دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

رنگ‌آمیزی جمعی گراف‌ها

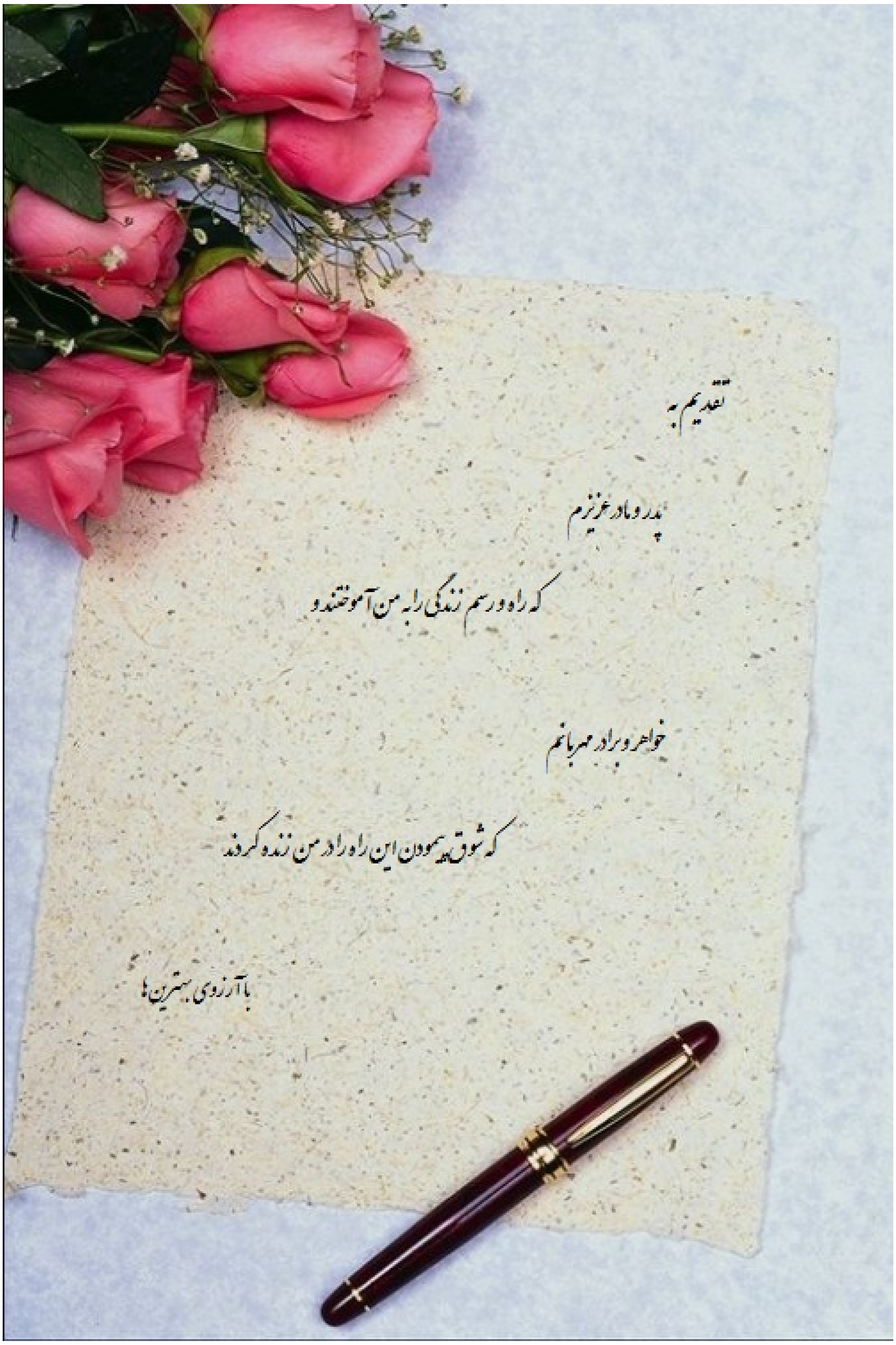
پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی کاربردی

مهدی جزنابادی

استاد راهنما

دکتر رامین جوادی

شهریورماه ۱۳۹۳


تقدیم به
پدر و مادر عزیزم
که راه و رسم زندگی را به من آموختند و
خواهر و برادر مهربانم
که شوق پیمودن این راه را در من زنده کردند
با آرزوی بهترین ها

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی کاربردی آقای مهدی جزنابادی
تحت عنوان

رنگ‌آمیزی جمعی گراف‌ها

در تاریخ ۹۳/۶/۲۲ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱– استاد راهنما	دکتر رامین جوادی
۲– استاد مشاور	دکتر بهناز عمومی
۳– استاد داور۱	دکتر غلامرضا امیدی
۴– استاد داور۲	دکتر محمدرضا عبودی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده   دکتر فرید بهرامی

«... زندگی رسم خوشایندی است...
زندگی پرشی دارد اندازه‌ی عشق...
زندگی هندسه‌ی ساده و یکسان نفس‌هاست.
هر کجا هستم، باشم، آسمان مال من است. پنجره، فکر، هوا، عشق، زمین مال من است. چه اهمیت دارد...
کار ما نیست شناسایی «راز» گل سرخ، کار ما شاید این است که پشت دانایی اردو بزنیم...
کار ما شاید این است که بار دانش را از دوش پرستو به زمین بگذاریم...
کار ما شاید این است که میان گل نیلوفر و قرن، پی آواز حقیقت بدویم.» **(سهراب سپهری)**

قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.
بی‌شک این پایان‌نامه مرهون راهنمایی‌های ارزنده استاد عزیز و بزرگوارم، جناب آقای دکتر رامین جوادی است که با حمایت‌ها و تشویق‌های گرم و صمیمانه مرا به دقت، اندیشه، درک، تعمق و تحقیق واداشتند.
هم‌چنین مراتب سپاس و قدردانی خود را از استاد دلسوز و گرانقدرم، سرکار خانم دکتر بهناز عمومی به پاس راهنمایی‌های استادانه‌شان ابراز می‌دارم.
از اساتید محترم جناب آقای دکتر غلامرضا امیدی و جناب آقای دکتر محمدرضا عبودی به خاطر قبول زحمت مطالعه و داوری این پایان‌نامه کمال تشکر را دارم.
در نهایت از تمامی دوستان عزیزم که مرا در دوران تحصیل و به ویژه نگارش این پایان‌نامه همراهی نمودند، صمیمانه تشکر می‌نمایم و از درگاه خداوند متعال، سلامتی و موفقیت را در تمام مراحل زندگی برایشان خواستارم.

و من اللّه التّوفیق
مهدی جزنابادی
شهریورماه ۱۳۹۳

فهرست مطالب

فهرست تصاویر هشت

فصل ۱ تعاریف و مفاهیم اولیه ۳

۱.۱ تعاریف پایه‌ای ۳
۲.۱ گراف‌های مسطح ۶
۳.۱ مروری بر انواع رنگ‌آمیزی ۷

فصل ۲ رنگ‌آمیزی جمعی گراف‌ها ۱۳

۱.۲ مقدمه ۱۳
۲.۲ ارتباط عدد رنگی و عدد رنگی جمعی در یک گراف ۱۶
۳.۲ عدد رنگی جمعی روی گراف‌های با مرتبه‌ی مقرر ۱۹
۴.۲ عدد رنگی جمعی گراف‌های چندبخشی کامل ۲۳

فصل ۳ گراف‌های پیوسته‌ی جمعی ۲۸

۱.۳ مقدار جمعی گراف‌ها ۲۸
۲.۳ گراف‌های پیوسته جمعی ۳۰

فصل ۴ برد جمعی گراف‌ها ۳۹

۱.۴ برد جمعی گراف ۳۹

۲.۴ عدد رنگ‌آمیزی گراف‌ها و ابرگراف‌ها ۴۲
۳.۴ صفرهای ترکیبیاتی ۴۷
۴.۴ برد جمعی گراف‌های مسطح ۵۱
۵.۴ گروه‌های آبلی متناهی ۵۵

مراجع ۶۰

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی و نمایه ۶۲

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۶۵

فهرست تصاویر

۱.۱ رنگ‌آمیزی یالی تمایزگر همسایه‌ای ۹
۲.۱ رنگ‌آمیزی یالی تمایزگر همسایه‌ای چندمجموعه‌ای ۱۱
۳.۱ رنگ‌آمیزی ۲ـتایی ۱۲

۱.۲ گراف با عدد رنگی جمعی ۱ . . . . ۱۴
۲.۲ دو رأس مجاور با همسایه‌های یکسان ۱۴
۳.۲ یک رنگ‌آمیزی جمعی و یک رنگ‌آمیزی غیرجمعی ۱۵
۴.۲ گراف گسترش یافته از $H = K_b$ ۱۸
۵.۲ گراف $G = K_n - K_m$ ۲۱
۶.۲ گراف حاصل از H و F به وسیله‌ی یکی کردن رئوس $v_۰$ و $u_{k+۱}$ ۲۳
۷.۲ ۳ـرنگ‌آمیزی جمعی از گراف $k_{۵(۲),۳(۳)}$ ۲۷

۱.۴ گراف کامل و نمایش عدد رنگ‌آمیزی ۴۳
۲.۴ نمایش یک ابرگراف ۴۵
۳.۴ گراف وقوع یک ابرگراف ۴۵
۴.۴ ناحیه‌ی ساده همبند $F(y)$ و صفحه گراف P ۴۶
۵.۴ گراف G با $V(G) = I \cup F$ ۵۵
۶.۴ گراف ساختگی با نشاندن دو خوشه در مسیر ۵۶

چکیده

فرض کنیم G یک گراف همبند نابدیهی باشد. برای رأس v از گراف G، مجموعه رأس‌های مجاور به v را با $N(v)$ نشان می‌دهیم. فرض کنید که $c: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ یک رنگ‌آمیزی رأسی از G باشد که رأس‌های مجاور ممکن است، رنگ‌های یکسانی داشته باشند. $\sigma(v)$، مجموع رنگ‌های رئوس $N(v)$ است. اگر برای هر دو رأس مجاور u و v داشته باشیم $\sigma(u) \neq \sigma(v)$، آن‌گاه c را یک رنگ‌آمیزی جمعی از G می‌نامیم. مینیمم تعداد رنگ‌های مورد نیاز در یک رنگ‌آمیزی جمعی از G را عدد رنگی جمعی نامیم و با $\sigma(G)$ نمایش می‌دهیم. عدد رنگی جمعی گراف G، هرگز از عدد رنگی $\chi(G)$ تجاوز نمی‌کند و برای هر جفت a و b از اعداد صحیح مثبت که $a \leq b$، یک گراف همبند مانند G وجود دارد که $\sigma(G) = a$ و $\chi(G) = b$.

فرض کنید k و n اعداد صحیح مثبتی باشد که $k \leq n$. یک گراف همبند G از مرتبه‌ی n وجود دارد که $\sigma(G) = k$، اگر و تنها اگر $k \neq n - ۱$. چندین نتیجه‌ی دیگر نیز راجع به عدد رنگی جمعی ارائه شده است. برای یک kـرنگ‌آمیزی جمعی c از گراف G، برد جمعی از G، کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت k است، به‌طوری‌که یک kـرنگ‌آمیزی جمعی از G با استفاده از رنگ‌های متعلق به مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ..., k\}$ وجود داشته باشد که آن را با $\rho(G)$ نمایش می‌دهیم. ثابت می‌کنیم برای هر گراف مسطح G، $\rho(G) \leq ۴۶۸$. این بهبود یافته‌ی کران قبلی $\rho(G) \leq ۵۵۴۴$ است که توسط نورین حاصل شد. در اثبات از قضیه‌ی صفرهای ترکیبیاتی و عدد رنگ‌آمیزی ابرگراف‌ها استفاده می‌کنیم. ما هم‌چنین ثابت می‌کنیم که برای گراف‌های مسطح ۳ـرنگ‌پذیر، $\rho(G) \leq ۳۶$ و برای هر گراف مسطح G با کمر حداقل ۱۳، $\rho(G) \leq ۴$. ما ثابت می‌کنیم که برای هر $r \geq ۲$، یک گراف G_r با عدد رنگی r، وجود دارد که هیچ رنگ‌آمیزی جمعی روی یک گروه آبلی متناهی از مرتبه‌ی r، ندارد.

واژه‌های کلیدی: *رنگ‌آمیزی تمایزگر همسایه‌ای، رنگ‌آمیزی جمعی، برد جمعی*

مقدمه

گراف‌ها مدل‌های ریاضی کارآمدی برای تحلیل بسیاری از مسائل دنیای واقعی هستند و بسیاری از مسائل در علوم مختلف به کمک نظریه‌ی گراف مدل‌سازی می‌شوند. مسائل متنوع کاربردی زیادی در نظریه‌ی گراف مطرح هستند، اما مسأله‌های رنگ‌آمیزی همواره از مهم‌ترین و جذاب‌ترین موضوعات در آن بوده‌اند. اگر مسائل رنگ‌آمیزی مطرح نمی‌شد، شاید نظریه‌ی گراف به شکل امروزی نبود. در واقع منشأ عمده‌ای از تحقیقات قرن بیستم در نظریه‌ی گراف، مسأله‌ی چهار-رنگ گراف‌های مسطح است که کاربردهای زیادی دارد. در مجموع رنگ‌آمیزی گراف‌ها، کاربردهای زیادی در زمینه‌های علمی و تئوری دارد و علاوه بر مسأله‌های کلاسیک تعریف شده در این زمینه، با در نظر گرفتن محدودیت‌های مختلفی روی نوع گراف‌ها، روی روش رنگ‌آمیزی و حتی تعداد و رنگ عناصر گراف‌ها، مسأله‌های متنوعی با کاربردهای وسیع در صنعت و علوم تعریف و حل می‌شود و روز به روز بر انواع رنگ‌آمیزی‌ها افزوده می‌شود.

برچسب‌دهی رأس‌های یک گراف به‌طوری‌که هر جفت از رأس‌های مجاور در آن، برچسب‌های متمایزی دریافت کنند، انواع مختلفی دارد. یکی از آن‌ها رنگ‌آمیزی رأسی از وزن‌دهی یالی گراف‌ها است، که برای اولین بار توسط کارنسکی، لوژاک و توماسن در [۲۳] مطرح شد. به این صورت که برای هر عدد صحیح مثبت k، فرض کنیم $\mathbb{N}_k = \{۱, ۲, ..., k\}$، و برای یک گراف همبند G از مرتبه‌ی ۳ یا بیشتر تابع $c : E(G) \to \mathbb{N}_k$ یک k-رنگ‌آمیزی یالی باشد که لزوماً سره نیست. برای یک رأس v از گراف G فرض کنیم، $s(v)$ مجموع رنگ‌های یال‌های واقع بر v باشد. حال c را یک **رنگ‌آمیزی k-وزن‌دهی یالی** می‌نامیم، اگر برای هر دو رأس مجاور u و v، $s(u) \neq s(v)$. کمترین مقدار k که برای G یک k-وزن‌دهی یالی داشته باشیم را با $sd(G)$ نمایش می‌دهیم.

در این پایان نامه نوع دیگری از رنگ‌آمیزی رأسی به نام رنگ‌آمیزی جمعی را مطرح کرده و مورد بررسی قرار می‌دهیم. به این صورت که گراف همبند G را در نظر می‌گیریم. برای یک رأس v از گراف G، مجموعه رأس های مجاور به v را با $N(v)$ نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم که $c : V(G) \to \mathbb{N}$ یک رنگ‌آمیزی رأسی از G باشد که رأس‌های مجاور ممکن است رنگ‌های یکسانی داشته باشند. حال $\sigma(v)$، را مجموع رنگ‌های رأس‌ها در $N(v)$ است. اگر برای هر دو رأس مجاور u و v داشته باشیم $\sigma(u) \neq \sigma(v)$، آن‌گاه c را یک **رنگ‌آمیزی جمعی** از G می‌نامیم. مینیمم تعداد رنگ‌های مورد نیاز در یک رنگ‌آمیزی جمعی از G را عدد رنگی جمعی نامیم .

مروری بر فصول پایان‌نامه به شرح زیر است.

- در فصل اول تعاریف اولیه و مورد نیاز را مطرح می‌کنیم. به این‌صورت که ابتدا تعاریف پایه‌ای را که اغلب از مراجع [۷] و [۳۰] گرفته شده‌اند مطرح کرده و سپس به‌طور مختصر به گراف‌های مسطح از مرجع [۱۰] می‌پردازیم. در ادامه نیز به انواع رنگ‌آمیزی می‌پردازیم. [۱۵، ۲۲، ۳۱]

- محور اصلی در فصل دوم رنگ‌آمیزی جمعی و پارامتر عدد رنگی جمعی است که با σ نشان داده و مقدار آن را برای خانواده‌های معروفی از گراف‌ها، مانند مسیرها، دورها، گراف‌های کامل، گراف‌های کامل چندبخشی و غیره مورد بررسی قرار می‌دهیم. [۱۵]

- در فصل سوم گراف‌های پیوسته‌ی جمعی را بر اساس رنگ‌آمیزی جمعی تعریف کرده و نشان می‌دهیم که مسیرها، دورها و درخت‌ها پیوسته‌ی جمعی هستند . [۱۵]

- در فصل آخر، تعمیمی از تعریف عدد رنگی جمعی ارائه داده و آن را برد جمعی می‌نامیم و آن را با ρ نمایش می‌دهیم و مقدار این پارامتر را روی گراف‌های کامل چندبخشی مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. سپس با مفهوم عدد رنگ‌آمیزی آشنا می‌شویم و با استفاده از قضایای صفرهای ترکیبیاتی، برد جمعی گراف‌های مسطح را بررسی می‌کنیم و برای آنها کران بالای بهتری به دست می‌آوریم. [۸، ۱۵]

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل ابتدا به بیان تعاریف پایه‌ای در نظریه‌ی گراف، که غالباً از مراجع [۷] و [۳۰] آورده شده است پرداخته، سپس مبحث گراف‌های مسطح و قضایای مهم و مورد نیاز را از [۱۰] مطرح می‌کنیم. در ادامه نیز به بیان انواع رنگ‌آمیزی‌ها به طور اجمالی می‌پردازیم.

۱.۱ تعاریف پایه‌ای

گراف G، عبارت است از یک سه‌تایی، شامل یک مجموعه‌ی $V(G)$ به نام رأس‌ها، یک مجموعه‌ی $E(G)$ به نام یال‌ها و یک رابطه‌ی وقوع، که به هر عضو از $E(G)$ یک زوج نامرتب از $V(G)$ را که لزوماً متمایز نیستند، نظیر می‌کند. اگر رابطه‌ی وقوع به یال e، دو رأس u و v را نسبت دهد، گوئیم رأس‌های u و v بر یال e واقع شده‌اند و رأس‌های انتهایی e هستند. منظور از یال uv یالی با دو رأس انتهایی u و v است. دو رأس u و v را **رأس‌های مجاور** نامیم، هرگاه یال e در $E(G)$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که u و v رأس‌های انتهایی آن باشند. در این حالت یال e را نیز مجاور یا واقع بر هر یک از رأس‌های u و v می‌نامیم. گرافی را که یک رأس داشته باشد **گراف بدیهی** و در غیر این‌صورت نابدیهی گوییم.

یال‌هایی را که دارای رأس‌های انتهایی یکسانی هستند را **یال‌های چندگانه** و یالی را که دارای دو انتهای یکسان باشد، **طوقه** می‌نامیم. گراف G را یک **گراف ساده** می‌نامیم، هرگاه یال چندگانه و طوقه نداشته باشد. از آنجایی که در هر گراف ساده، هر یال به کمک نقاط انتهایی خود به‌طور منحصربه‌فرد مشخص می‌شود، گراف ساده‌ی G را می‌توان به شکل زوج مرتب $G=(V(G),E(G))$ در نظر گرفت.

گراف G، را **متناهی** نامیم، هرگاه $V(G)$ و $E(G)$ هر دو متناهی باشند. در غیر این‌صورت گراف G را نامتناهی می‌نامیم. تعداد رأس‌های گراف G را **مرتبه‌ی** آن گراف می‌نامیم. منظور از اندازه‌ی گراف G،

تعداد یال‌های آن است.

می‌توان به هر گراف G یک ماتریس $n \times k$ نظیر کرد که آن را ماتریس وقوع G می‌نامیم. فرض کنید $v_۱, v_۲, ..., v_n$ رئوس G و $e_۱, e_۲, ..., e_k$ یال‌های G باشند. در این‌صورت ماتریس وقوع G، ماتریس $M(G) = [m_{ij}]$ است که در آن m_{ij} تعداد دفعاتی (۰، ۱ یا ۲) است که v_i بر e_j واقع می‌شود. به عبارتی؛ ماتریس وقوع طریقه‌ی دیگر مشخص کردن گراف است.
ماتریس دیگر وابسته به گراف G، ماتریس مجاورت است؛ ماتریسی است $n \times n$، $A(G) = [a_{ij}]$، که در آن a_{ij} تعداد یال‌هایی است که رئوس انتهای آن‌ها v_i و v_j هستند.

درجه‌ی رأس v در گراف G، برابر تعداد یال‌های مجاور به رأس v است و با نماد $\deg(v)$ نمایش می‌دهیم. به هر رأس در گراف G، که با رأس دلخواه v مجاور است، یک همسایه‌ی رأس v می‌گوئیم. مجموعه‌ی همه‌ی همسایه‌های رأس v در گراف G را همسایگی باز رأس v می‌نامیم و آن را با $N(v)$ نشان می‌دهیم. منظور از همسایگی بسته‌ی رأس v، که با $N[v]$ نشان می‌دهیم، مجموعه‌ی $N(v) \cup \{v\}$ است. در هر گراف، یک رأس از درجه‌ی صفر را **رأس تنها** و رأسی از درجه‌ی یک را یک رأس آویخته می‌نامیم. مینیمم درجه‌ی رئوس گراف G را با $\delta(G)$ و ماکسیمم درجه را با $\Delta(G)$ نمایش می‌دهیم.
گرافی را که درجه‌ی همه‌ی رئوس آن با یکدیگر برابر باشد، گراف منظم می‌نامیم. اگر درجه‌ی همه‌ی رئوس گراف G برابر r باشد، G را یک گراف r–**منظم** می‌نامیم.

گراف H را زیرگراف G نامیم، هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ و می‌نویسیم $H \subseteq G$. اگر $H \subsetneq G$، زیرگراف H را یک **زیرگراف سره** از G می‌نامیم.
اگر $v \in V(G)$ و $|V(G)| \geq ۲$، آن‌گاه گراف $G - v$، گراف حاصل از حذف رأس v و همه‌ی یال‌های مجاور به آن رأس است. هم‌چنین اگر $e \in E(G)$، آن‌گاه گراف $G - e$، گراف حاصل از حذف یال e است، در حالی‌که $G.e$ نشان‌دهنده‌ی انقباض در e است؛ یعنی یال e را حذف و دو انتهایش را برهم منطبق می‌کنیم.
به‌طور کلی‌تر اگر H یک زیرگراف از G باشد آن‌گاه تفاضل دو گراف G و H را که به صورت $G - H$ نشان می‌دهیم، گرافی است که در آن $V(G - H) = V(G) - V(H)$ و $E(G - H) = E(G) - E(H)$.
هم‌چنین $G.H$، نشان‌دهنده‌ی گراف به دست آمده از انقباض متوالی همه‌ی یال‌های H در G است.

مکمل گراف G را که با $\overline{G}$ نشان می‌دهیم، گرافی با مجموعه رئوس $V(G)$ است که دو رأس در آن مجاورند، اگر و تنها اگر در G مجاور نباشند.
گراف G را **کامل** می‌نامیم، هرگاه هر دو رأس متمایز در آن مجاور باشند. گراف کامل n رأسی را با K_n نمایش می‌دهیم. زیرگراف H از گراف G را خوشه در G نامیم، هرگاه H یک گراف کامل باشد. مرتبه‌ی

بزرگ‌ترین خوشه در گراف G را با $\omega(G)$ نشان می‌دهیم و آن را **عدد خوشه‌ای** گراف G می‌نامیم.

یک **گشت** در گراف G عبارت است از دنباله‌ی متناهی $W : v_۰e_۱v_۱...e_kv_k$ به‌طوری‌که برای هر i، $e_i = v_{i-۱}v_i$. رأس $v_۰$ را ابتدا و رأس v_k را انتهای گشت می‌نامیم و طول گشت برابر با تعداد یال‌های آن است.
اگر در گشت W، $v_۰ = v_k$ آن‌گاه W را یک گشت بسته می‌نامیم. در صورتی که همه‌ی یال‌ها و رأس‌های ظاهر شده در گشت متمایز باشد، آن را یک **مسیر** می‌نامیم و یک مسیر بسته را **دور** نامیم. مسیر شامل n رأس را P_n و دور شامل n رأس را با C_n نشان می‌دهیم. مرتبه‌ی کوتاه‌ترین دور گراف G را **کمر** گراف می‌نامیم.
گرافی را که بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود دارد **همبند** و در غیر این‌صورت **ناهمبند** می‌نامیم.
زیرگراف همبند ماکسیمال یک گراف را **مؤلفه‌ی همبندی** آن گراف می‌نامیم. در گراف همبند G، طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس u و v را **فاصله** بین آن دو رأس می‌نامیم و آن را با $d_G(u, v)$ نمایش می‌دهیم.
قطر یک گراف مانند G برابر است با

$$\mathrm{diam}(G) = \max\{d_G(u, v) : u, v \in V(G)\}.$$

برای رأس دلخواه v، **خروج از مرکز** v برابر است با

$$e_v(G) = \max\{d_G(u, v) : u \in V(G)\}.$$

کمترین مقدار خروج از مرکز رئوس گراف G را **شعاع گراف** G نامیم و آن را با $r(G)$ نشان می‌دهیم.

گراف G را **گراف دوبخشی** نامیم، هرگاه بتوان $V(G)$ را به دو زیرمجموعه‌ی ناتهی X و Y افراز کرد به‌طوری‌که هر یال یک انتها در X و یک انتها در Y داشته باشد. به دو مجموعه‌ی X و Y بخش‌های گراف G می‌گوئیم. به راحتی می‌توان نشان داد که یک گراف دوبخشی است، اگر و تنها اگر طول هر دور در آن زوج باشد. گراف G را دوبخشی کامل می‌نامیم، هرگاه هر رأس X و هر رأس Y مجاور باشند و اگر $|X| = n$ و $|Y| = m$، آن را با $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم.
در حالت کلی یک گراف k-**بخشی** مثل G که $k \geq ۱$، گرافی است که بتوان مجموعه‌ی رئوس آن را به k مجموعه‌ی مجزا افراز کرد، به‌طوری‌که رئوس انتهایی هر یال از G، در دو بخش متمایز قرار گیرند.

گراف بی‌دور یا **جنگل**، گرافی است که شامل هیچ دوری نباشد. **درخت**، گراف همبند بی‌دور است. بنابراین هر مؤلفه‌ی همبندی یک جنگل یک درخت است. ممکن است یک جنگل فقط شامل یک درخت

باشد. با استفاده از استقراء می‌توان نشان داد که تعداد یال‌ها در یک درخت n رأسی برابر $n-1$ است. هم‌چنین واضح است که هر درخت، یک گراف دوبخشی است.

گراف جهت‌دار D یک سه‌تایی مرتب $(V(D), A(D), \psi_D)$ است که متشکل از مجموعه‌ی ناتهی $V(D)$ رأس‌ها، مجموعه‌ی $A(D)$ کمان‌ها، مجزا از $V(D)$ و یک تابع وقوع ψ_D است که با هر کمان D یک جفت مرتب (نه لزوماً مجزا) از رأس‌های D را همراه می‌کند. اگر به کمان e زوج مرتب (u, v) نظیر شود، v را سر e و u را **دم** e گوئیم. **درجه‌ی ورودی** رأس v در D تعداد کمان‌های با سر v و **درجه‌ی خروجی** رأس v تعداد کمان‌های با دم v است و آن‌ها را به ترتیب با $d_D^-(v)$ و $d_D^+(v)$ نمایش می‌دهیم.

یک تطابق در گراف دلخواه G، یک زیرمجموعه‌ی M از یال‌هاست که هیچ دو یالی در M انتهای مشترک ندارند. تطابق M از گراف G را **تطابق کامل** نامیم، هرگاه این تطابق همه‌ی رئوس G را بپوشاند.

قضیه ۱.۱.۱ **(هال)** [۱] [۱۰] فرض کنیم G یک گراف دوبخشی با بخش‌های X و Y باشد. در این‌صورت G دارای تطابقی است که همه‌ی رئوس X را می‌پوشاند، اگر و تنها اگر به‌ازای هر زیرمجموعه‌ی S از X داشته باشیم:

$$|N(S)| \geq |S|,$$

که $N(S)$ مجموعه‌ی همه‌ی رئوسی تعریف می‌شود که حداقل یک همسایه در S دارند.

زیرمجموعه‌ی S از V را یک مجموعه‌ی مستقل از گراف G می‌نامیم، اگر هیچ دو رأسی از S در G مجاور نباشند. یک مجموعه‌ی مستقل، ماکسیمم است، اگر G دارای مجموعه‌ی مستقل S' با شرط $|S'| > |S|$ نباشد. تعداد رأس‌ها در مجموعه‌ی مستقل ماکسیمم G را **عدد استقلال** G می‌نامیم و آن را با $\alpha(G)$ نشان می‌دهیم.

۲.۱ گراف‌های مسطح

تعریف ۱.۲.۱ یک گراف G را مسطح نامیم، اگر بتوان G را در صفحه طوری رسم کرد که هیچ دو یال G یکدیگر را در نقطه‌ای غیر از رئوس قطع نکنند. این چنین رسم کردن گراف G را نمایش صفحه‌ای G نامیم. در این حالت هم‌چنین می‌گوییم که G در یک صفحه نشانده می‌شود. **گراف مسطح شده‌ی** G عبارت است از یک گراف مسطح که از پیش در یک صفحه نشانده شده است. یک گراف مسطح شده‌ی G صفحه را به تعدادی ناحیه‌ی همبند افراز می‌کند؛ بستارهای این ناحیه‌ها را وجه‌های G می‌نامیم. تعداد

[۱] Hall

وجه‌های گراف G را با $f(G)$ نمایش می‌دهیم. ▲

تعریف ۲.۲.۱ یال e از گراف G را یال برشی می‌نامیم، هرگاه تعداد مؤلفه‌های همبندی $G-e$ بیشتر از تعداد مؤلفه‌های همبندی G باشد. ▲

تعریف ۳.۲.۱ رأس‌ها و یال‌های یک گراف مسطح شده که به یک وجه G تعلق دارند را مجاور با آن وجه می‌نامیم. اجتماع رأس‌ها و یال‌های G که مجاور با وجهی از G هستند را مرز وجه نامیم. **درجه‌ی یک وجه** را نیز برابر تعداد یال‌های مجاور با آن وجه تعریف می‌کنیم و با $d(f)$ نشان می‌دهیم. در شمارش درجه‌ی یک وجه، یک یال برشی دوبار محاسبه می‌شود. ▲

هر یال یک گراف مسطح شده‌ی G، دوبار در مجموع درجه‌ی وجه‌ها مشارکت می‌کند. این نتیجه می‌دهد که اگر F نشان دهنده‌ی مجموعه‌ی همه‌ی وجه‌های یک گراف مسطح شده‌ی G و e تعداد یال‌های آن گراف باشد، آن‌گاه $\sum_{f\in F} d(f) = ۲e$.

قضیه ۴.۲.۱ (فرمول اویلر) [۲] [۱۰] در هر گراف مسطح همبند G که v و e و f به ترتیب تعداد رئوس، تعداد یال‌ها و تعداد وجوه هستند، داریم $v-e+f=۲$.

اکنون با استفاده از فرمول اویلر نتایج زیر را می‌توانیم مطرح کنیم.

نتیجه ۵.۲.۱ [۱۰] اگر G یک گراف ساده‌ی مسطح با حداقل سه رأس باشد، آن‌گاه $e \le ۳v-۶$. هم‌چنین اگر G فاقد مثلث باشد، آن‌گاه $e\le ۲v-۴$.

نتیجه ۶.۲.۱ [۱۰] هر گراف ساده‌ی مسطح یک رأس از درجه‌ی حداکثر ۵ دارد.

۳.۱ مروری بر انواع رنگ‌آمیزی

مسأله‌های رنگ‌آمیزی گراف‌ها در شکل‌های مختلفی دیده می‌شوند، اما هدف مشترک در همه‌ی آن‌ها افراز اشیایی از یک گراف (مانند رأس، یال، وجه یا...) به کلاس‌های مختلف است به‌طوری‌که شرایط از پیش تعیین شده برقرار باشد. قدیمی‌ترین نوع این مسائل، مسأله‌ی تخصیص رنگ به رئوس یک گراف است، به‌طوری‌که هر دو رأس مجاور رنگ‌های متفاوتی دریافت کنند.

تعریف ۱.۳.۱ یک رنگ‌آمیزی رأسی سره از گراف G، یک نگاشت $c: V(G)\to S$ است که در آن S یک مجموعه از رنگ‌های متمایز است و برای هر یال $uv\in E(G)$ داریم $c(u)\neq c(v)$. **عدد رنگی گراف** G را که با $\chi(G)$ نمایش می‌دهیم، برابر مینیمم تعداد رنگ‌های مورد نیاز برای رنگ‌آمیزی رأسی سره‌ی G تعریف می‌کنیم. ▲

[۲] Euler formula

تعریف ۲.۳.۱ یک گراف G را kـ**رنگ‌پذیر** می‌نامیم، اگر G دارای یک رنگ‌آمیزی رأسی سره باشد که از حداکثر k رنگ استفاده می‌کند. ▲

مشهورترین مسأله‌ی رنگ‌آمیزی، مسأله‌ی ۴ـرنگ است که در آن وجود یک رنگ‌آمیزی رأسی سره با حداکثر ۴ رنگ برای هر گراف مسطح، حدس زده شده بود. در سال ۱۹۷۶ آپل و هیکن درستی این حدس را در [۶] و [۵] تأیید کردند. اما بعدها بهبودهایی از این اثبات ارائه شد. برای مطالعه‌ی تاریخچه‌ی جالب این مسأله می‌توانید به مراجع [۲۷] و [۲۶] مراجعه کنید.

قضیه ۳.۳.۱ [۵] هر گراف مسطح ساده همبند، ۴ـرنگ‌پذیر است.

تعریف ۴.۳.۱ یک **رنگ‌آمیزی یالی** برای گراف G عبارت است از نگاشت $c : E(G) \to M$ که به هر یال G، رنگی از مجموعه‌ی M نسبت می‌دهد. اگر M مجموعه‌ای شامل k رنگ باشد، c را یک kـرنگ‌آمیزی یالی می‌نامیم. اگر در رنگ‌آمیزی c هیچ دو یال مجاوری هم‌رنگ نباشند، c را یک رنگ‌آمیزی یالی سره می‌نامیم. کوچک‌ترین k که G یک kـرنگ‌آمیزی یالی سره داشته باشد را **عدد رنگی یالی** می‌نامیم و با $\chi'(G)$ نمایش می‌دهیم. ▲

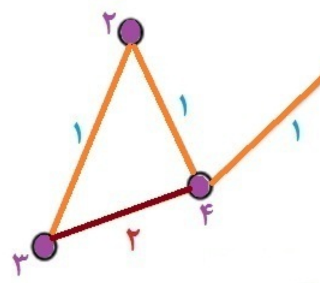
تعریف ۵.۳.۱ یک رنگ‌آمیزی c روی رئوس یا یال‌های گراف G، **تمایزگر همسایه‌ای** نامیده می‌شود، اگر رنگ‌آمیزی c در نظر گرفته شده، یک برچسب‌گذاری رأسی را اختصاص دهد به‌طوری‌که هر جفت از رأس‌های مجاور در G، برچسب‌های متمایزی بگیرند. ▲

برای مثال رنگ‌آمیزی رأسی سره یک رنگ‌آمیزی تمایزگر همسایه‌ای است. نمونه‌های دیگری نیز وجود دارد که در ادامه به آنها اشاره می‌کنیم.

تعریف ۶.۳.۱ [۲۳] برای هر عدد صحیح k فرض کنید $\mathbb{N}_k = \{۱, ۲, ..., k\}$ و برای گراف همبند G از مرتبه‌ی حداقل ۳ فرض کنید که $c : E(G) \to \mathbb{N}_k$ یک kـرنگ‌آمیزی یالی باشد که لزوماً سره نیست. برای یک رأس v از گراف G فرض کنید $S(v)$ مجموع رنگ‌های یال‌های واقع بر v باشد. رنگ‌آمیزی c یک kـ**رنگ‌آمیزی یالی تمایزگر همسایه‌ای** است، اگر برای هر دو رأس مجاور u و v داشته باشیم $S(u) \neq S(v)$. کمترین مقدار k برای این‌که G یک kـرنگ‌آمیزی یالی تمایزگر همسایه‌ای داشته باشد را **مجموع اندیس تمایزگر** می‌نامیم و آن را با $sd(G)$ نمایش می‌دهیم. (در بعضی مراجع، این پارامتر را با $\mu(G)$ یا χ^e_ω نمایش می‌دهند.) ▲

مثال ۷.۳.۱ گراف G را مطابق شکل ۱.۱ در نظر می‌گیریم. مشاهده می‌کنیم که یک ۲ـرنگ‌آمیزی یالی تمایزگر همسایه‌ای برای G وجود دارد. به عبارتی $sd(G) \leq ۲$.

★



شکل ۱.۱: *رنگ‌آمیزی یالی تمایزگر همسایه‌ای*

گزاره ۸.۳.۱ [۱۳] اگر P_n و C_n به ترتیب مسیر و دور با n رأس باشند، آن‌گاه

$$sd(P_n) = \begin{cases} ۱ & n = ۳ \\ ۲ & n \geq ۴ \end{cases} , \qquad sd(C_n) = \begin{cases} ۲ & n \equiv ۰ \pmod{۴} \\ ۳ & \text{در غیراین‌صورت.} \end{cases}$$

قضیه ۹.۳.۱ [۲۳] اگر G یک گراف ۳ـرنگ‌پذیر از مرتبه‌ی ۳ یا بیشتر باشد، آن‌گاه $sd(G) \leq ۳$.

هم‌چنین کارنسکی و همکاران حدس زدند که ۳ـرنگ‌پذیر بودن گراف G در قضیه‌ی ۹.۳.۱ ضروری نیست.

حدس ۱۰.۳.۱ *(۱,۲,۳) اگر G یک گراف همبند از مرتبه‌ی ۳ یا بیشتر باشد، آن‌گاه $sd(G) \leq ۳$.*

کالکوسکی و همکاران در [۲۲] ثابت کردند که پارامتر مجموع اندیس تمایزگر نمی‌تواند بزرگ باشد.

قضیه ۱۱.۳.۱ [۲۲] اگر G یک گراف همبند از مرتبه‌ی ۳ یا بیشتر باشد، آن‌گاه $sd(G) \leq ۵$.

تعریف ۱۲.۳.۱ [۳۱] رنگ‌آمیزی یالی سره‌ای که در آن برای هر دو رأس مجاور، مجموعه‌ی رنگ‌های ظاهر شده روی یال‌های واقع بر آن دو رأس متفاوت باشد، یک **تمایزگر رأسی مجاورتی** گفته می‌شود. برای گراف G مینیمم مقدار k، که برای آن یک رنگ‌آمیزی یالی سره از G وجود دارد، به‌طوری‌که تمایزگر رأسی مجاورتی باشد را با نماد $\chi'_a(G)$ نمایش می‌دهیم. ▲

به وضوح اگر گراف شامل یک یال تنها باشد، آن‌گاه رنگ‌آمیزی یالی تمایزگر همسایه‌ای خوش‌تعریف نیست. چرا که هر رنگی که به این یال تخصیص دهیم، دو رأس انتهایی مجموع رنگی و مجموعه‌ی رنگی یکسانی دریافت می‌کنند. بنابراین همواره گراف‌هایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که فاقد یال تنها باشند. حاتمی در [۲۰] با استفاده از قرار دادن رنگ تصادفی روی یال‌ها، کرانی برای پارامتر $\chi'_a(G)$ به دست آورد.

قضیه ۱۳.۳.۱ [۲۰] اگر G گرافی فاقد یال تنها باشد و $\Delta(G) > 10^{20}$، آن‌گاه

$$\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 300.$$

ادواردز و همکاران توانستند در [۱۷] قضیه‌ی زیر را ثابت کنند.

قضیه ۱۴.۳.۱ [۱۷] اگر G گرافی دوبخشی، مسطح و با ماکسیمم درجه‌ی $\Delta(G) \geq 12$، آن‌گاه

$$\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

تعریف ۱۵.۳.۱ [۱۲] رنگ‌آمیزی یالی سره‌ای که در آن برای هر دو رأس دلخواه(نه لزوماً مجاور)، مجموعه‌ی رنگ‌های ظاهر شده روی یال‌های واقع بر آن دو رأس متفاوت باشد، یک **تمایزگر رأسی** گفته می‌شود. برای گراف G مینیمم مقدار k، که برای آن یک رنگ‌آمیزی یالی سره از G وجود دارد، به‌طوری‌که تمایزگر رأسی باشد را با نماد $\chi'_s(G)$ نمایش می‌دهیم. ▲

پارامتر $\chi'_s(G)$ توسط بوریس و شلپ در [۱۲] معرفی شد و کران بالایی نیز برای آن به اثبات رسید.

قضیه ۱۶.۳.۱ [۱۲] اگر G گرافی n رأسی شامل n_i رأس از درجه‌ی i باشد، آن‌گاه ثابت c وابسته به $\Delta(G)$ چنان موجود است که

$$\chi'_s(G) \leq c.\max\{n_i^{1/i} : 1 \leq i \leq \Delta(G)\}.$$

هم‌چنین بازگان و همکاران در [۹] در مورد پارامتر فوق قضیه‌ی زیر را با اثبات رساندند.

قضیه ۱۷.۳.۱ [۹] اگر G گرافی با n رأس فاقد یال تنها و شامل حداکثر یک رأس تنها باشد، آن‌گاه

$$\chi'_s(G) \leq n + 1.$$

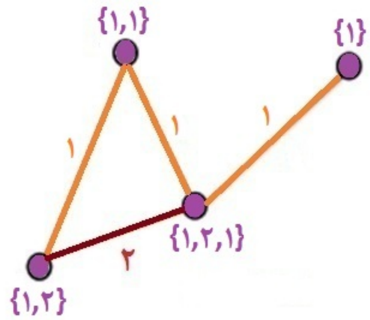
اکنون می‌خواهیم رنگ‌آمیزی تمایزگر همسایه‌ای دیگری را که به وسیله‌ی کارنسکی و همکاران مطرح شد، بیان کنیم. اما لازم می‌دانیم ابتدا تعریفی از چندمجموعه داشته باشیم.

تعریف ۱۸.۳.۱ منظور از یک **چندمجموعه**، یک گردایه از اشیا است که اعضای آن می‌توانند تکرار شوند. مثلاً گردایه $\{1,1,2,2,3\}$ یک چندمجموعه است. ▲

تعریف ۱۹.۳.۱ [۲۳] برای یک kـرنگ‌آمیزی یالی c از یک گراف همبند G از مرتبه‌ی ۳ یا بیشتر و یک رأس v از گراف G فرض کنیم که $M(v)$ چندمجموعه‌ی رنگ‌های یال‌های واقع بر v باشد. رنگ‌آمیزی

c را kـ**رنگ‌آمیزی یالی تمایزگر همسایه‌ای چندمجموعه‌ای** می‌نامیم، هرگاه برای هر دو رأس مجاور u و v داشته باشیم $M(u) \neq M(v)$. کمترین مقدار k برای این‌که G، یک kـرنگ‌آمیزی یالی تمایزگر همسایه‌ای چندمجموعه‌ای داشته باشد را **اندیس تمایزگر چندمجموعه‌ای** می‌نامیم و با $md(G)$ نمایش می‌دهیم. می‌دانیم برای هر دو رأس مجاور u و v اگر $S(u) \neq S(v)$ آن‌گاه $M(u) \neq M(v)$. بنابراین $md(G) \leq sd(G)$. ▲

مثال ۲۰.۳.۱ گراف G مفروض در مثال ۷.۳.۱ را در نظر می‌گیریم. مطابق شکل ۲.۱ مشاهده می‌کنیم که $md(G) \leq ۲$.



شکل ۲.۱: *رنگ‌آمیزی یالی تمایزگر همسایه‌ای چندمجموعه‌ای*

★

نتیجه‌ی زیر توسط کارنسکی و همکاران به دست آمده است که از قضیه‌ی ۹.۳.۱ حاصل می‌شود.

قضیه ۲۱.۳.۱ [۲۳] اگر G یک گراف همبند ۳ـرنگ‌پذیر از مرتبه‌ی ۳ یا بیشتر باشد، آن‌گاه $md(G) \leq ۳$.

اداریو‌ـبری و همکاران نشان دادند که $md(G)$ نمی‌تواند از ۴ تجاوز کند، خواه گراف G ۳ـرنگ‌پذیر باشد یا نباشد.

قضیه ۲۲.۳.۱ [۱] اگر G یک گراف همبند از مرتبه‌ی ۳ یا بیشتر باشد، آن‌گاه $md(G) \leq ۴$.

نوع دیگر از رنگ‌آمیزی تمایزگر همسایه‌ای، **kـرنگ‌آمیزی tـتایی** است که بوسیله‌ی چارترند و همکاران در [۱۴] مطرح شد و به وسیله‌ی گاس و همکاران در [۱۹] مورد بررسی قرار گرفت.

تعریف ۲۳.۳.۱ برای یک عدد صحیح مثبت t، یک **kـرنگ‌آمیزی tـتایی** از یک گراف G یک تابع $c : V(G) \to P(\mathbb{N}_k)$ است که $P(\mathbb{N}_k)$ مجموعه‌ی توانی $\mathbb{N}_k$ و c در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) برای هر رأس $v \in V(G)$، $|c(v)| = t$.

۲)برای هر $۱ \leq i \leq \operatorname{diam}(G)$، اگر $d(u,v) = i$ آن‌گاه $|c(u) \cap c(v)| \leq i - ۱$.

کمترین مقدار k برای این‌که گراف G یک kـرنگ‌آمیزی tـتایی داشته باشد را عدد رنگی tـتایی می‌نامیم و آن را با $\tau_t(G)$ نمایش می‌دهیم. ▲