بسم الله الرحمان الرحيم

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه دکتری

ریاضی محض (گرایش آنالیز)

کوهمولوژی پیوسته و کراندار نیمگروههای توپولوژیک

نگارش

میثم میثمی صدر

استاد راهنما

دکتر عبدالرسول پورعباس

استاد مشاور

دکتر عبدالحمید ریاضی

زمستان ۱۳۸۷

تقدیم به پدر و مادرم

سپاسگزاری

از استاد راهنمای گرامی جناب آقای دکتر پورعباس کمال تشکر و قدردانی را دارم. همچنین از استاد مشاور گرامی جناب آقای دکتر ریاضی سپاسگزارم.

چکیده

سه نظریه کوهمولوژی با عنوانهای پیوسته، پیوسته و کراندار، و ضعیف* پیوسته و کراندار، برای نمایشهای نیمگروههای توپولوژیک روی فضاهای برداری توپولوژیک خاص، تعریف می‌کنیم. روابط بین گروههای کوهمولوژی تعریف شده با یکدیگر و با گروههای کوهمولوژی هاخشیلد جبرهای باناخ نیمگروهی را بررسی می‌کنیم. مفاهیم کوهمولوژیکی میانگین‌پذیری جانسون و میانگین‌پذیری تقریبی جانسون را برای نیمگروههای توپولوژیک تعریف می‌کنیم. همچنین، برخی کاربردها و مثالهای محاسباتی را بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی:

۱. کوهمولوژی گروهها (cohomology of groups)

۲. نیمگروه توپولوژیک (topological semigroup)

۳. کوهمولوژی هاخشیلد (Hochschild cohomology)

۴. جبر باناخ نیمگروهی (Banach semigroup algebra)

۵. میانگین‌پذیری (amenability)

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمه

هر کسی که با ریاضی آشنا باشد، می‌داند که همولوژی[۱] یکی از اصلی‌ترین ابزارهای کلاسبندی[۲] است. البته در اینجا همولوژی به معنای عام مورد استفاده قرار گرفته است، که مشتمل است بر : نظریه‌های همولوژی فضاها و ساختارهای جبری، جبر همولوژیک[۳]، جبر هموتوپیک[۴] یا نظریه‌های هموتوپی (که گاهی همولوژی غیر خطی نامیده می‌شود)، انواع نظریه‌های K، هلونومی[۵] و $\cdots$. بنابراین همولوژی بخش بسیار عظیمی از ریاضیات را تشکیل می‌دهد، زیرا یکی از اصلی‌ترین مسائل ریاضی مسئله کلاسبندی و رده‌بندی اشیاء (هندسی) مختلف می‌باشد.

همولوژی یکی از اصلی‌ترین ملاحظات ریاضیدانان برتر می‌باشد: پوآنکاره (Poincare)، گروتندیک (Grothendicke)، سر (Serre)، عطیه، ویتن (Witten)، و البته آلن کن (Alain Connes).

بسیاری از مطالب و قضیه‌های عمیق (آنهایی که مفاهیم و نظریه‌های بظاهر مختلف را پیوند می‌دهند) دارای فرمولبندی همولوژیکی می‌باشند مانند: قضیه‌های اندیس عطیه—سینگر[۶]، قضیه‌های ریمان—روچ[۷]، اعداد بتی[۸]، دوگانی پوآنکاره[۹]، حدس نوویکوف[۱۰]، نامتغیرهای L^2، کلاسهای مشخصه[۱۱]، فرمولهای نقطه ثابت لیپسچیتز[۱۲] و $\cdots$.

و بعنوان آخرین تاکید بر اهمیت همولوژی، توجه کنید که اصلی‌ترین ابزار بررسی هندسه جبری و هندسه ناجابجایی، دو نظریه‌ایی که با یکدیگر توانایی یکپارچه‌سازی علم ریاضی را دارند، همولوژی است.

---

۱ Homology
۲ Classification
۳ Homological Algebra
۴ Homotopical Algebra
۵ Holonomy
۶ Atiyah-Singer
۷ Riemann-Roch
۸ Betti numbers
۹ Poincare duality
۱۰ Novicov conjecture
۱۱ characteristic class
۱۲ Lefschetz fixed point formulas

اما، همولوژی چیست؟
بطور کلی، یک نظریه همولوژی به هر شیء از دسته‌ای از اشیاء (رسته[۱۳]) یک گروه آبلی یا شیئی مانند آن نسبت می‌دهد. این گروههای آبلی نقش پایا[۱۴] را بازی می‌کنند. بدین ترتیب، می‌توان با مطالعه تفاوت گروهها به تفاوت بین اشیائی که به آنها نسبت داده شده‌اند، پی‌برد.
ما سه نوع کوهمولوژی برای نیمگروههای توپولوژیک یا بطور دقیق‌تر برای نمایشهای نیمگروههای توپولوژیک معرفی خواهیم کرد:
کوهمولوژی پیوسته و کراندار برای نیمگروههای توپولوژیک با مقادیر در یک فضای نیمنرمدار، کوهمولوژی پیوسته برای نیمگروههای هاسدورف با مقادیر در یک فضای برداری توپولوژیک و کوهمولوژی ضعیف* پیوسته و کراندار نیمگروههای توپولوژیک با مقادیر در دوگان یک فضای باناخ.
کوهمولوژی نوع اول برای مبحث آنالیز تابعی مناسب می‌باشد. کوهمولوژی نوع دوم بیشتر مناسب توپولوژی جبری است. کوهمولوژی نوع سوم برای مبحث میانگین‌پذیری نیمگروههای توپولوژیک بسیار مفید می‌باشد.

۱.۱ تاریخچه

کوهمولوژی گروهها به صورت محض، ابتدا توسط ایلنبرگ[۱۵] و مکلان[۱٦] در [۲۱] معرفی شد. آنها از کوهمولوژی مرتبه اول یک گروه G، برای بررسی مشتقها روی G استفاده کردند و با استفاده از کوهمولوژی مرتبه دوم G، تمام توسیعهای[۱۷] G را کلاسبندی کردند. برای بحثی مفصل در این زمینه کتاب [٦] را ببینید.
کوهمولوژی دیگری که بسیار مرتبط با کوهمولوژی ایلنبرگ و مکلان می‌باشد، کوهمولوژی حلقه‌ها با مقادیر در یک دومدول، تعریف‌شده توسط هاخشیلد[۱۸]، است. در واقع کوهمولوژی هاخشیلد یک حلقه گروهی $\mathbb{Z}(G)$ برابر کوهمولوژی گروه G می‌باشد.
کوهمولوژی کراندار یک گروه G همان کوهمولوژی معمولی G با مقادیر در $\mathbb{R}$ می‌باشد با این تفاوت که هم‌زنجیرها را باید کراندار در نظر گرفت. مفهوم کوهمولوژی کراندار برای گروهها توسط تراوبر[۱۹] و برای فضاهای توپولوژیک و منیفلدهای هموار توسط گراموف[۲۰] در [۳۱] معرفی شد. گراموف نشان داد که کوهمولوژی کراندار یک فضای توپولوژیک X و کوهمولوژی کراندار گروه پایه‌ای[۲۱] (گروه هموتوپی مرتبه اول) X با یکدیگر یکریخت و یکمتر می‌باشند. در واقع می‌توان گفت که اهمیت اصلی کوهمولوژی کراندار گروهها (در مبحث توپولوژی جبری و هندسه) وابسته به این نتیجه می‌باشد (توجه کنید که یکی از اصلی‌ترین و البته مشکل‌ترین مسائل توپولوژی جبری محاسبه گروههای هموتوپی است). برای دیدن یک تاریخچه کامل‌تر در

۱۳ Category
۱۴ Invariant
۱۵ Eilenberg
۱٦ Mclane
۱۷ Extensions
۱۸ Hochschild
۱۹ Trauber
۲۰ Gromov
۲۱ fundamental group

مورد کوهمولوژی کراندار می‌توانید مراجع [۴۶]، [۶۳]، [۳۰] و [۳۷] را ببینید.
کوهمولوژی پیوسته گروههای توپولوژیک توسط ماستوف[۲۲] در [۴۹] معرفی شده است. کوهمولوژی پیوسته برای فضاهای توپولوژیک توسط بسیاری از مولفین به روشهای گوناگون تعریف شده است. برای بحثی پیرامون این تعریفهای متفاوت مقاله [۵۰] را ببینید. کوهمولوژی دیگری که بسیار با این مباحث مرتبط می‌باشد کوهمولوژی فضاهای سادکی[۲۳] است که توسط بی. اچ. براون[۲۴] و آر. اچ. اسزاربا[۲۵] در [۷] تعریف شده است. توجه کنید که برای هر گروه G، نرو[۲۶] G، که با $N(G)$ نشان می‌دهند، یک مجموعه سادکی[۲۷] می‌باشد. همچنین اگر G یک گروه توپولوژیک باشد آنگاه $N(G)$ بصورت طبیعی یک فضای سادکی است و لذا با تعریفهای [۷] یک نظریه کوهمولوژی به آن نسبت داده می‌شود.
فرض کنید G یک گروه باشد. به کوهمولوژی منفرد[۲۸] حقیقی سازی[۲۹] نرو G (یا فضای کلاسبندی[۳۰] G که معمولا با $B(G)$ نشان می‌دهند) کوهمولوژی گروهی[۳۱] G گویند. این کوهمولوژی در کلاسبندی کلافهای فیبری[۳۲] روی G کاربرد دارد (برای نمونه کتابهای [۴۷] و [۳۲] را ببینید). همچنین ویتن[۳۳] و دیکراف[۳۴] در [۱۶] یک کاربرد بسیار زیبا از کوهمولوژی گروهی ارائه کرده‌اند. آنها با استفاده از کوهمولوژی گروهی مرتبه چهارم گروه G، نظریه‌های پیمانه[۳۵] چرن—سایمون[۳۶] روی G را کلاسبندی کرده‌اند.
برای پی‌بردن به روابط بین انواع کوهمولوژی‌های ذکر شده برای فضاها و گروهها می‌توانید مقاله [۶۵] را ببینید.
کوهمولوژی گروهها در مباحث هندسی، بیشتر برای کلاسبندی اشیاء وابسته به گروهها بکار می‌رود. اما در مباحث آنالیزی و جبری، همان گونه که در این پایان نامه با تفصیل به آن خواهیم پرداخت، کوهمولوژی بیشتر برای کلاسبندی خود گروهها کاربرد دارد.
کوهمولوژی جبرهای باناخ توسط بی. ایی. جانسون[۳۷] در [۳۹] بعنوان نوع پیوسته کوهمولوژی هاخشیلد معرفی شد. در همان مرجع، جانسون نشان داد که گروه فشرده موضعی و هاسدورف G میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر برای هر باناخ $L^1(G)$—دو مدول E داشته باشیم $\mathcal{H}^1(L^1(G), E^*) = 0$. سپس جانسون یک جبر باناخ A را میانگین‌پذیر نامید هرگاه برای هر باناخ A—دو مدول E، $\mathcal{H}^1(A, E^*) = 0$. پس از این مقاله بود که کوهمولوژی و میانگین‌پذیری بعنوان یکی از شاخه‌های اصلی مبحث جبرهای باناخ درآمد. سپس تعمیمهای بسیاری از میانگین‌پذیری جبرهای باناخ توسط محققین مختلف ارائه شد. بعنوان مثال میانگین‌پذیری های ضعیف، سوپر و

---

۲۲ Mostow
۲۳ Simplicial spaces
۲۴ B. H. Brown
۲۵ R. H. Szczarba
۲۶ nrev
۲۷ simplical set
۲۸ singular cohomology
۲۹ realization
۳۰ classyfing space
۳۱ group cohomology
۳۲ fiber bundels
۳۳ Witten
۳۴ Dijkgraaf
۳۵ Gauge theories
۳۶ Chern-Simons
۳۷ B. E. Johnson

کن [۳۸] (برای یک بحث مفصل پیرامون تمام این مطالب مرجع [۵۸] را ببینید).
نیکلاس مونود[۳۹] در کتاب جدید خود [۴۸] یک نوع کوهمولوژی برای گروههای توپولوژیک با مقادیر در یک فضای باناخ دوگان معرفی کرده است و آنرا کوهمولوژی پیوسته و کراندار نامیده است. سپس در مقاله [۹] کاربردهایی از آن در هندسه گروهها ارائه کرده است. کوهمولوژی تعریف شده توسط مونود حالت خاصی از کوهمولوژی ضعیف* پیوسته و کراندار است که ما در این پایان نامه تعریف خواهیم کرد (قضیه ۴.۴.۵ را ببینید).

۲.۱ برنامه ما

هدف اصلی این پایان‌نامه آنست که کوهمولوژی پیوسته و کوهمولوژی کراندار گروهها را تواما برای نیمگروههای توپولوژیک گسترش دهیم و مفهوم کوهمولوژی پیوسته و کراندار برای (نمایشهای) نیمگروههای توپولوژیک (با مقادیر در دومدولهای نیمنرمدار) را تعریف کنیم. روشی را که ما در اینجا ارائه می‌کنیم شاید بتوان بعنوان تعمیمی غیرخطی از کوهمولوژی پیوسته هاخشیلد جبرهای باناخ با مقادیر در دومدولهای باناخ، برای نیمگروههای توپولوژیک در نظر گرفت. در واقع در این پایان‌نامه قضایای بسیاری در مورد مقایسه کوهمولوژی هاخشیلد پیوسته جبرهای باناخ نیمگروهی با کوهمولوژی پیوسته و کراندار، خواهیم آورد.
در فصل ۲ مقدمات و پیش‌نیازهای لازم در مورد نیمگروهها، جبرهای باناخ، کوهمولوژی هاخشیلد و $\cdots$ را بیان می‌کنیم.
در فصل ۳ کوهمولوژی پیوسته نیمگروههای توپولوژیک فشرده موضعی و هاسدورف را با مقادیر در دومدولهای توپولوژیک تعریف خواهیم کرد. تعریف ما تعمیمی از تعریف ماستوف [۴۹] و ایلنبرگ—مکلان [۲۱] خواهد بود.
در فصل ۴ تعریف اصلی این پایان‌نامه یعنی کوهمولوژی پیوسته و کراندار برای نیمگروههای توپولوژیک با مقادیر در دومدولهای نیمنرمدار را خواهیم آورد. این تعریف را می‌توان بعنوان نوع کراندار کوهمولوژی پیوسته، تعریف شده در فصل ۳، در نظر گرفت.
در فصل ۵ کوهمولوژی ضعیف* پیوسته و کراندار نیمگروههای توپولوژیک را با مقادیر در دوگان دومدولهای باناخ تعریف می‌کنیم. این تعریف را می‌توان بعنوان تعمیمی از تعریف جانسون [۳۹] و مونود [۴۸] در نظر گرفت.
در فصلهای ۳، ۴ و ۵ کوهمولوژیهایی را که تعریف می‌کنیم با یکدیگر و با کوهمولوژی هاخشیلد جبرهای باناخ مقایسه می‌کنیم.
در فصل ٦ چند مثال محاسباتی ساده می‌آوریم و یک رابطه بین کوهمولوژی و میانگین‌پذیری بیان می‌کنیم.
در فصل ۷ مفهوم میانگین‌پذیری جانسون را برای نیمگروههای توپولوژیک تعریف می‌کنیم. هدف آنست که تعریف ما مشابه تعریف کوهمولوژیکی میانگین‌پذیری جبرهای باناخ ([۳۹]) باشد.
در فصل ۸ مفهوم میانگین‌پذیری تقریبی جانسون را برای نیمگروههای توپولوژیک تعریف می‌کنیم. هدف آنست که مفهومی مشابه با میانگین‌پذیری تقریبی جبرهای باناخ، تعریف شده توسط قهرمانی و لوی [۲۲]، را برای نیمگروههای توپولوژیک تعریف کنیم.

---
[۳۸] Connes
[۳۹] Nicolas Monod

در فصل ۹ میانگین‌پذیری تقریبی جانسون چند نیمگروه ویژه را بررسی می‌کنیم.
و سرانجام در فصل ۱۰ چند مسئله را برای تحقیق بیشتر علاقمندان بیان می‌کنیم.
مقالات زیر از پایان‌نامه استخراج شده‌اند.

1. Maysami, Pourabbas, Approximate amenability of Banach category algebras with application to semigroup algebras, Semigroup Forum (to appear).

2. Maysami, Pourabbas, Johnson amenability for topological semigroups (submitted).

3. Maysami, Pourabbas, Continuous bounded cohomology of topological semigroups.

فصل ۲

پیشنیازها

در این فصل برخی از مفاهیم و مطالبی که در فصلهای بعد از آنها استفاده خواهیم کرد را بیان می‌کنیم. به هیچ وجه قصد بیان یک مقدمه کامل درمورد مسائل مطرح شده را نداریم (البته قرار چنین کاری را نیز نداشتیم)، زیرا در بعضی از موارد مانند میانگین‌پذیری گروهها و جبرهای باناخ، مطالب بقدری گسترده‌اند که حتی فهرست اجمالی قضایای دانسته شده مشهور پیرامون آنها از محدوده کار یک پایان‌نامه خارج است. قصد ما بیشتر بیان و یادآوری قراردادها و قضیه‌هایی است که بعدا از آنها استفاده می‌کنیم یا اینکه آنها را تعمیم می‌دهیم. بنابراین، این فصل برای خواننده ناآشنا با آنالیز تابعی و هارمونیک مقدماتی، همولوژی بافتها و میانگین‌پذیری جبرهای باناخ، چندان مفید نخواهد بود.

۱.۲ چند نماد

در سراسر متن، $\mathbb{C}$ میدان اعداد مختلط را همراه با توپولوژی و نرم اقلیدسی (قدر مطلق) نشان می‌دهد، و مقصود از n یک عدد صحیح می‌باشد. برای یک مجموعه X و عدد $n \geq ۱$، حاصلضرب دکارتی n نسخه از X، با X^n نشان داده می‌شود. اگر X فضای توپولوژیک باشد، آنگاه X^n را همواره با توپولوژی حاصل‌ضربی بعنوان یک فضای توپولوژیک در نظر می‌گیریم. تابع ثابت، با مقدار $۱ \in \mathbb{C}$ روی X، با ۱_X و تابع همانی از X به X، با id_X نشان داده می‌شود. فضای باناخ $\ell^۱(X)$، فضای برداری تمام توابع $a : X \longrightarrow \mathbb{C}$ می‌باشد که

$$\|a\| = \sum_{x \in X} |a(x)| < \infty.$$

برای هر مجموعه X، $\mathbf{B}(X)$ فضای باناخ تمام توابع مختلط و کراندار روی X را همراه با نرم یکنواخت نشان می‌دهد. اگر X فضای توپولوژیک باشد آنگاه $\mathbf{C}(X)$ مجموعه تمام توابع مختلط و پیوسته را روی X نمایش می‌دهد. برای هر فضای توپولوژیک X، فضای باناخ تمام توابع مختلط و پیوسته و کراندار با $\mathbf{CB}(X)$، و زیرفضای تمام توابعی از $\mathbf{CB}(X)$، که در بی‌نهایت صفر می‌شوند، با $\mathbf{C}_\circ(X)$ نشان داده می‌شوند.

بهمین گونه، اگر X و Y فضای توپولوژیک باشند، آنگاه $\mathbf{C}(X,Y)$ مجموعه تمام توابع پیوسته از X به Y را نشان می‌دهد. فرض کنید K زیرمجموعه فشرده‌ای از X و U زیرمجموعه بازی از Y باشد. قرار دهید

$$O_U^K = \{f \in C(X,Y) : \quad f(K) \subset U\}.$$

در اینصورت مجموعه تمام O_U^K ها تشکیل یک زیرپایه توپولوژی روی مجموعه $\mathbf{C}(X,Y)$ را می‌دهد. به توپولوژی تولید شده توسط این زیرپایه، توپولوژی فشرده—باز[1] گویند.
فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و Y یک فضای نیم‌متریک، با نیم‌متر d باشد (بنابراین، برای دو عنصر $y, y' \in Y$ ممکن است $d(y,y') = 0$ اما $y \neq y'$). در اینصورت $\mathbf{CB}(X,Y)$ مجموعه تمام توابع پیوسته و کراندار از X به Y را نشان می‌دهد. روی $\mathbf{CB}(X,Y)$ نیم‌متر یکنواخت $\hat{d}$ با رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\hat{d}(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x), g(x)),$$

برای $f, g \in \mathbf{CB}(X,Y)$.

۲.۲ فضاهای برداری توپولوژیک

مراجع اصلی برای این بخش، کتابهای [۵۷]، [۲۰]، [۴۱]، [۴۲] و [٦٦] می‌باشد. مقصود از یک فضای برداری توپولوژیک[2] یک فضای برداری V روی میدان $\mathbb{C}$ است که یک فضای توپولوژیک نیز باشد و نگاشتهای جمع و ضرب اسکالر،

$$V \times V \longrightarrow V, \quad \mathbb{C} \times V \longrightarrow V,$$

پیوسته باشند. توجه کنید که ما، خلاف معمول [۵۷] و [۲۰]، شرط هاسدورف[3] را لزوما روی یک فضای برداری توپولوژیک قرار نمی‌دهیم.
فرض کنید V و W فضای برداری توپولوژیک باشند. در اینصورت، $\mathcal{L}(V,W)$ فضای برداری تمام نگاشتهای خطی و پیوسته از V به W را نشان می‌دهد. بطور مشابه، برای هر $n \geq 1$، $\mathcal{L}^n(V,W)$ فضای برداری تمام نگاشتهای n—خطی و پیوسته را از V^n به W نشان می‌دهد. توجه کنید که یک نگاشت n—خطی $T : V^n \longrightarrow W$، پیوسته است اگر و فقط اگر T در نقطه $0 \in V^n$ پیوسته باشد.
برای فضای برداری توپولوژیک V، V^* فضای برداری تمام تابعکهای خطی[4] پیوسته را روی V نشان می‌دهد، به دیگر سخن $V^* = \mathcal{L}(V,\mathbb{C})$.
به‌ازای هر $v \in V$، تابعک خطی $\varphi_v : V^* \longrightarrow \mathbb{C}$، تعریف‌شده با $\langle \varphi_v, f\rangle = \langle f, v\rangle$ برای $f \in V^*$، را در نظر بگیرید. کوچکترین توپولوژی روی V^*، که تحت آن تمام تابعهای φ_v پیوسته باشند، توپولوژی ضعیف*[5] نامیده

[1] compact-open
[2] topological vector space
[3] Hausdorff
[4] linear functionals
[5] weak*

می‌شود. توجه کنید که V^* همراه با توپولوژی ضعیف* یک فضای برداری توپولوژیک است.
اگر $T : V \longrightarrow W$ یک نگاشت خطی پیوسته باشد آنگاه الحاق[۶] T^* از T یک نگاشت خطی پیوسته از W^*، همراه با توپولوژی ضعیف*، به V^* همراه با توپولوژی ضعیف* می‌باشد، که با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\langle T^*(f), v\rangle = \langle f, T(v)\rangle,$$

برای $f \in W^*$ و $v \in V$.
اگر W یک زیرفضای برداری فضای برداری توپولوژیک V باشد، آنگاه توپولوژی خارج‌قسمتی[۷] روی فضای برداری خارج‌قسمتی $\frac{V}{W}$، توپولوژی القاء شده توسط نگاشت تصویر $P : V \longrightarrow \frac{V}{W}$، تعریف‌شده با $P(v) = v + W$ برای $v \in V$، می‌باشد. بعبارت دیگر، توپولوژی خارج‌قسمتی، بزرگترین توپولوژی روی $\frac{V}{W}$ می‌باشد که نگاشت P تحت آن پیوسته باشد.
رسته فضاهای برداری توپولوژیک و نگاشتهای خطی پیوسته را با $\mathcal{TV}$ نشان می‌دهیم.
فرض کنید E یک فضای برداری نیم‌نرمدار باشد (بنابراین ممکن است برای $x \in E$ داشته باشیم $\|x\| = ۰$ اما $x \neq ۰$).در اینصورت E همراه با توپولوژی القاء شده توسط نیم‌نرم، یک فضای برداری توپولوژیک می‌باشد.
فرض کنید E و F فضاهای برداری نیم‌نرمدار باشند. فرض کنید $n \geq ۱$ و $T : E^n \longrightarrow F$ یک نگاشت $n-$خطی باشد. آنگاه T پیوسته است اگر و فقط اگر کراندار باشد، یعنی

$$\|T\| = \sup\{\|T(x_۱, \cdots, x_n)\| : x_۱, \cdots, x_n \in E, \|x_۱\| \leq ۱, \cdots, \|x_n\| \leq ۱\} < \infty.$$

توجه کنید که رابطه فوق یک نیم‌نرم روی فضای برداری $\mathcal{L}^n(E, F)$ تعریف می‌کند که به آن نیم‌نرم عملگری می‌گویند. ما همواره فضای $\mathcal{L}^n(E, F)$ را بعنوان یک فضای برداری نیم‌نرمدار همراه با نیم‌نرم عملگری، در نظر می‌گیریم. توجه کنید که اگر F یک فضای باناخ باشد، آنگاه نیم‌نرم عملگری، یک نرم کامل است و $\mathcal{L}^n(E, F)$ به یک فضای باناخ تبدیل می‌شود. بویژه اینکه اگر $F = \mathbb{C}$ آنگاه $E^* = \mathcal{L}(E, F)$ یک فضای باناخ است.
اگر $T : E \longrightarrow F$ یک نگاشت خطی کراندار باشد، آنگاه الحاق $T^* : F^* \longrightarrow E^*$ از T، نیز کراندار است.
رسته فضاهای برداری نیم‌نرمدار و نگاشتهای خطی کراندار را با $\mathcal{NV}$ نشان می‌دهیم.

۳.۲ فضای باناخ اندازه‌ها

فرض کنید X یک فضای توپولوژیک فشرده موضعی و هاسدورف باشد. در اینصورت، $\mathbf{M}(X)$ فضای باناخ از تمام اندازه‌های مختلط متناهی و منظم برل[۸]، همراه با نرم

$$\|\mu\| = |\mu|(X),$$

برای $\mu \in \mathbf{M}(X)$، را نشان می‌دهد، بقسمی که $|\mu|$، اندازه تغییرات کلی μ[۹] را نمایش می‌دهد.

[۶] adjoint
[۷] qoutient topology
[۸] Borel regular
[۹] total variation measure of μ

نگاشت $\tilde{\mu} \longmapsto \mu$، از $\mathbf{M}(X)$ به $\mathbf{C}_\circ(X)^*$، تعریف شده با

$$\langle \tilde{\mu}, a \rangle = \int_X a(x) d\mu(x),$$

برای $a \in \mathbf{C}_\circ(X)$، یک نگاشت خطی پوشا و طولپایا می‌باشد. بنابراین می‌توان فضاهای $\mathbf{M}(X)$ و $\mathbf{C}_\circ(X)^*$ را یکسان در نظر گرفت.

فرض کنید μ یک اندازه مثبت (و نه لزوما متناهی) منظم برل روی X باشد. $L^1(X,\mu) \subseteq \mathbf{M}(X)$ زیرفضای باناخ تمام اندازه‌های بطور مطلق پیوسته[۱۰] نسبت به μ را نشان می‌دهد. بنابراین با استفاده از قضیه رادون—نیکودیم[۱۱]، $L^1(X,\mu)$ را می‌توان به عنوان فضای تمام (کلاسهای) توابع اندازه پذیر[۱۲] $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ با خاصیت

$$\|f\| = \int_X |f(x)| d\mu(x) < \infty.$$

در نظر گرفت که تحت نگاشت $\hat{f} \longmapsto f$، تعریف شده بوسیله

$$\hat{f}(A) = \int_A f(x) d\mu(x)$$

برای هر مجموعه اندازه‌پذیر $A \subseteq X$، در فضای $\mathbf{M}(X)$ نشانده می‌شوند.

به ازای هر $x \in X$، $\delta_x \in \mathbf{M}(X)$ اندازه نقطه‌ای وابسته به x[۱۳] را نشان می‌دهد. بنابراین $\ell^1(X)$ در فضای $\mathbf{M}(X)$ تحت نگاشت $\hat{a} \longmapsto a$، تعریف‌شده با

$$\hat{a} = \sum_{x \in X} a(x) \delta_x$$

نشانده می‌شود. توجه کنید که اگر فضای X گسسته باشد آنگاه نگاشت فوق پوشاست و درنتیجه می‌توان فضای $\ell^1(X)$ و فضای $\mathbf{M}(X)$ را یکسان در نظر گرفت.

در سراسر متن از نشاندن‌ها[۱۴] و یکسان انگاری‌های[۱۵] فوق استفاده خواهیم کرد بدون اینکه به نگاشتهای $\hat{}$ و $\tilde{}$ ارجاع دهیم.

این بخش را با قضیه‌ای پیرامون انتگرال‌گیری قوی[۱۶] یا بوخنر[۱۷] از توابع با مقادیر در یک فضای باناخ، پایان می‌بریم. برای تعریف و خواص این نوع انتگرال‌گیری به کتاب مفصل [۱۹] یا به فصل کوتاه و مفید ٦ از کتاب [۱۱] مراجعه کنید. همچنین توجه کنید که بسیاری از قضیه‌های انتگرال‌گیری لبگ، مانند قضیه فوبینی یا قضیه تسلطی لبگ، در مورد انتگرال‌گیری بوخنر نیز برقرار است.

---

۱۰ absolutely continuous
۱۱ Radon-Nikodym
۱۲ maesurable
۱۳ point mass measure of x
۱۴ embeddings
۱۵ identifications
۱۶ strong
۱۷ Bochner

قضیه ۱.۳.۲ فرض کنید X یک فضای فشرده موضعی و هاسدورف، و E یک فضای باناخ باشد. فرض کنید $\mu \in \mathbf{M}(X)$ و فرض کنید $f : X \longrightarrow E$ تابعی پیوسته و کراندار باشد. آنگاه انتگرال بوخنر $\int_X f(x)d\mu(x) \in E$ موجود است و داریم

$$\|\int_X f(x)d\mu(x)\| \leq \int_X \|f(x)\|d\mu(x) \leq \|\mu\| \sup_{x\in X}\|f(x)\|.$$

۴.۲ حاصلضرب تانسوری تصویری

برای توضیحات کامل پیرامون مطالب این بخش، کتابهای [۳۳] و [۵۲] را ببینید.
فرض کنید E و F فضاهای باناخ باشند. فرض کنید $E \otimes F$ حاصلضرب تانسوری[18] دو فضای برداری E و F را نشان دهد. روی $E \otimes F$ نرم تصویری[19] را بصورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنید $z \in E \otimes F$. در اینصورت z را می‌توان با ترکیبهای خطی متناهی از عناصری بصورت $x \otimes y$ نمایش[20] داد:

$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i.$$

برای نرم تصویری z قرار می‌دهیم

$$\|z\| = \inf \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\|y_i\|$$

بقسمی که $\inf$ روی تمام نمایشهای عنصر z گرفته می‌شود. کامل شده فضای برداری $E \otimes F$ را همراه با نرم تصویری، با $E\hat{\otimes}F$ نمایش می‌دهیم. در اینصورت به‌ازای هر عنصر u از $E\hat{\otimes}F$ دنباله (x_n) در E و دنباله (y_n) در F موجود است، بگونه‌ای که

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|\|y_n\| < \infty.$$

همچنین اگر $x \in E$ و $y \in F$ آنگاه برای نرم عنصر $x \otimes y$ از $E\hat{\otimes}F$ داریم

$$\|x \otimes y\| = \|x\|\|y\|.$$

قضیه ۱.۴.۲ فرض کنید E_1، E_2 و F فضای باناخ باشند. فرض کنید $T : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ یک نگاشت دوخطی کراندار باشد. آنگاه نگاشت خطی و منحصر بفرد $\hat{T} : E_1\hat{\otimes}E_2 \longrightarrow F$ چنان موجود است که

$$\hat{T}(x_1 \otimes x_2) = T(x_1, x_2),$$

[18] tensor product
[19] projective
[20] representation

برای هر $x_1 \in E$ و $x_2 \in E_2$. همچنین داریم $\|\hat{T}\| = \|T\|$.

قضیه ۲.۴.۲ فرض کنید (X_1, S_1, μ_1) و (X_2, S_2, μ_2) فضای اندازه[21] باشند. در اینصورت نگاشت خطی

$$\varphi : L^1(X_2, S_2, \mu_2)\hat{\otimes}L^1(X_1, S_1, \mu_1) \longrightarrow L^1(X_2 \times X_1, S_2 \times S_1, \mu_2 \times \mu_1),$$

تعریف‌شده با

$$\varphi(f_2 \otimes f_1)(x_2, x_1) = f_2(x_2)f_1(x_1),$$

برای $f_1 \in L^1(X_2, S_2, \mu_2)$ و $f_2 \in L^1(X_1, S_1, \mu_1)$، یک طولپایی[22] پوشاست.

در سرتاسر متن، ما از یکریختی فضاهای باناخ $L^1(X_2, S_2, \mu_2)\hat{\otimes}L^1(X_1, S_1, \mu_1)$ و

$$L^1(X_2 \times X_1, S_2 \times S_1, \mu_2 \times \mu_1)$$

استفاده می‌کنیم بدون اینکه نگاشت φ را تصریح کنیم.

۵.۲ همبافتها از فضاهای برداری توپولوژیک

مرجع اصلی برای این بخش کتاب [۳۳] می‌باشد.

مقصود از یک همبافت[23] $\mathfrak{V}$ از فضاهای برداری توپولوژیک و نگاشتهای خطی پیوسته، یک دنباله بشکل

$$\cdots \longrightarrow V^{n-1} \xrightarrow{\partial^{n-1}} V^n \xrightarrow{\partial^n} V^{n+1} \xrightarrow{\partial^{n+1}} \cdots$$

می‌باشد که در آن به ازای هر n، V^n یک فضای برداری توپولوژیک است و $\partial^n : V^n \longrightarrow V^{n+1}$ یک تابع خطی پیوسته می‌باشد، بگونه‌ای که $im(\partial^{n-1}) \subseteqq ker(\partial^n)$، یا بدیگر سخن

$$\partial^n\partial^{n-1} = 0.$$

به نگاشت خطی ∂^n، نگاشت هم‌مرزی n—ام[24] و به هر عنصر از V^n یک n—هم‌زنجیر[25] از $\mathfrak{V}$ می‌گوئیم.
همچنین قرار می‌دهیم

$$\mathcal{B}^n(\mathfrak{V}) = im(\partial^{n-1}),$$

$$\mathcal{Z}^n(\mathfrak{V}) = ker(\partial^n).$$

[21] measure space
[22] isometry
[23] complex
[24] n'th coboundary map
[25] n-cochain