی FPP، در فضاهای باناخ (سوپر)انعکاسی که قویتر از شرط $\varepsilon_{\circ}(X) < 2$ (به عنوان مثال به [۷،۸،۱۲،۱۷—۱۵،۲۷—۲۴،۳۸،۳۹،۴۲] رجوع شود.) است را مورد بررسی قرار داده‌اند.

در فصل آخر از این مقاله نشان می‌دهیم که اگر X یک فضای باناخ انعکاسی باشد و $\Gamma_X(\circ) < 1$، که در آن Γ_X پیمانهٔ نزدیک به همواری یکنواخت X است، آنگاه X ویژگی FPP دارد. به علاوه می‌بینیم که فضاهای باناخ به طور یکنواخت نامربع ازجمله این فضاها هستند و با یک مثال نشان می‌دهیم که مجموعهٔ همهٔ فضاهای باناخی که $\Gamma'_X(\circ) < 1$ است اکیداً وسیعتر از مجموعهٔ همهٔ فضاهای باناخ به طور یکنواخت نامربع است.

روند برهان در این پایان نامه به صورت زیر است (که در اینجا (R) نشان دهندهٔ فضای باناخ انعکاسی

---

[۹] K. Goebel

[۱۰] W.L. Bynum

است و ضرایب دیگر در ادامهٔ این پایان نامه تعریف شده‌اند.).

$$\rho'_X(۰) < ۱ \ \ ([۲۰]) \iff X \text{ به طور یکنواخت نامربع است}$$

$$\implies (R) + \Gamma'_X(۰) < ۱$$

$$\iff (R) + MW(X) > ۱$$

$$\implies (R) + M(X) > ۱$$

$$\implies FPP\,.\ \ ([۱۰])$$

مراجع[11] اصلی مورد استفاده در این پایان نامه به قرار زیر است.

[۱۰] T. Dominguez-Benavides, Modulus of nearly uniform smoothness and Lindenstrauss formulae, *Glasgow Math. J.* **37** (2) (1995) P. 143-153.

[۱۱] T. Dominguez-Benavides, A geometrical coefficient implying the fixed point property and stability results, *Houston J. Math.* **22** (4) (1996) P. 835-849.

[۱۹] J. Garcia-Falset, The fixed point property in Banach spaces with the NUS-property, *J. Math. Anal. Appl.* **215** (2) (1997) P. 532-542.

[۲۲] K. Goebel, W.K. Kirk, Topics in metric fixed point theory.

[۳۴] T.J. Morrison, Functional Analysis an introduction to Banach spaces theory.

[۳۷] W. Rudin, Functional Analysis.

[11] سبک ارجاع به مطالب مندرج در متن پایان نامه، به شیوهٔ نگارش فارسی است. به عنوان نمونه برای ملاحظهٔ «قضیه ۲.۱.۳» باید به فصل ۳، بخش اول مراجعه شود. اما شیوهٔ ارجاع به مراجع لاتین، به همان سبک لاتین است.مثلاً برای ملاحظهٔ [۱۷, ۲.۱]، باید به بخش دوم از مرجع شمارهٔ ۱۷، مراجعه شود.

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش‌نیازها

در این فصل که شامل سه بخش است، مفاهیمی چون غلاف محدب، فضای دوگان، فضای انعکاسی، توپولوژی ضعیف و ضعیف ستاره، نگاشت لیپ شیتس و انواع آن و تعدادی از قضایای مربوط که در فصل‌های بعد مورد استناد قرار می‌گیرد را به اختصار می آوریم.

ابتدا پیش نیازهای لازم و به ویژه تعاریف پایه را بیان می کنیم :

اگر A یک زیرمجموعه از فضای متریک (M,ρ) باشد و اگر $x \in M$، در این صورت نمادهای $diam\ A$ و $dist(x,A)$ را به ترتیب برای نشان دادن قطر A و فاصلهٔ x از A به کار می‌بریم، یعنی،

$$diam\ A = sup\{\rho(x,y) :\ x,y \in A\}$$

و

$$dist(x,A) = inf\{\rho(x,y) :\ y \in A\}.$$

همچنین با $B(x;r)$ گوی بسته به مرکز x و شعاع $r > \circ$ را نشان می دهیم، یعنی،

$$B(x;r) = \{y \in M : \rho(x,y) \leq r\}$$

و B_M و S_M به ترتیب گوی واحد و کرهٔ واحد را نشان می دهند، در واقع S_M مرز B_M است.
اگر X یک فضای نرمیده با نرم $\|.\|$ باشد همهٔ تعاریف بالا روی فضای $(X, \|.\|)$ با متر $\rho(x,y) = \|x-y\|$ بر قرار است.
فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از فضای باناخ X است. کوچک‌ترین زیرمجموعهٔ محدب از X، که شامل A می باشد را با $conv\ A$ نشان می‌دهیم که **غلاف محدب** نامیده می‌شود، یعنی،

$$conv\ A = \bigcap\{K \subseteq X:\ A \subseteq K, \text{محدب است } K\},$$

به علاوه $x \in convA$ اگر وتنها اگر x به صورت $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ که $x_i \in A$، $n \in \mathbb{N}, \lambda_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. [۳۶; P. ۳۶]
بستار $convA$، $\overline{conv}\ A$، **غلاف بستهٔ محدب** A نامیده می‌شود.

$$\overline{conv}\ A = \bigcap\{K \subseteq X:\ A \subseteq K, \text{بسته و محدب است } K\}.$$

۱.۱ فضاهای دوگان و انعکاسی

دراین بخش بحث مختصری از فضاهای دوگان و فضاهای انعکاسی می‌آوریم که از مراجع [۲۱]، [۳۳] و [۳۶] گرفته شده است.

قضیه ۱.۱.۱ . (مازور)[1]. [۱.۱ ;۲۱] اگر $\overline{A}$ فشرده باشد آنگاه $\overline{conv}\ A$ نیز فشرده است.

برای دو فضاهای باناخ Y, X فضای همهٔ عملگرهای خطی کراندار (پیوسته) از X به Y را با $L(X,Y)$ نشان می‌دهیم.

---

[1] Mazur's

نرم عملگر $T \in L(X,Y)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\|T\| = \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq ۰\} = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| = ۱\}.$$

قضیهٔ معروفی است که اگر Y فضای باناخ باشد آنگاه $(L(X,Y), \|.\|)$ نیز فضای باناخ است.

فضای دوگان یا فضای مزدوج X^* از فضای باناخ X، فضای $X^* = L(X,\mathbb{R})$ است. اعضای X^* تابعک‌های خطی پیوسته نامیده می‌شوند.

برای $x^* \in X^*$ و $x \in X$، نماد زیر را به کار می‌بریم.

$$x^*(x) = < x, x^* >$$

فضای $X^{**} = L(X^*,\mathbb{R})$ فضای دوگان دوم فضای باناخ X نامیده می‌شود. اگر $x \in X$ ثابت باشد آنگاه $x^* \longmapsto < x, x* >$ یک تابعک خطی پیوسته روی X^* تعریف می‌کند; بنابراین x با یک عضو از X^{**} متناظر است. نگاشت $x \longmapsto x^{**}$ نشاندن **"طبیعی یا کانونی"** از X در X^{**} نامیده می‌شود.

قضیه ۲.۱.۱ .(هان-باناخ).[۱; ۲۳.۲٦] اگر x یک بردار از فضای نرمیدهٔ X باشد، آنگاه یک تابعک خطی پیوسته x^* روی X(در X^*)، وجود دارد به طوری که $\|x^*\| = ۱$ و $x^*(x) = \|x\|$.

با توجه به قضیهٔ فوق نشاندن طبیعی همیشه ایزومتری خطی است. اگر پوشا باشد آنگاه X انعکاسی گفته می‌شود و می‌نویسیم $X = X^{**}$.

۲.۱ توپولوژی ضعیف و ضعیف ستاره

این بخش شامل تعریف‌ها و ویژگی‌های مختصری از توپولوژی ضعیف و ضعیف ستاره می‌باشد که برگرفته از مراجع [۲۱] و [۳۳] است.

توپولوژی ضعیف روی فضای باناخ X، توپولوژی تولید شده به وسیلهٔ خانواده‌ای از نیم‌نرم‌های $\{P_{x^*}\}, x^* \in X^*$ است که در آن،

$$P_{x^*}(x) = |< x, x^* >| , \qquad (x \in X) .$$

به طور مشابه، توپولوژی ضعیف ستاره روی X^*، تولید شده با نیم‌نرم‌های $\{P_x\}$ $x \in X,$ است که

$$P_x(x^*) = | < x, x^* > | , \qquad (x^* \in X^*) .$$

بهتر است توپولوژی ضعیف روی X تعریف شود و سپس همین توپولوژی (توپولوژی ضعیف) روی X^* تعریف شود. در واقع، توپولوژی ضعیف روی X، $\sigma(X, X^*)$ ضعیف‌ترین توپولوژی است که تحت آن همهٔ تابعک‌های خطی روی آن یعنی اعضای X^* پیوسته‌اند. توپولوژی ضعیف روی X^*، $\sigma(X^*, X^{**})$ و توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* $\sigma(X^*, X),$ است که این دو توپولوژی یکی نیستند و در حالت کلی توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* از توپولوژی ضعیف روی آن، ضعیفتر است.

X^*, X هر دو فضاهای موضعاً محدب و توپولوژیکی خطی نسبت به توپولوژی ضعیف و ضعیف ستاره به ترتیب هستند.

یک تور $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ به عضوی از X مانند x در توپولوژی ضعیف همگراست اگر وتنها اگر برای هر $x^* \in X^*$، $\lim\limits_{\alpha} < x_\alpha, x^* > = < x, x^* >$، که در این صورت می‌گوییم تور $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ همگرای ضعیف به x است و می‌نویسیم:

$$w - \lim_{\alpha} x_\alpha = x$$

و یا

$$x_\alpha \stackrel{w}{\longmapsto} x .$$

به طور مشابه، یک تور $\{x^*_\alpha, \alpha \in A\}$ در X^* همگرا به $x^* \in X^*$ در توپولوژی ضعیف ستاره است اگر وتنها اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم $\lim\limits_{\alpha} < x, x^*_\alpha > = < x, x^* >$، که دراین صورت می‌نویسیم:

$$w^* - \lim_{\alpha} x^*_\alpha = x^*$$

و با نماد $\stackrel{w^*}{\longmapsto}$ نشان می‌دهیم، به عبارتی دیگر، $x^*_\alpha \stackrel{w^*}{\longmapsto} x^*$.

حال برخی از ویژگی‌های پایه‌ای توپولوژی ضعیف و ضعیف ستاره را برقرار است یادآوری می‌کنیم.

۱) یک زیرمجموعهٔ محدب K از فضای باناخ X، بسته است اگر وتنها اگر بسته ضعیف باشد.

۲) اگر K یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ ضعیف از X باشد آنگاه $\overline{conv}\ K$ نیز فشردهٔ ضعیف است.

۳) (قضیهٔ آلاغلو[۲]). گوی واحد $B(\circ;1)$ در فضای دوگان X^* در توپولوژی ضعیف ستاره فشرده است.

ویژگی (۳) نشان می‌دهد که هر گوی بسته و یا هر اشتراکی از گوی‌های بسته در فضای دوگان، w^* ـفشرده هستند.

اگر X انعکاسی باشد آنگاه $X = X^{**}$. بنابراین قضیهٔ آلاغلو برای فضای باناخ انعکاسی به صورت زیر برقرار است.

۴) اگر X انعکاسی باشد آنگاه هر گوی در X نسبت به توپولوژی ضعیف فشرده است.

از ویژگی (۴) نتیجه می‌شود که یک فضای باناخ X، انعکاسی است اگر وتنها اگر گوی واحد آن در توپولوژی ضعیف، فشرده باشد.[قضیه ۳.٦ ;۳۳]

واضح است که هر زیرمجموعهٔ کراندار از یک فضا داخل گویی از آن فضا قرار می‌گیرد که اگر این فضا انعکاسی باشد بنا به ویژگی (۴) آن گوی فشردهٔ ضعیف است، بنابراین از ویژگی (۱) نتیجه می‌شود که هر زیرمجموعهٔ محدب، بسته و کراندار در یک فضای انعکاسی فشرده ضعیف است.

۵) در فضای موضعاً محدب، هر زیرمجموعهٔ کراندار به طور ضعیف کراندار است و با لعکس .

٦) (قضیه ابرلین‌ـاسمولین[۳]). برای هر زیرمجموعهٔ A از فضای باناخ X، گزاره‌های زیر معادلند:

(i) هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ در A زیردنبالهٔ همگرای ضعیف دارد.

(ii) هردنبالهٔ $\{x_n\}$ در A نقطهٔ بستار ضعیف در X دارد.

---

[۲] Alaoghlu

[۳] Eberlein-Smulian

(iii) بستار ضعیف $\overline{A}^w$ از A، فشردهٔ ضعیف است.

۷) یک فضای باناخ X انعکاسی است اگر وتنها اگر یکی از گزاره‌های زیربرقرار باشد:

(i) X^* انعکاسی است.

(ii) $B(\circ;1)$ فشردهٔ ضعیف در X^* است.

(iii) هر دنبالهٔ کراندار در X، زیردنبالهٔ همگرای ضعیف دارد.

(iv) (جیمز[۴] ۱۹۵۷). برای هر $x^* \in X^*$، $x \in B(\circ;1)$ ای وجود دارد که $\| x^* \| = x^*(x)$.

(v) (جیمز ۱۹۶۴). برای هر زیرمجموعهٔ کراندار، بسته و محدب K از X و هر $x^* \in X^*$، $x \in K$ ای وجود دارد به طوری که $x^*(x) = \sup\{x^*(y) : \ y \in K\}$.

(vi) (اسمو لین ۱۹۳۹). برای هر دنبالهٔ $\{K_n\}$ از زیرمجموعه‌های ناتهی، بسته، محدب وکراندار از X، $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

دنبالهٔ $\{e_n\}$ در فضای باناخ X، **پایهٔ شاودر** برای X نامیده می‌شود اگر برای هر $x \in X$، دنبالهٔ منحصر به فرد $\{\xi_n\} = \{\xi_n(x)\}$ از اسکالرها وجود داشته باشد به طوری که

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \xi_n e_n.$$

بدیهی است که همهٔ e_n ها مستقل خطی هستند، چون در غیر این صورت دنبالهٔ ناصفر $\{\xi_n\}$ وجود دارد به طوری که $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n = \circ$، که با منحصر به فرد بودن دنبالهٔ $\{\xi_n\}$ برای عضو صفر از فضای باناخ X، تناقض دارد.

دنبالهٔ $\{x_n\}$، دنبالهٔ **پایه** برای X است اگر $\{x_n\}$ پایهٔ شاودر برای فضای بستهٔ تولید شده توسط $\{x_n\}$ باشد.[۳۳]

---

[۴] James

قضیه ۱.۲.۱ . (گریم بلوم-نیکولسکی [۵]).[۳۳; ۵.۴] اگر دنبالهٔ $\{x_n\}$ یک دنباله در فضای باناخ X باشد به طوری که اگر $x^* \in X^*$ ای باشد که برای هر n، $x^*(x_n) = ۰$ نتیجه شود $x^* = \Theta$ (Θ تابعک صفر، عضو X^* است) ; آنگاه دنبالهٔ $\{x_n\}$، پایهٔ شاوردر برای X است اگر وتنها اگر ثابت $M \geq ۱$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر m و برای هر $n \leq m$ و برای اسکالرهای "$\alpha_۱, \alpha_۲, ..., \alpha_m$" دلخواه،

$$\|\sum_{i=۱}^{n} \alpha_i x_i\| \leq M \|\sum_{i=۱}^{m} \alpha_i x_i\|.$$

ثابت M در قضیهٔ بالا، ثابت پایهٔ دنبالهٔ $\{x_n\}$ گفته می‌شود.

قضیه ۲.۲.۱.[۳۳; ٦.۱۵] یک فضای باناخ X، انعکاسی است اگر وتنها اگر هر زیرفضای بسته از X با یک پایه شاوردر، انعکاسی باشد.

قضیه ۳.۲.۱.[۳۰; ۵.b.۱] اگر X یک فضای باناخ انعکاسی با پایهٔ شاوردر $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ باشد آنگاه دنبالهٔ $\{x_n\}$، دنبالهٔ پوچ ضعیف است، به عبارت دیگر، $x_n \overset{w}{\longmapsto} ۰$.

نتیجه ۴.۲.۱.[۳۳; ۸.۵] اگر X یک فضای باناخ و $\{y_n\}$ دنباله‌ای در X باشد که $y_n \overset{w}{\longmapsto} ۰$ و $\inf\{\|y_n\| : n \in \mathbb{N}\} > ۰$، آنگاه زیردنباله‌ای از $\{y_n\}$ وجود دارد که دنبالهٔ پایه است.

۳.۱ اصل انقباض باناخ

این بخش مختصری از نگاشت‌های لیپ شیتس و انواع این نگاشت‌ها همراه با قضیه‌هایی در این زمینه می‌باشد .

اگر (M, ρ) یک فضای متریک باشد، گوییم نگاشت $T : M \longrightarrow M$ لیپ شیتسی [٦] است اگر $K \geq ۰$ ای وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x, y \in M$،

$$\rho(Tx, Ty) \leq K\rho(x, y) .$$

[۵] Grymblyum-Nikol'skii

[٦] Lipschitzian