بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض گرایش جبر

نمایش های کاکستر و مزدوجی برای گروه های وایل

استاد راهنما

دکتر سعید اعظم

استاد مشاور:

دکتر ملیحه یوسف زاده

پژوهشگر:

زهرا وفایی

آذر ماه ۱۳۸۷

شیوه نگارش پایان نامه رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر خانم زهرا وفایی

تحت عنوان:

گروههای وایل با نمایش کاکستر و نمایش مزدوجی

در تاریخ ... ۸۷/۹/۲..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ....عالی..... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامهٔ	دکتر سعید اعظم	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۲- استاد مشاور پایان نامه	دکتر ملیحه یوسف زاده	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر علیرضا عبدالهی	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۴- استاد داور خارج گروه	دکتر ولی ا.. شاه سنایی	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

سپاس خداوند را که خود را به ما شناسانید و شکر خویش را الهام فرمود و درهای معرفت را بر ما گشود، سپاس خداوند را که به من موهبت داشتن پدر و مادر را عنایت فرمود که در سایه محبت آنها بتوانم به تدوین این پایان نامه بپردازم .

این مجموعه را مرهون راهنمایی های استاد گرامی و بزرگوارم جناب آقای دکتر سعید اعظم می دانم که فراتر از یک استاد راهنما در نهایت صبر و شکیبایی مرا تشویق و راهنمایی نموده اند. بر خود لازم می دانم از زحمات بی دریغ ایشان صادقانه سپاسگزاری کنم گرچه تشکر من قطره ای در برابر دریای بیکران محبت ها و کمک های ایشان می باشد. از درگاه ایزد منان توفیقی روز افزون برای ایشان خواهانم .

از زحمات استاد مشاورم سرکار خانم دکتر یوسف زاده برای راهنمایی هایشان کمال تشکر را دارم.

زحمات اساتید داور آقای دکتر عبدالهی داور داخلی و جناب آقای دکتر شاه سنایی داور خارجی را ارج نهاده از ایشان تشکر می نمایم.

همچنین از زحمات سرکار خانم ها گرامی، غازی، فرهمند و معارکه در تدوین این پایان نامه اینجانب را یاری نموده اند سپاسگزارم.

در پایان از زحمات بی دریغ پدر و مادرم و همچنین خواهر و برادرانم که مشفقان من در این راه بودند کمال تشکر را دارم.

تقدیم به

حضرت دوست

که هر چه دارم از اوست

و

تقدیم به دو موجود مقدس

پدر و مادرم

که عاشقانه سوختند تا روشن گر راهم باشند و گرمابخش وجودم

چکیده

هدف این پایان نامه بررسی این است که کدام یک از گروه های وایل نظیر به سیستم های ریشه افاین تعمیم یافته دارای نمایش کاکستر و کدام یک از آنها دارای نمایش مزدوجی هستند. در این پایان نامه نشان می دهیم هر گروه وایل افاین تعمیم یافته نمایش مزدوجی نسبت به یک سیستم ریشه افاین یافته مناسب دارد.

واژه های کلیدی: مجموعه ی ریشه، گروه وایل، انعکاس، نمایش کاکستر، نمایش مزدوجی، گروه وایل افاین تعمیم یافته، سیستم های ریشه افاین تعمیم یافته.

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

پیش‌گفتار

در صد سال اخیر جبرهای لی با بعد متناهی مورد بررسی قرار گرفته اند، این جبرها سیستم ریشه‌ی متناهی دارند، گروه وایل آنها دارای نمایش مزدوجی و نمایش کاکستراست. در سال ۱۹۶۸، کز[۱] و مودی[۲] کلاسی از جبرهای لی با بعد نامتناهی را تعریف کردند، این جبرهای لی دارای سه نوع سیستم ریشه متناهی، افاین و نامعین هستند. گروه وایل متناظر به سیستم‌های ریشه افاین و متناهی دارای نمایش کاکستر و نمایش مزدوجی است [۱۵]. در خلال سال‌های ۱۹۸۵ تا ۱۹۹۷ کلاس جدیدی از جبرهای لی مورد برسی قرار گرفت که جبرهای لی افاین تعمیم یافته نام گرفت، سیستم ریشه این نوع جبرها سیستم ریشه افاین تعمیم یافته نامیده شد. در سال ۱۹۹۵ کریلیوک[۳] نشان داد که گروه وایل یک سیستم ریشه افاین تعمیم یافته شبکه‌ای ساده از رتبه بزرگتر از ۱ نمایش مزدوجی دارد [۱۳]، در سال ۱۹۹۷ سائیتو و تاکِبایاشی[۴] تعمیمی از نمایش کاکستر برای گروه‌های وایل افاین تعمیم یافته از سیستم‌های ریشه افاین تعمیم یافته با پوچی ۲ را به‌دست آوردند [۱۷]. در سال ۲۰۰۰، اعظم نمایش مزدوجی برای زیر کلاسی از گروهای وایل افاین تعمیم یافته شامل گروهای وایل افاین تعمیم یافته از سیستم‌های ریشه افاین تعمیم یافته کاهشی با پوچی کمتر یا مساوی ۲ را به‌دست آورد [۳]. در سال ۲۰۰۸ اعظم و شاه‌سنایی محکی برای وجود نمایش مزدوجی گروه‌های وایل افاین تعمیم یافته از نوع A_1 به‌دست آوردند [۲].

---

[۱] V. Kac

[۲] R. V. Moody

[۳] Y. Krylyuk

[۴] T. Takebayashi

این پایان نامه شامل چهار فصل است. در فصل اول به‌طور مختصر تعاریف اساسی و نتایج مورد نیاز در مورد سیستم‌های ریشه متناهی، نیم‌شبکه‌ها و سیستم‌های ریشه افاین تعمیم یافته را بیان می‌کنیم. در فصل دوم ابتدا به بررسی ساختار گروه‌های وایل افاین تعمیم یافته $\mathcal{W}$ می‌پردازیم. در این بخش نشان می دهیم $\mathcal{W}$ حاصلضرب نیم مستقیمی از یک گروه وایل متناهی $\dot{\mathcal{W}}$ و یک زیر گروه H از $\mathcal{W}$ است. در بخش سوم از این فصل نشان می‌دهیم برای یک سیستم ریشه افاین تعمیم یافته R از نوع X زیر مجموعه متناهی $\Pi(X)$ از ریشه‌های غیر ایزوتروپیک موجود است به‌طوری‌که $\mathcal{W}_{\Pi(X)}\Pi(X) = R^{\times}$، جایی‌که $\mathcal{W}_{\Pi(X)}$ زیر گروهی از $\mathcal{W}$ تولید شده توسط انعکاس‌های r_α برای $\alpha \in \Pi(X)$ است. در بخش آخر این فصل به مطالعه گروه‌های وایل نظیر به سیستم‌های ریشه با شاخص صفر می‌پردازیم. نتیجه مهم در این بخش این است که گروه‌های وایل نظیر به سیستم‌های ریشه افاین تعمیم یافته از شاخص صفر نمایش مزدوجی دارند (قضیه ۲—۳.۴).

در فصل سوم ابتدا تعریفی برای یک مجموعه ریشه ارایه می‌دهیم، و مفهوم نمایش کاکستر برای یک گروه نسبت به یک مجموعه ریشه را معرفی می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم یک گروه وایل افاین تعمیم یافته دارای نمایش کاکستر نسبت به سیستم ریشه افاین تعمیم یافته‌اش است اگر و تنها اگر از پوچی کمتر یا مساوی ۱ باشد.

فصل چهارم شامل دو بخش است. در بخش اول مفهوم نمایش مزدوجی برای یک گروه نسبت به یک مجموعه ریشه را معرفی می‌کنیم. سپس ثابت می‌کنیم اگر یک گروه وایل $\mathcal{W}$ نمایش کاکستر نسبت به یک مجموعه ریشه داشته باشد، آن‌گاه $\mathcal{W}$ نمایش

مزدوجی نسبت به این مجموعه ریشه دارد. در قضیه ۴—۷.۱ نشان می‌دهیم اگر یک گروه، نمایش مزدوجی نسبت به یک مجموعه ریشه R داشته باشد، آن‌گاه R مینیمال است. در بخش دوم از این فصل مفهوم سیستم ریشه مینیمال را برای سیستم‌های ریشه افاین تعمیم یافته معرفی می‌کنیم. در قضیه ۴—۹.۲ نشان می‌دهیم اگر R یک سیستم ریشه افاین تعمیم یافته و $\mathcal{W}$ گروه وایل آن باشد، آن‌گاه $\mathcal{W}$ نمایش مزدوجی نسبت به R دارد اگر و تنها اگر R مینیمال باشد. به‌علاوه در قضیه ۴—۱۲.۲ نشان می‌دهیم هر سیستم ریشه افاین تعمیم یافته R شامل یک سیستم ریشه مینیمال است. از این مطالب با هم نتیجه می‌گیریم که هر گروه وایل افاین تعمیم یافته نمایش مزدوجی نسبت به یک سیستم ریشه افاین تعمیم یافته دارد(قضیه ۴—۱۴.۲).

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل به طور مختصر به معرفی سیستم‌های ریشه متناهی و سیستم‌های ریشه افاین تعمیم یافته می پردازیم و نتایج مورد نیاز در مورد این سیستم‌های ریشه را بررسی می‌کنیم.

۱—۱ سیستم‌های ریشه متناهی

تعریف ۱—۱.۱ . فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. یک فرم دو خطی روی V تابعی چون f است که به هر جفت مرتب از بردارهای α و β در V یک اسکالر $f(\alpha, \beta)$ در $\mathbb{F}$ را تخصیص دهد و در شرایط زیر صدق کند:

$$f(c\alpha_۱ + \alpha_۲, \beta) = cf(\alpha_۱, \beta) + f(\alpha_۲, \beta)$$
$$f(\alpha, c\beta_۱ + \beta_۲) = cf(\alpha, \beta_۱) + f(\alpha, \beta_۲),$$

جایی‌که $c \in \mathbb{F}$.

تعریف ۱—۲.۱ . فرض کنید f فرمی دو خطی روی فضای برداری V باشد. گوییم f متقارن است هرگاه به ازای همه‌ی بردارهای α و β در V، $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$.

تعریف ۱—۳.۱ . فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان حقیقی با بعد متناهی است که بر روی آن یک فرم دو خطی متقارن معین مثبت $(\cdot, \cdot)$ تعریف شده است. زیر فضای H از V با بعد $dimV - ۱$ را یک ابر صفحه در V می‌نامیم. بنابراین برای $H \setminus V \ni u \neq ۰$ داریم $H \oplus \langle u \rangle = V$.

تعریف ۱—۴.۱ . برای $\alpha \in V \setminus \{۰\}$ و $u \in V$ تبدیل خطی وارون پذیر

$$r_\alpha : V \longrightarrow V$$
$$u \longmapsto u - ۲\frac{(u, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha,$$

را یک انعکاس در V می‌نامیم. به راحتی دیده می‌شود که $r_\alpha(\alpha) = -\alpha$ و برای

$$\beta \in H_\alpha = \{\gamma \in V \mid (\alpha, \gamma) = ۰\},$$

داریم $r_\alpha(\beta) = \beta$.

تعریف ۱—۱.۵ . زیر مجموعه R از V را یک سیستم ریشه متناهی می‌نامیم اگر در اصول زیر صدق کند:

($R1$) مجموعه R فضای V را پدید آورد، R متناهی باشد و $0 \notin R$

($R2$) برای $\alpha, \beta \in R$ داریم $r_\alpha(\beta) \in R$.

($R3$) اگر $\beta, \alpha \in R$، آن‌گاه $(\beta, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z}$ جایی‌که $\alpha^\vee := \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}$.

تعریف ۱—۱.۶ . سیستم ریشه R را کاهش یافته گوییم هرگاه برای هر $\alpha \in R$، $\mathbb{R}\alpha \bigcap R = \{\pm\alpha\}$. ریشه α را کاهش یافته گوییم هرگاه $\frac{1}{2}\alpha \notin R$. همچنین $(\alpha, \alpha)^{\frac{1}{2}} =: || \alpha ||$ را طول ریشه $\alpha \in R$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱—۱.۷ . سیستم ریشه R را تحویل ناپذیر می‌نامیم اگر نتوانیم R را به صورت $R = R_1 \uplus R_2$ بنویسیم جایی‌که $(R_1, R_2) = 0$، $R_1 \neq \emptyset$ و $R_2 \neq \emptyset$.

از این‌جا به بعد همه‌ی سیستم‌های ریشه را تحویل ناپذیر در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱—۱.۸ . دو سیستم ریشه R_1 و R_2 را به ترتیب در فضای V_1 و V_2 در نظر می‌گیریم. این دو سیستم ریشه را یکریخت گوییم اگر یکریختی (فضای برداری) $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ موجود باشد چنان‌که برای $\alpha, \beta \in R_1$، $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)^\vee) = (\alpha, \beta^\vee)$ و $\varphi(R_1) = R_2$.

تعریف ۱—۱.۹ . فرض می‌کنیم R یک سیستم ریشه در V باشد. زیر گروه

$$\mathcal{W} = \langle r_\alpha \ : \ \alpha \in R\rangle$$

را گروه وایل سیستم ریشه R می‌نامیم.

لم ۱–۱.۱۰ . فرض کنید R یک سیستم ریشه متناهی با گروه وایل $\mathcal{W}$ در V باشد. برای $\alpha \in R$ و $r_\alpha \in \mathcal{W}$ شرایط زیر برقرار است:

(i) برای هر $\gamma, \beta \in R$ داریم

$$(r_\alpha(\beta), r_\alpha(\gamma)) = (\beta, \gamma).$$

(ii) برای هر $w \in \mathcal{W}$ داریم

$$w r_\alpha w^{-۱} = r_{w(\alpha)}.$$

اثبات . (i) فرض کنید $\gamma, \beta \in R$ بنابراین

$$\begin{aligned}(r_\alpha(\beta), r_\alpha(\gamma)) &= (\beta - (\beta, \alpha^\vee)\alpha, \gamma - (\gamma, \alpha^\vee)\alpha) \\ &= (\beta, \gamma) - (\gamma, \alpha^\vee)(\beta, \alpha) - (\beta, \alpha^\vee)(\alpha, \gamma) + (\gamma, \alpha^\vee)(\beta, \alpha^\vee)(\alpha, \alpha) \\ &= (\beta, \gamma).\end{aligned}$$

(ii) با استفاده از (i) داریم

$$\begin{aligned}w r_\alpha w^{-۱}(\beta) &= w r_\alpha(w^{-۱}(\beta)) \\ &= w(w^{-۱}(\beta) - (w^{-۱}(\beta), \alpha^\vee)\alpha) \\ &= \beta - (\beta, w(\alpha^\vee))w(\alpha) \\ &= \beta - (\beta, w(\alpha)^\vee)w(\alpha) \\ &= r_{w(\alpha)}(\beta). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

تذکر ۱–۱.۱۱ . فرض کنید R یک سیستم ریشه باشد و $\alpha, \beta \in R$. اگر θ زاویه بین دو ریشه α و β باشد، آن‌گاه داریم

$$\| \alpha \| \| \beta \| cos\theta = (\alpha, \beta), \quad | (\alpha, \beta) | \leq \| \alpha \| \| \beta \|$$

بنابراین

$$(\alpha,\beta^\vee)(\beta,\alpha^\vee)=۴cos^۲\theta,$$

از آنجایی‌که $۰ \leq cos^۲\theta \leq ۱$، $(\beta,\alpha^\vee)$ و $(\alpha,\beta^\vee)$ علامت یکسان دارند و عبارت فوق یک عدد صحیح غیر منفی است، برای $\alpha,\beta \in R$ با شرط $\alpha \neq \pm\beta$ و $\|\beta\| \leq \|\alpha\|$، جدول زیر را داریم

نامشخص

$(\alpha,\beta^\vee)$	$(\beta,\alpha^\vee)$	θ	$\|\beta\|^۲ / \|\alpha\|^۲$
۰	۰	$\pi/۲$	نامشخص
۱	۱	$\pi/۳$	۱
-۱	-۱	$۲\pi/۳$	۱
۱	۲	$\pi/۴$	۲
-۱	-۲	$۳\pi/۴$	۲
۱	۳	$\pi/٦$	۳
-۱	-۳	$۵\pi/٦$	۳

گزاره ۱—۱.۱۲ . فرض کنید α و β دو ریشه مستقل خطی در سیستم ریشه R باشند.

(i) اگر $(\alpha,\beta) > ۰$، آن‌گاه $\pm(\beta-\alpha) \in R$ ،

(ii) اگر $(\alpha,\beta) < ۰$، آن‌گاه $\pm(\alpha+\beta) \in R$.

اثبات . (i) از این‌که $(\alpha,\beta) > ۰$ داریم $(\beta,\alpha^\vee) > ۰$. با توجه به جدول فوق اگر $(\beta,\alpha^\vee)=۱$، آن‌گاه با استفاده از شرط $(R۲)$ داریم

$$r_\alpha(\beta)=\beta-(\beta,\alpha^\vee)\alpha=\beta-\alpha \in R,$$

حال اگر $(\alpha,\beta^\vee) = 1$ آن‌گاه داریم

$$r_\beta(\alpha) = \alpha - (\alpha,\beta^\vee)\beta = \alpha - \beta \in R.$$

(ii) با استفاده از قسمت (i) داریم

$$\begin{aligned}(\beta,-\alpha) > 0 &\Longrightarrow \beta - (-\alpha) \in R\\ &\Longrightarrow \beta + \alpha \in R\\ &\Longrightarrow \pm(\beta+\alpha) \in R. \ \blacksquare\end{aligned}$$

تعریف ۱—۱.۱۳ . فرض کنید α و β دو ریشه مستقل خطی در سیستم ریشه R باشند. اگر d, u بزرگترین اعداد صحیح غیر منفی باشند به طوری‌که

$$S(\alpha,\beta) := \{\beta - d\alpha, \dots, \beta + u\alpha\} = \{\beta + n\alpha \ \mid \ n \in \mathbb{Z}\} \bigcap R,$$

آن‌گاه $S(\alpha,\beta)$ را α رشته از β می‌نامیم.

گزاره ۱—۱.۱۴ . فرض کنید α و β دو ریشه مستقل خطی در سیستم ریشه R باشند. قرارمی‌دهیم

$$S(\alpha,\beta) = \{\beta - d\alpha, \dots, \beta + u\alpha\},$$

جایی‌که d, u بزرگترین اعداد صحیح غیر منفی باشند که در تعریف ۱—۱.۱۳ صدق می‌کند. بنابراین داریم

(i) برای $-d \le i \le u$

$$\beta + i\alpha \in R,$$

به این معنی که α رشته از β بدون سوراخ است.

(ii) $d - u = (\beta, \alpha^\vee)$،

اثبات . با توجه به تعریف $S(\alpha,\beta)$ داریم

$$S(\alpha,\beta) = \{\beta + i\alpha \mid i \in \mathbb{Z}\} \bigcap R.$$

فرض کنید $\beta + i\alpha \in S(\alpha,\beta)$، بنابراین برای $r_\alpha \in \mathcal{W}$ داریم

$$\begin{aligned} r_\alpha(\beta + i\alpha) &= \beta - (\beta, \alpha^\vee)\alpha - i\alpha \\ &= \beta - ((\beta,\alpha^\vee) + i)\alpha \in S(\alpha,\beta) \end{aligned}$$

بنابراین

$$r_\alpha(S(\alpha,\beta)) \subseteq S(\alpha,\beta).$$

حال با توجه به این‌که $r_\alpha = r_\alpha^{-۱}$ داریم

$$r_\alpha(S(\alpha,\beta)) = S(\alpha,\beta).$$

(i) فرض کنید $-d \leq j \leq u$ موجود باشد به‌طوری‌که $\beta + j\alpha \notin R$، بنابراین $-d \leq s < r \leq u$ موجود است به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} &\beta + s\alpha \in R\,; \quad \beta + (s + ۱)\alpha \notin R, \\ &\beta + r\alpha \in R\,; \quad \beta + (r - ۱)\alpha \notin R. \end{aligned}$$

اگر $(\beta + s\alpha, \alpha) < ۰$ با استفاده از گزاره ۱—۱۲.۱، $\beta + (s+۱)\alpha \in R$ که تناقض است بنابراین $(\beta + s\alpha, \alpha) \geq ۰$. به طور مشابه اگر $(\beta + r\alpha, \alpha) > ۰$ با استفاده از گزاره ۱—۱۲.۱، $\beta + (r - ۱)\alpha \in R$ که تناقض است بنابراین $(\beta + r\alpha, \alpha) \leq ۰$. با توجه به نتایج فوق داریم

$$(\beta + s\alpha, \alpha) \geq ۰ \geq (\beta + r\alpha, \alpha).$$

از آنجایی‌که $(\alpha,\alpha) > ۰$ داریم $r \geq s$ که با فرض $s < r$ در تناقض است. پس برای $-d \leq i \leq u$، $\beta + i\alpha \in R$.

(ii) برای $-d \leq i \leq u$ و $r_\alpha \in \mathcal{W}$ داریم

$$r_\alpha(\beta + i\alpha) = \beta - ((\beta, \alpha^\vee) + i)\alpha,$$

و

$$r_\alpha(\beta + u\alpha) = \beta - ((\beta, \alpha^\vee) + u)\alpha.$$

بنابراین $r_\alpha(\beta + u\alpha)$ در $S(\alpha,\beta)$ بعد از $r_\alpha(\beta + i\alpha)$ قرار می‌گیرد، در حقیقت r_α رشته $S(\alpha,\beta)$ را برعکس می‌کند. چون r_α تبدیل خطی یک به یک و پوشاست پس باید $r_\alpha(\beta + u\alpha)$ به $\beta - d\alpha$ برود که کل مجوعه را بپوشاند. بنابراین داریم

$$r_\alpha(\beta + u\alpha) = \beta - d\alpha,$$

و در نتیجه $(\beta, \alpha^\vee) = d - u$. ■

تعریف ۱—۱.۱۵ . زیر مجموعه Δ از سیستم ریشه R را یک پایه برای R می‌نامیم اگر شرایط زیر برقرار باشد:

(i) Δ یک پایه برای V باشد،

(ii) هر عضو $\beta \in R$ را بتوانیم به‌صورت $\beta = \Sigma_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha$ بنویسیم، جایی‌که برای تمام $\alpha \in \Delta$، $k_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq ۰}$ یا برای هر $\alpha \in \Delta$، $k_\alpha \in \mathbb{Z}_{\leq ۰}$. هر عضو Δ را یک ریشه ساده می‌نامیم و $|\Delta| = \dim V$.

تابع $ht : R \longrightarrow \mathbb{Z}$ با ضابطه $ht(\beta) = \sum\limits_{\alpha\in\Delta} k_\alpha$ را تابع ارتفاع می‌نامیم و قرار می‌دهیم

$$R^+ = \{\beta \in R \mid ht(\beta) > ۰\}, \quad R^- = \{\beta \in R \mid ht(\beta) < ۰\}.$$

در این‌صورت $\Delta \subseteq R^+$، $R = R^- \cup \{0\} \cup R^+$. اعضای R^+ را ریشه‌های مثبت می‌نامیم. برای $\alpha, \beta \in R$ گوییم $\alpha \leqslant \beta$ هرگاه $\beta - \alpha \in R^+$ و یا $\beta = \alpha$.

گزاره ۱—۱۶.۱ . (i) هر سیستم ریشه متناهی R شامل یک پایه Δ است.

(ii) اگر $\mathcal{W}' = \langle r_\alpha : \alpha \in \Delta \rangle$، آن‌گاه $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$.

(iii) در هر سیستم ریشه متناهی کاهش یافته تحویل ناپذیر نسبت به رابطه $\leqslant$ یک ریشه ماکسیمال منحصر بفرد $\beta \in R$ وجود دارد. به‌ویژه برای هر $\alpha \in R$، $ht(\alpha) \leq ht(\beta)$ و همچنین برای هر $\alpha \in \Delta$، $(\alpha, \beta) \geq 0$ که در آن Δ یک پایه برای R است.

اثبات . به فصل ششم از مرجع [۶] رجوع کنید. ■

گزاره ۱—۱۷.۱ . فرض کنید R یک سیستم ریشه متناهی تحویل ناپذیر کاهش یافته با پایه Δ و گروه وایل $\mathcal{W}$ باشد، در این‌صورت داریم

(i) $\mathcal{W}\Delta = R$.

(ii) اگر $\alpha, \beta \in R$ دو ریشه کاهش یافته باشند و $\|\beta\| \neq \|\alpha\|$، آن‌گاه برای هر ریشه کاهش یافته $\gamma \in R$ داریم $\|\beta\| = \|\gamma\|$ یا $\|\alpha\| = \|\gamma\|$.

(iii) اگر $\alpha, \beta \in R$ و $\|\beta\| = \|\alpha\|$، آن‌گاه $w \in \mathcal{W}$ وجود دارد به‌طوری‌که $w(\alpha) = \beta$.

اثبات . به فصل ششم از مرجع [۶] رجوع کنید. ■

گزاره قبل بیان می‌کند که مدار هر ریشه α تحت گروه وایل همه‌ی ریشه‌های هم طول α را شامل است. همچنین گزاره قبل بیان می‌کند که در یک سیستم ریشه متناهی