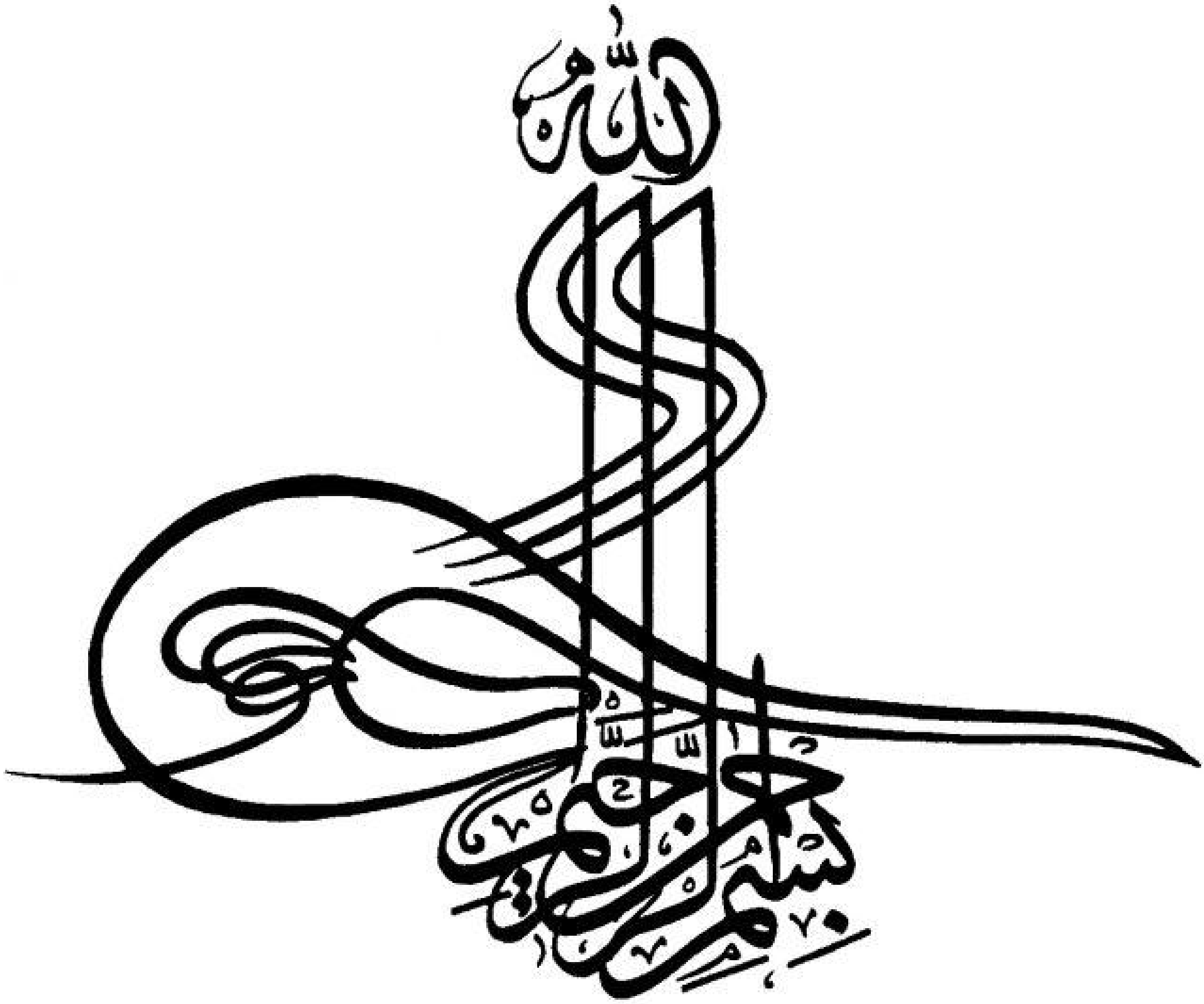
هو
بسم الله الرحمن الرحيم

۱۳۵۷
دانشگاه محقق اردبیلی
دانشکده‌ی علوم ریاضی
گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته‌ی ریاضی محض گرایش جبر

عنوان:

اثبات هم-متناهی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی برای ایده‌آلهای از بعد کم

استاد راهنما:

حسین عبدل زاده

استاد مشاور:

جعفر اعظمی

پژوهشگر:

حسین سبلانی جناقرد

مهر ۹۲

تعهدنامه‌ی اصالت اثر و رعایت حقوق دانشگاه

تمامی حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایج، ابتکارات، اختراعات و نوآوری‌های ناشی از انجام این پژوهش، متعلق به **دانشگاه محقق اردبیلی** می‌باشد. نقل مطلب از این اثر، با رعایت مقررات مربوطه و با ذکر نام دانشگاه محقق اردبیلی، نام استاد راهنما و دانشجو بلامانع است.

اینجانب حسین سبلانی جناقرد دانش‌آموخته مقطع کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش جبر دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه محقق اردبیلی به شماره‌ی دانشجویی ۹۰۲۲۴۱۳۱۰۸ که در تاریخ ۹۲/۰۷/۰۳ از پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود تحت عنوان "اثبات هم‌متناهی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی برای ایده‌آلهای از بعد کم" دفاع نموده‌ام، متعهد می‌شوم که:

۱) این پایان‌نامه را قبلاً برای دریافت هیچ‌گونه مدرک تحصیلی یا به عنوان هرگونه فعالیت پژوهشی در سایر دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزشی و پژوهشی داخل و خارج از کشور ارائه ننموده‌ام.

۲) مسئولیت صحّت و سقم تمامی مندرجات پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود را بر عهده می‌گیرم.

۳) این پایان‌نامه، حاصل پژوهش انجام شده توسط اینجانب می‌باشد.

۴) در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران استفاده نموده‌ام، مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه و با رعایت اصل امانتداری علمی، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در متن و فهرست منابع و مآخذ ذکر نموده‌ام.

۵) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده یا هر گونه بهره‌برداری اعم از نشر کتاب، ثبت اختراع و ... از این پایان‌نامه را داشته باشم، از حوزه‌ی معاونت پژوهشی و فنّاوری دانشگاه محقق اردبیلی، مجوزهای لازم را اخذ نمایم.

۶) در صورت ارائه‌ی مقاله‌ی مستخرج از این پایان‌نامه در همایش‌ها، کنفرانس‌ها، سمینارها، گردهمایی‌ها و انواع مجلات، نام دانشگاه محقق اردبیلی را در کنار نام نویسندگان (دانشجو و اساتید راهنما و مشاور) ذکر نمایم.

۷) چنانچه در هر مقطع زمانی، خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن (منجمله ابطال مدرک تحصیلی، طرح شکایت توسط دانشگاه و ...) را می‌پذیرم و دانشگاه محقق اردبیلی را مجاز می‌دانم با اینجانب مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه رفتار نماید.

حسین سبلانی جناقرد

امضا

تاریخ

دانشگاه محقق اردبیلی
۱۳۵۷
دانشکده‌ی علوم ریاضی
گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته‌ی ریاضی محض گرایش جبر

عنوان:

اثبات هم-متناهی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی برای ایده‌آلهای از بعد کم

پژوهشگر:

حسین سبلانی جناقرد

ارزیابی و تصویب شده‌ی کمیته داوران پایان‌نامه با درجه‌ی ....

نام و نام خانوادگی	مرتبه‌ی علمی	سمت	امضا
حسین عبدل‌زاده	استادیار	استاد راهنما و رئیس کمیته داوران	
جعفر اعظمی	استادیار	استاد مشاور	
احمد خوجالی بارنجی	استادیار	داور	

مهر ۹۲

تقدیم به

همسر مهربانم،

و دختر عزیزم

شادی

و همه کسانی که دوستشان دارم.

سپاس‌گزاری

سپاس، آفریننده عشق را و سپاس، کسانی که آموختن را عشق می‌دانند.سپاس، آنان را که روشنایی ردای علمشان نردبان ناجی نادانی است، آنان که معلم میثاق مهرند و شکوفاگر شاخه‌های شباب اندیشه.

در نگارش این پایان‌نامه مرهون زحمات عزیزانی هستم که بر بنده فرض عین است تا از آنان تشکر و قدردانی کنم.

نخست استاد بزرگوار و فرزانه‌ام جناب آقای **دکتر حسین عبدل‌زاده** که از راهنمایی‌های ارزشمند و عالمانه ایشان در این پایان‌نامه بسیار بهره برده‌ام و بی‌شک اگر مساعدت‌های ایشان نبود، در همان گام‌های ابتدایی متوقف می‌شدم. دوم، استاد گرامی و فرهیخته‌ام جناب آقای **دکتر جعفر اعظمی** که از راهنمایی‌های ارزشمند ایشان استفاده نموده و از افاضات و نظریات استادانه ایشان سودها برده‌ام. همچنین از استاد محترم آقای **دکتر احمد خوجالی** که زحمت داوری پایان‌نامه‌ی اینجانب را بر عهده داشته‌اند، صمیمانه تشکر می‌نمایم.

نام خانوادگی: سبلانی جناقرد　　　　　　نام: حسین

عنوان پایان‌نامه:
اثبات هم-متناهی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی برای ایده‌آلهای از بعد کم

استاد راهنما: دکتر حسین عبدل زاده
استاد مشاور: دکتر جعفر اعظمی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد
رشته: ریاضی محض　　　　　　گرایش: جبر
دانشگاه: محقق‌اردبیلی　　　　　　دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ دفاع: ۱۳۹۲/۰۷/۰۳　　　　　　تعداد صفحات: ۵۷

چکیده

فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه‌ی نوتری R، M یک R-مدول ناصفر I-هم‌متناهی و N یک R-مدول ناصفر با تولید متناهی باشد. همچنین فرض کنید یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

۱. $\dim M \leq ۱$

۲. $\dim N \leq ۲$

در اینصورت نشان می‌دهیم بازای هر $i \geq ۰$، R-مدول $Ext^i_R(N, M)$، I-هم‌متناهی است.

کلیدواژه‌ها: مدول هم‌متناهی، کوهمولوژی موضعی، مدول مینیماکس، مدول هم‌متناهی ضعیف، مدول لاسکرین ضعیف

فهرست

مقدمه

در این پایان نامه، R حلقه‌ای جابجایی، یکدار و نوتری است.

بازای ایده‌آل I از حلقه R و R–مدول M، i–مین مدول کوهمولوژی موضعی M نسبت به ایده‌آل I بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_I^i(M) = \varinjlim_{n\geqslant 1} Ext_R^i(\frac{R}{I^n}, M)$$

جهت آشنایی بیشتر در مورد مدول‌های کوهمولوژی موضعی، به منابع (برادمن و شارپ[1]، ۱۹۹۸) و (گروتندیک[2]، ۱۹۶۶) مراجعه شود. گروتندیک (۱۹۶۸) حدس زد که بازای ایده‌آل I از حلقه R و R–مدول با تولید متناهی M و هر $i \geq 0$، مدول‌های $Hom_R(\dfrac{R}{I}, H_I^i(M))$ با تولید متناهی هستند.

یکسال بعد، هارتشورن[3] (۱۹۷۰) یک مثال نقض برای حدس فوق ارائه نمود. و نیز یک R–مدول T را I–هم‌متناهی نامید درصورتیکه اولاً $\operatorname{supp}(T) \subseteq V(I)$ و ثانیاً بازای هر $i \geq 0$، $Ext_R^i(\frac{R}{I^n}, T)$ باتولید متناهی باشد.

سپس وی این سوال را مطرح کرد که تحت چه شرایطی بر حلقه R و ایده‌آل I، مدول $H_I^i(M)$ بازای هر $i \geq 0$، یک R–مدول I–هم‌متناهی خواهد بود که در آن M یک R–مدول با تولید متناهی است.

با در نظر گرفتن سوال فوق، هارتشورن (۱۹۷۰) و بعداً چیریاکسکو[4] (۲۰۰۰) نشان دادند که اگر R حلقه‌ای منظم موضعی کامل و I ایده‌آل اولی از R با خاصیت $\dim(\dfrac{R}{I}) = 1$ باشد آنگاه پاسخ مثبت است.

بعداً هونیکه و کوه[5] (۱۹۹۱) نشان دادند که اگر R یک حوزه صحیح موضعی گورنشتاین[6] کامل و I ایده‌آلی از R با خاصیت $\dim(\dfrac{R}{I}) = 1$ باشد، آنگاه برای هر R–مدول با تولید متناهی M و هر R–مدول با تولید

[1] Brodmann & Sharp
[2] Grothendieck
[3] Hartshorne
[4] Chiriacescu
[5] Huneke & Koh
[6] Gorenstein

متناهی N با خاصیت $\mathrm{supp}(N) \subseteq V(I)$، مدول‌های $Ext^j_R(N, H^i_I(M))$ بازای هر $i \geq ۰$ و هر $j \geq ۰$، با تولید متناهی هستند.

با استفاده از تکنیک بدست آمده در (هونیکه و کوه، ۱۹۹۱)، دلفینو[۱] (۱۹۹۴) نشان داد که اگر R یک حوزه صحیح موضعی کامل با بعضی از شرایط جزئی دیگر باشد آنگاه نتایج مشابهی برقرار است.

بعلاوه دلفینو و مارلی[۲] (۱۹۹۷) و یوشیدا[۳] (۱۹۹۷) فرض کامل بودن R را بطور کلی حذف کردند و نشان دادند که اگر R یک حلقه موضعی نوتری و I ایده‌آلی از R با ویژگی $\dim(\dfrac{R}{I}) = ۱$ باشد، آنگاه بازای هر R–مدول با تولید متناهی M و هر $i \geq ۰$، R–مدول‌های $H^i_I(M)$، I–هم‌متناهی هستند.

اخیراً بهمن‌پور و نقی‌پور[۴] (۲۰۰۹)، با برهان کاملاً جدید و متفاوت فرض موضعی بودن حلقه را حذف کرده و نتیجه را برای همه حلقه‌های نوتری ثابت کرده‌اند. همچنین هونیکه و کوه (۱۹۹۱) نشان داده‌اند بازای R–مدول‌های با تولید متناهی M و C و ایده‌آل I از حلقه موضعی و نوتری و کامل R با خاصیت $\dim(\dfrac{R}{I}) = ۱$ تحت شرایط خاصی R–مدول $Ext^1_R(C, H^i_I(M))$، I–هم‌متناهی است.

یکی از اهداف کلی این پایان نامه این است که نتیجه فوق حالت خاصی از یک واقعیت کلی بصورت زیر است.

قضیه: فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه نوتری R و M یک R–مدول با تولید متناهی باشد که $\dim(\dfrac{M}{IM}) \leq ۱$. در اینصورت بازای هر R–مدول با تولید متناهی N و هر $i \geq ۰$، R–مدول $Ext^i_R(N, H^i_I(M))$، I–هم‌متناهی است.

در واقع قضیه فوق نیز نتیجه‌ای جزئی از یک واقعیت کلی‌تر بصورت زیر است.

قضیه: فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه نوتری R و M یک R–مدول I–هم‌متناهی باشد بطوریکه $\dim(M) \leq ۱$. دراینصورت بازای هر R–مدول با تولید متناهی N و هر $i \geq ۰$، R–مدول $Ext^i_R(N, M)$، I–هم‌متناهی است.

اما این قضیه خود سوالی اساسی بصورت زیر را در ذهن خواننده به وجود می‌آورد:

[۱] Delfino
[۲] Marley
[۳] Yoshida
[۴] Bahmanpour & Naghipour

پرسش: اگر I ایده‌آلی از حلقه نوتری R و M یک R-مدول I-هم‌متناهی باشد تحت چه شرایطی بازای R-مدول با تولید متناهی N، R-مدول $Ext_R^i(N,M)$، I-هم‌متناهی است.

پاسخ این سوال همواره مثبت نیست ولی تحت شرایط زیر پاسخ مثبتی برای آن ارائه می‌دهیم:

قضیه: فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه نوتری R و M یک R-مدول I-هم‌متناهی و N یک R-مدول با تولید متناهی باشد بطوریکه $\dim(M) \leq ۱$ یا $\dim(N) \leq ۲$. در اینصورت بازای هر $i \geq ۰$، R-مدول $Ext_R^i(N,M)$، I -هم‌متناهی است.

دیوانی‌آذر و مافی[۱] (۲۰۰۶, ۲۰۰۵) مدول‌های لاسکرین ضعیف را برای اولین بار معرفی کرده‌اند. طبق تعریف آنها روی یک حلقه نوتری R، R-مدول M را لاسکرین ضعیف گوییم هرگاه بازای هر زیر مدول N از M، مجموعه ایده‌آلهای اول وابسته R-مدول $\frac{M}{N}$ متناهی باشد. همچنین آنها بعنوان تعمیمی از مفهوم مدول‌های I-هم‌متناهی، مدول‌های بطور ضعیف I-هم‌متناهی را معرفی کرده‌اند. طبق تعریف آنها یک R-مدول مانند T را بطور ضعیف I-هم‌متناهی گوییم هرگاه $\operatorname{supp}(T) \subseteq V(I)$ و بازای هر $i \geq ۰$، R-مدول $Ext_R^j(\frac{R}{I},T)$ لاسکرین ضعیف باشد.

در ادامه این پایان نامه، قضایای زیر را نیز نشان خواهیم داد:

قضیه: فرض کنید (R,m) موضعی، I ایده‌آلی از R، M یک R-مدول I-هم‌متناهی و N یک R-مدول با تولید متناهی با خاصیت $\dim(N) = ۳$ باشد. در اینصورت بازای هر $i \geq ۰$، R-مدول $Ext_R^i(N,M)$، بطور ضعیف I-هم‌متناهی است.

قضیه: فرض کنید (R,m) موضعی، I ایده‌آلی از R و M یک R-مدول I-هم‌متناهی باشد بطوریکه $\dim(M) \leq ۲$. در اینصورت بازای هر $i \geq ۰$ و هر R-مدول با تولید متناهی N، R-مدول $Ext_R^i(N,M)$ بطور ضعیف I-هم‌متناهی است.

[۱] Divaani Aazar & Maafi

فصل ۱
مقدمات و مفاهیم اولیه

در این فصل به طور خلاصه برخی از تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می گیرند را مرور می کنیم. همچنین فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابجایی یکدار و نوتری باشد.

۱.۱ حلقه و مدول

۱.۱.۱ تعاریف مقدماتی از حلقه و مدول

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید I ایده‌آلی ازحلقه R باشد. رادیکال I عبارتست از

$$r(I)=\sqrt{I}=\{x\in R:\exists n\in\mathbb{N}, x^n\in I\}.$$

تعریف ۲.۱.۱. عنصر r از حلقه R را پوچتوان گویند هرگاه عدد طبیعی n وجود داشته باشد بطوریکه

$$r^n=\circ_R$$

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم I ایده‌آلی ازحلقه R باشد. پوچساز[۱] ایده‌آل I عبارت است از

$$Ann_R(I)=(o\underset{R}{:}I)=\{r\in R:\forall a\in I, ra=\circ\}.$$

تعریف ۴.۱.۱. ایده‌آل I از حلقه R را اول گویند هرگاه اولاً $I\neq R$، ثانیاً بازای هر $a,b\in R$، اگر $ab\in I$ آنگاه $a\in I$ یا $b\in I$. مجموعه همه ایده‌آل‌های اول R رابا $Spec(R)$ نشان می‌دهند.

مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول R که شامل I هستند را با $V(I)$ نشان می‌دهند یعنی

$$V(I)=\{p\in Spec(R):I\subseteq p\}.$$

اعضای مینیمال $V(I)$ را ایده‌آل‌های اول مینیمال I گویند. همچنین مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول مینیمال I را با $Min(I)$ نشان می‌دهند.

[۱] Annihilator

تعریف ۵.۱.۱. ایده‌آل I از حلقه R را ماکسیمال گویند هرگاه اولاً $I \neq R$، ثانیاً اگر J ایده‌آل دیگری باشد بطوریکه $I \subseteq J \subseteq R$، آنگاه $J = R$ یا $J = I$.

مجموعه همه ایده‌آل‌های ماکسیمال R را با نماد $\mathrm{Max}(R)$ نشان می‌دهند. همچنین اشتراک همه ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه R را رادیکال جاکوبسون حلقه R نامیده و با نماد $J(R)$ یا $Jac(R)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۶.۱.۱. ایده‌آل I از حلقه R را اولیه گویند هرگاه اولاً $I \neq R$، ثانیاً اگر $a, b \in R$ موجود باشند بطوریکه $ab \in I$، آنگاه $a \in I$ یا $b \in r(I)$.

تعریف ۷.۱.۱. حلقه R را نیم‌موضعی[۱] گویند هرگاه تعداد ایده‌آل‌های ماکسیمال آن متناهی باشد. به عبارت دیگر:

$$|\mathrm{Max}(R)| < \infty$$

تعریف ۸.۱.۱. حلقه R را موضعی[۲] گویند هرگاه نوتری بوده و دقیقاً یک ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد.

اگر R موضعی و $\underline{m}$ ایده‌آل ماکسیمال آن باشد، آنگاه می‌گوییم $(R, \underline{m})$ حلقه‌ای موضعی است.

تعریف ۹.۱.۱. R–مدول M را با تولید متناهی[۳] گوییم هرگاه توسط زیرمجموعه‌ای متناهی مانند J از M تولید شود.

اگر $J = \{j_1, ..., j_n\}$ مجموعه مولدی برای M باشد، آنگاه می‌نویسیم $M = \langle j_1, ..., j_n \rangle$ و هر عضو M نمایشی بصورت $\sum_{i=1}^{n} r_i j_i$ خواهد داشت که در آن بازای هر $1 \leq i \leq n$، $r_i \in R$.

قضیه ۱۰.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و M یک R–مدول باشد. در اینصورت شرایط زیر معادلند:

۱. هر زنجیر صعودی از زیرمدول‌های M متوقف می‌شود.

۲. هرگردایه از زیرمدول‌های M نسبت به شمول دارای عضو ماکسیمال است.

۳. هر زیرمدول M با تولید متناهی است.

[۱] Semi-Local
[۲] Local ring
[۳] Finitely generated

برهان. به لم ۳۶۰۳ از مرجع (شارپ، ۱۹۹۰) مراجعه شود. □

تعریف ۱۱.۱.۱. R–مدول M را نوتری[۱] گویند هرگاه در یکی از شرایط معادل قضیه ۱۰۰۱۰۱ صدق کند.

قضیه ۱۲.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و M یک R–مدول باشد. در اینصورت شرایط زیر معادلند:

۱. هر زنجیر نزولی از زیرمدول‌های M متوقف می‌شود.

۲. هر مجموعه ناتهی از زیرمدول‌های M نسبت به شمول دارای عضو مینیمال است.

برهان. به لم ۳۶۰۳ از مرجع (شارپ، ۱۹۹۰) مراجعه شود. □

تعریف ۱۳.۱.۱. R–مدول M را آرتینی[۲] گویند هرگاه در یکی از شرایط معادل قضیه ۱۲۰۱۰۱ صدق کند.

تعریف ۱۴.۱.۱. یک زنجیر به طول n از ایده‌آل‌های اول حلقه R زنجیری به فرم زیر است

$$p_0 \subsetneqq p_1 \subsetneqq \dots \subsetneqq p_n.$$

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. بعد[۳] حلقه R عبارت است از سوپریمم مجموعه همه طول‌های زنجیرهایی به شکل $p_0 \subsetneqq p_1 \subsetneqq \dots \subsetneqq p_n$ از ایده‌آل‌های اول حلقه R که با $\dim(R)$ نشان داده می‌شود.

اگر سوپریمم فوق موجود نباشد قرار می‌دهیم $\dim(R) = \infty$.

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و A حلقه‌ای است که ساختار R–مدولی نیز دارد. در اینصورت A را یک R–جبر گویند هرگاه بازای هر $r \in R$ و هر $a, b \in A$، داشته باشیم:

$$r(ab) = (ra)b = a(rb)$$

تعریف ۱۷.۱.۱. زیرمدول N از R–مدول M را یک جمعوند مستقیم M گویند هرگاه زیرمدول K از M موجود باشد بطوریکه $M = N + K(d.s)$

[۱] Noetherian
[۲] Artinian
[۳] Dimension

۲.۱.۱ مروری بر مفاهیم رشته، کاتگوری و فانکتور

تعریف ۱۸.۱.۱. رشته $\cdots \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$ از R–مدول‌ها و R–همومورفیسم‌ها را o–رشته گویند هرگاه بازای هر i داشته باشیم: $\operatorname{Im} f_{i-1} \subseteq Ker f_i$.

تعریف ۱۹.۱.۱. رشته $\cdots \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$ را در A_i دقیق گویند هرگاه: $\operatorname{Im} f_{i-1} = Ker f_i$.

همچنین این رشته را دقیق گویند هرگاه بازای هر i، در A_i دقیق باشد. یعنی $\operatorname{Im} f_{i-1} = Ker f_i$. و بالاخره رشته

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

را دقیق گویند هرگاه $\operatorname{Im} f = Ker g$، f یک‌به‌یک و g پوشا باشد. این رشته را رشته دقیق کوتاه گویند.

تعریف ۲۰.۱.۱. یک کاتگوری مانند C شامل گردایه‌ای از اشیاء بنام $obj(C)$، همچنین مجموعه‌ای از عناصر به نام مرفیسم‌ها بازای هر زوج (A, B) از $obj(C)$ که با نماد $Hom_C(A, B)$ نشان داده می‌شود و عمل دوتایی

$$Hom_C(A, B) \times Hom_C(B, D) \to Hom_C(A, D)$$

$$(f, g) \mapsto gf$$

که در اصول زیر صدق می‌کند:

۱. بازای هر عضو A، مرفیسم همانی $1_A \in Hom_C(A, A)$ وجود دارد بطوریکه بازای هر $f \in Hom_C(A, B)$ داریم: $f 1_A = f$ و $1_B f = f$.

۲. اگر $f \in Hom_C(A, B)$، $g \in Hom_C(B, D)$ و $h \in Hom_C(D, E)$ باشد، آنگاه

$$h(gf) = (hg)f.$$

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنید C و D دو کاتگوری باشند. یک فانکتور هموردا[1] مانند T نگاشتی است از C به D که در شرایط زیر صدق می‌کند:

[1] Covariant

۱. اگر $A \in obj(C)$، آنگاه $T(A) \in obj(D)$.

۲. اگر $f : A \to A'$ یک مرفیسم در کاتگوری C باشد، آنگاه $T(f) : T(A) \to T(A')$ یک مرفیسم در کاتگوری D است.

۳. اگر $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} A''$ مرفیسم‌هایی در کاتگوری C باشند، آنگاه داریم: $T(gf) = T(g)T(f)$.

۴. بازای هر $A \in obj(C)$ داریم: $T(1_A) = 1_{T(A)}$.

همچنین T را یک فانکتور پادورد[۱] گویند هرگاه

$$T(gf) = T(f)T(g)\cdot$$

تعریف ۲۲.۱.۱. فانکتور T را R–خطی[۲] گوییم هرگاه

۱. بازای هر دو R–همومورفیسم $f, g : M \longrightarrow N$ داشته باشیم

$$T(f+g) = T(f) + T(g)\cdot$$

۲. بازای هر R–همومورفیسم $f : M \longrightarrow N$ و هر عضو r از R داشته باشیم

$$T(rf) = rT(f)\cdot$$

۳.۱.۱ حد مستقیم

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنید I یک مجموعه مرتب جزئی و $\mathrm{H} = \left\{ \{\mathrm{M_i}\}_{\mathrm{i \in I}}, \{\mu_{\mathrm{ij}}\}_{\substack{\mathrm{i,j \in I} \\ \mathrm{i \leqslant j}}} \right\}$ یک خانواده از R–مدول‌ها و R–همومورفیسم‌ها باشد بطوریکه دارای خواص زیر است:

۱. اگر $i \leq j$ آنگاه $\mu_{ij} : M_i \to M_j$ یک R–همومورفیسم و $\mu_{ii} : M_i \to M_i$ همومورفیسم همانی است.

۲. بازای هر $i, j, k \in I$ با شرط $i \leq j \leq k$، نمودار زیر جابجایی است:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\mu_{ij}"] \arrow[d, "\mu_{ik}"'] & M_j \arrow[dl, "\mu_{jk}"] \\ M_k & \end{tikzcd}$$

[۱] Contravariant
[۲] R-linear

در اینصورت H را یک دستگاه مستقیم از R–مدول‌ها و R–همومورفیسم‌ها گویند.

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنید $\mathrm{H} = \left\{ \{\mathrm{M_i}\}_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}}, \{\mu_{\mathrm{ij}}\}_{\substack{\mathrm{i,j}\in\mathrm{I}\\ \mathrm{i}\leqslant \mathrm{j}}} \right\}$ یک دستگاه مستقیم باشد. در اینصورت خانواده $\mathrm{H}' = \left\{ M, \{\mu_i\}_{i\in I} \right\}$ را که در آن M یک R–مدول است حد مستقیم دستگاه مستقیم H می‌نامند هرگاه دارای شرایط زیر باشد:

۱. بازای هر $i \in I$، $\mu_i : M_i \to M$ یک R–همومورفیسم است بطوریکه دیاگرام زیر جابجایی است:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\mu_{ij}"] \arrow[d, "\mu_i"'] & M_j \arrow[dl, "\mu_j"] \\ M & \end{tikzcd}$$

۲. اگر N، R–مدول دیگری باشد بطوریکه دیاگرام زیر جابجایی باشد:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\mu_{ij}"] \arrow[d, "\lambda_i"'] & M_j \arrow[dl, "\lambda_j"] \\ N & \end{tikzcd}$$

آنگاه R–همومورفیسم منحصربفردی مانند $\lambda : M \to N$ موجود باشد بطوریکه نمودار زیر جابجایی باشد:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\mu_i"] \arrow[d, "\lambda_i"'] & M \arrow[dl, "\lambda"] \\ N & \end{tikzcd}$$

حد مستقیم فوق را با $\varinjlim_{i\in I} M_i$ نشان می‌دهیم.

۴.۱.۱ حلقه‌ی کسرها

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. زیرمجموعه S از R را بسته‌ی ضربی گویند هرگاه:

۱. $1_R \in S$

۲. $\forall a, b \in S; ab \in S$

اگر $P \in Spec(R)$ باشد در اینصورت $R - P$ بسته‌ی ضربی است.

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض کنید R حلقه و S زیر مجموعه بسته‌ی ضربی از آن باشد. مجموعه $R \times S$ را تشکیل داده و بر آن رابطه $\sim$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall a, b \in R, \forall s_1, s_2 \in S; (a, s_1) \sim (b, s_2) \Leftrightarrow \exists t \in S; t(as_2 - bs_1) = 0$$

که یک رابطه هم ارزی است. دراینصورت مجموعه همه کلاسهای هم ارزی $\sim$ را با $S^{-1}R$ نشان داده و اعمال زیر را روی آن تعریف می‌کنیم:

فرض کنید $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in S^{-1}R$. در اینصورت قرار می‌دهیم

$$\frac{a}{s} \oplus \frac{b}{t} = \frac{ta + sb}{st}$$

و

$$\frac{a}{s} \odot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}.$$

واضح است که $S^{-1}R$ با این دو عمل تشکیل یک حلقه می‌دهد که به حلقه کسرها موسوم بوده و حلقه‌ای یکدار و جابجایی است.

فرض کنید $P \in Spec(R)$. قرار می‌دهیم $S := R - P$. حلقه کسرهای $S^{-1}R$ را با R_P نشان می‌دهیم. این حلقه یک حلقه شبه موضعی با ایده‌آل ماکسیمال

$$\left\{x \in R_P : x = \tfrac{a}{s}; a \in P, s \in S\right\}$$

است. این حلقه را حلقه‌ی حاصل از موضعی‌سازی R در P گویند.

فرض کنید M یک R–مدول و S یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی R باشد. با فرض $R = M$، مجموعه‌ی