بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده فنی و مهندسی

گروه مهندسی عمران

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد رشته عمران گرایش
سازه های هیدرولیکی

بررسی روش اجزاءمحدود و تفاضل محدود در صفحات مسطح

استادان راهنما :

دکتر غلامعباس بارانی

دکتر جواد سلاجقه

استاد مشاور:

دکتر جواد سلاجقه

مؤلف :

محمد رضا برادران

خردادماه۸۹

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد به

گروه مهندسی عمران
دانشکده فنی مهندسی
دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو : محمدرضا برادران

اساتید راهنما : دکتر غلامعباس بارانی
دکتر جواد سلاجقه
استاد مشاور: دکتر جواد سلاجقه

داور ۱ : دکتر رضا رهگذر
داور۲ : دکتر محمد جواد خانجانی
نمایندهی تحصیلات تکمیلی در جلسه دفاع: دکتر سموات
معاونت پژوهشی و تحصیلات تکمیلی دانشکده : دکتر پور ابراهیم

تقدیم به :

پدر و مادر عزیزم

تشکر و قدردانی :

بی شک آنچه تحت عنوان پایان نامه کارشناسی ارشد اینجانب از نظر می گذرد حاصل رهنمودهای مربیانی است که در طول دوران تحصیل مرا یاری کرده اند ، بدینوسیله از تمامی آن بزرگان قدردانی می شود.

بخصوص از راهنمایی ها و توجهات بی دریغ دکتر غلامعباس بارانی و دکتر جواد سلاجقه در هدایت و سرپرستی این پایان نامه صمیمانه تشکر و سپاسگزاری می شود .

چکیده :

ورق ها از جمله اجزاء اصلی تشکیل دهنده سازه های جدار نازک محسوب می گردنـد کـه در شاخه های مختلف علوم مـورد اسـتفاده قـرار گرفتـه انـد. از جملـه کـارایی ورق هـا در مهندسی عمران می توان به کاربردآنها در مخازن ذخیره محتوی سیالات ، گنبدها ، سـد هـا و همچنین دال ها اشاره نمود. تحلیل ورق ها نیازمند حل دستگاه های معـادلات دیفرانسـیل مراتب بالا است که حل این معادلات با استفاده از فرمول های عمومی ارائه شده جهت حـل معادلات دیفرانسیل میسر نمی باشد. و در برخی موارد به دست آوردن فرمـول هـایی جهـت حل معادلات دیفرانسیل ورق امکان پذیر نیست. از این رو روش های عـددی، گـامی مـوثر در رسیدن به جواب هایی با دقت های مناسب می باشند، که قابلیت اطمینان خوبی را نسبت به حل های دقیق دارند. در این پایان نامه به بررسی مسئله خیز ورق ها تحت اثر بـار فشـاری گسترده در جهت عمود بر ورق و همچنین به مسئله کمانش ورق ها تحت بار فشاری جانبی با استفاده از روش اجزاء محدود بوسیله یک المان چهار گرهی با در نظـر گـرفتن اثـر تغییـر شکل برشی و بدون تاثیر آن و همچنین روش تفاضل محدود پرداخته شـده اسـت. در ایـن راستا مسـئله کمـانش و جابجـایی مـاکزیمم تحـت بـار گسـترده بـرای یـک ورق همگـن و همسانگرد مورد بررسی قرار گرفته و همچنین المانی بـا در نظـر گـرفتن تغییـر شـکل برشـی مراتب بالا با چهار گره و هفت درجه آزادی در هر گره جهت تحلیـل ورق ارائـه گردیـده است. در روش اجزاء محدود از نرم افزار انسیس جهت تحلیـل و نـرم افـزار مطلـب جهـت برنامه نویسی استفاده شده است. در پایان، دقت در همگرایـی رسـیدن بـه جـواب وهمچنـین درصد خطا با توجه به افزایش تعداد المان نسبت به روش تئـوری تیموشـینکو و همچنـین بـا المان های ارائه شده توسط سایر محققین مقایسه گردیده است.

کلمات کلیدی

ورق، روش اجزاء محدود، روش تفاضل محدود ، تغییر شکل برشی

فهرست مطالب

فصل اول: مقدمه

مقدمه..۱

سابقه تحقیق...۲

فصل دوم : نظریه خمش ورق ها

مقدمه..۴

روابط کرنش–انحناء..۶

روابط تنش کرنش..۸

قرارداد علامت...۹

معادله حاکم بر ورق ها..۱۳

روش های حل خیز ورق ها...۱۴

فصل سوم : مبانی روش اجزاء محدود (finite element)

مقدمه..۱۸

معادلات خمشی صفحات در روش اجزاء محدود..۱۹

فرمول بندی اجزاء محدود المان...۲۳

بررسی المان های مختلف...۲۷

مدل اجزاء محدود المان با در نظر گرفتن تغییر شکل برشی...............................۳۴

نظریه خمشی صفحات میندلین..۳۹

فرمول بندی المان میندلین.......................... ....۴۰

فرمول بندی هم پارامتر ۴۱

قفل شدگی برشی.. ....۴۲

فصل چهارم : مبانی روش تفاضل محدود (finite difference)

مقدمه..۴۴

معادلات تفاضل محدود...۴۵

فصل پنجم : نتایج حاصل از روش های عددی

مقدمه ۴۹

روش تفاضل محدود برای مسئله خیز ورق ها.. ۵۰

روش تفاضل محدود برای مسئله مسئله کمانش...۵۱

نتایج حاصل از روش های عددی...۵۳

کنترل کمانش دو محوری با دو آیین نامهGL وBV...۶۵

فصل ششم : تابع تغییر مکان برای المان مستطیلی با تغییر شکل برشی مراتب بالا

مقدمه..۶۷

روابط ارائه شده جهت محاسبه ماتریس سختی ۶۹

نتایج به دست آمده ۷۵

ورق مربعی همگن با تکیه گاه ساده در همه لبه ها.. ۷۶

نتیجه گیری... ۷۹

پیشنهادات ۸۰

منابع ۸۱

پیوست ها ۸۴

نماد های مورد استفاده در متن

$[B]$	ماتریس جابجایی کرنش
$[D]$	ماتریس صلبیت
$[D_b]$	ماتریس صلبیت خمشی
$[D_s]$	ماتریس صلبیت برشی
D	سختی خمشی
E	مدول الاستیسیته
G	مدول الاستیسیته در برش
g	شتاب ثقل($g \approx 9.81\ m/s^2$)
ν	ضریب پواسون
t	ضخامت
$m,\ n$	اعداد صحیح، ضریب های عددی
$[K]$	ماتریس سختی المان
$[N]$	ماتریس توابع شکل
$\{P\}$	بردار بارهای گرهی
V	انرژی پتانسیل
u, v	مولفه های جابجایی درون صفحه ای
w	مولفه جابجایی عرضی
$\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$	شیب صفحات در جهت x و y

$\{\alpha\}$	بردار ضرایب نامعلوم
$\{\delta\}$	بردار متناظر با جابجایی گره ها
$\{\varepsilon\}$	بردار کرنش
$\{\sigma\}$	بردار تنش
$\{\sigma_b\}$	بردار تنش های خمشی
$\{\sigma_s\}$	بردار تنش های برشی
κ_x	انحناء نسبت به محور x
κ_y	انحناء نسبت به محور y
r	شعاع
r_x, r_y	شعاع های انحنای صفحه میانی در صفحات yz,xz
$\{\chi\}$	بردار نرخ تغییرات انحناء
γ_x, γ_y	کرنش برشی عرضی
γ_x^a, γ_y^b	میانگین کرنش برشی عرضی در مقطع
θ_x, θ_y	دوران نرمال صفحات
x, y, z	مختصات دکارتی
ξ, η	مختصات نقاط در محور های محلی
M_x	ممان خمشی حول محور y
M_y	ممان خمشی حول محور x
M_{yx}	ممان پیچشی

Δy	تفاضل پیشرو
∇y	تفاضل پسرو
δy	تفاضل مرکزی

فصل اول

– مقدمه

سازه های جدار نازک یکی از زیر ساخت های حساس و حیاتی می باشند که در شاخه های مختلف علوم مورد استفاده قرار گرفته اند. از جمله کارایی این سازه ها در مهندسی عمران می توان به مخازن ذخیره محتوی سیالات ، گنبدها ، سد ها و همچنین دال ها اشاره کرد.ورق ها و پوسته ها نیز یکی از اجزاء اصلی تشکیل دهنده این سازه ها محسوب می گردند. در تحلیل این سازه ها نیازمند حل دستگاه های معادلات دیفرانسیلی مراتب بالا هستیم که حل این معادلات با روش های معمول و کلاسیک میسر نمی باشد. و در برخی موارد دستیابی به این حل ها امکان پذیر نیست. از این رو روش های عددی گامی موثر در رسیدن به جواب هایی با دقت های مناسب می باشند که قابلیت اطمینان خوبی را نسبت به حل های دقیق دارند. در فصل دوم به نظریه خمش ورق ها اشاره گردیده است. و روابط مورد نیاز جهت حل کلاسیک ورق ها ارائه شده است. همانگونه که بیان شد حل این معادلات با روش های معمول ارائه شده در حل معادلات دیفرانسیل جزیی، پیچیده و مشکل می باشند که روند حل آنها به روش اجزاء محدود و تفاضل محدود در فصل های سوم و چهارم ارائه شده است و مبانی اصولی روش های اجزاء محدود و تفاضل محدود ذکر گردیده است. در فصل پنجم حل عددی با استفاده از دو روش اجزاء محدود و تفاضل محدود بیان شده است. مسئله بار نهایی کمانشی دو محوری و همچنین خیز ماکزیمم با استفاده از هر دو روش برای شرایط مرزی متفاوت محاسبه و به بررسی میزان دقت با افزایش تعداد المان ها، و همچنین مسئله خیز پرداخته شده است. و نقاط قوت و ضعف دو روش در مقایسه با روش تئوری تیموشینکو بیان گردیده است. در فصل ششم نیز المانی با در نظر گرفتن تغییر شکل برشی مراتب بالا ارائه گردیده است، که از دقت قابل قبولی نسبت به المان های ارائه شده توسط سایر محققین برخوردار می باشد.

- سابقه تحقیق

اولین روش های ریاضی برای تحلیل ورقها توسط اویلر (Euler) در سال ۱۷۶۶ ارائه شد. او ورق های مستطیل و دایره شکل را توسط کابلهای عمود بر هم تحت تنشهای غشایی بررسی نمود. پس از آن شاگرد او برنولی (Bernoulli) روش اویلر را برای تحلیل ورق تحت خمش تعمیم داد. برای این منظور برنولی از شبکه اعضای خمشی عمود بر یکدیگر استفاده کرد. از آنجا که اثر پیچش در این اعضا در نظر گرفته نشده بود، نتایج حاصل از روش او با نتایج آزمایشگاهی تفاوت زیادی داشت.

در سال ۱۸۱۲ لاگرانژ (Lagrange) معادله دیفرانسیل حاکم بر ورق ها را ارائه نمود. این معادلات برای اولین بار تحت شرایط مرزی خاص توسط ناویه (Navier) در سال ۱۸۲۱، از طریق بسط آن به صورت سری مضاعف مثلثاتی فوریه (Fourier) که در همان دهه عرضه شده بود حل شد.

در سال ۱۸۶۶ کراشف (Grashof) معادله دیفرانسیل لاگرانژ را به صورت انتگرال بسته حل کرد و پس از او لوی (Levy)، استاناو (Estanove) و مناژه (Mesnager) آن را بصورت سری تابع هیپربولیک و بالاخره ریتر (Ritter) آنرا بصورت توانی بسط داده و حل نمودند.

شیوه های عددی را گالرکین ، وال و دیگران ارائه دادند. طی سالها ،ترکیبات متعددی از شرایط مختلف بارگذاری و تکیه گاهی با روش های مختلفی مورد بررسی و مطالعه قرار گرفت. که از جمله پیشگامان این مطالعات stowell [۱] و همکارانش بودند که به بررسی شرایط مختلف بارگذاری و تکیه گاهی پرداختند. در سال های اخیر نیز مطالعات گسترده ای برای حل دقیق ارائه شده است که از جمله آنها می توان به Lam [۲] و همکارانش اشاره کرد که استاندارد های حل دقیق را برای کمانش الاستیک و کمانش ارتعاش آزاد را بدست آوردند.Penga [۳]و همکارانش نیز آن را با تابع گرین حل کردند.Rao [۴] و همکارانش پایداری ورق های مستطیلی با ضخامت متعادل را بوسیله المان محدود مثلثی تحلیل کردند.

استفاده از راه حل های فوق برای ورق با شکلهای هندسی مختلف و شرایط مرزی متفاوت بسیار پیچیده و در اکثر موارد ناممکن است. به همین علت روش های مختلف عددی و تقریبی برای حل این مشکلات ارائه شده است. از جمله این روش ها می توان به روش

تفاضل های محدود اشاره نمود، که در آن معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله در نقاط مشخصی از مدل مسئله محاسبه می شود. از آنجا که فاصله این نقاط برای سهولت رابطه ساری ، معمولا یکسان انتخاب شده و اعمال شرایط مرزی مختلف در محاسبات بعضاً مشکل است، کاربرد این روش معمولا به حل مسائل ساده با شرایط مرزی خاص محدود می گردد.

روش دیگری که برای حل عددی ورق ها و پوسته ها به کار می رود روش اجزاء محدود است. در این روش بر خلاف روش تفاضل محدود ، جواب معادلات دیفرانسیل حاکم با استفاده از توابعی پیوسته، به روش های مختلف تقریب زده می شود. برای رفع مشکل تعیین چنین توابعی در حل مسائل مختلف با شرایط مرزی متنوع، محیط مسئله به اجزاء کوچکتری تقسیم می شود. به نحوی که برای هر یک از این اجزاء به سهولت بتوان تابع جواب تقریبی معادله دیفرانسیل حاکم را بدست آورد.

رفتار هر یک از این اجزاء و اندر کنش بین آنها رفتار کل مجموعه یا رفتار مدل فیزیکی مسئله را تعیین می کند. به این ترتیب در روش اجزاء محدود به جای بررسی رفتار سازه های مختلف توجه ما معطوف به رفتار اجزاء مختلف می باشد.

این اجزاء توسط مرز مستقیم الخط و یا منحنی از یکدیگر جدا شده و تنها در نقاط گرهی با یکدیگر اشتراک دارند که به آنها اجزاء محدود می گویند.که برای محدود کردن تعداد مجهولات مسئله ، این اجزاء را در نقاط گرهی به هم متصل نموده ایم و برای تعیین وضعیت تغییر مکان ها ، کرنش ها و تنش ها در هر نقطه از جزء محدود از توابع درون یابی که تغییر مکان گره ها را به نقاط داخلی مرتبط می سازند استفاده می شود. به این ترتیب می توان انواع مختلف اجزاء محدود را که دارای شکل هندسی و یا تابع درون یابی خاص خود باشند تعریف نمود و مورد استفاده قرار داد. اما تجربه نشان داده است که برای هر مسئله خاص برای رسیدن به جواب مطلوب باید از جزء محدود مناسب که رفتار آن تا حد امکان مشابه رفتار مدل مسئله است استفاده نمود.

فصل دوم
نظریه خمش ورق ها

مقدمه

ورق ها و پوسته ها سازه هایی هستند که با توجه به شکل ظاهری وضخامت کم توانایی تحمل بار های درون صفحه ای بسیار بالایی را دارند. شکل اولیه اینگونه سازه ها به صورت تخت بوده که قابلیت انعطاف پذیری خوبی دارند و ضخامت آنها در مقایسه با دو بعد دیگر بسیار ناچیز می باشد که همین مسئله وجه تمایزشان را با سایر سازه ها نمایان می سازد.. از جمله کاربرد ورق ها می توان به دال ها، پانلهای جانبی و سقف ساختمان ها، دیسک های توربین ها، ذیواره ها و کف مخازن ذخیره، پوشش ، دریچه سوراخ های آدم رو ، دریچه سد ها و ... اشاره نمود.

مهمترین کاربرد ورق ها، مسئله تحمل خمشی آنها در برابر بار های وارده می باشد که نقش سازه ای آنها را نشان می دهد.در حالت کلی ورق ها را به سه دسته زیر تقسیم بندی می کنند:

- ورق های نازک با خیز کوچک
- ورق های نلزک با خیز بزرگ
- ورق های ضخیم

ضخامت ورق در امتداد عمود بر صفحه میانی اندازه گیری می شود.. صفحه میانی به موازات وجه بالایی و پایینی ورق ترسیم شده و ضخامت ورق را به دو نیمه مساوی تقسیم می کند.خواص خمشی ورق عمدتا به ضخامت آن نسبت به دو بعد دیگر وابسته است.

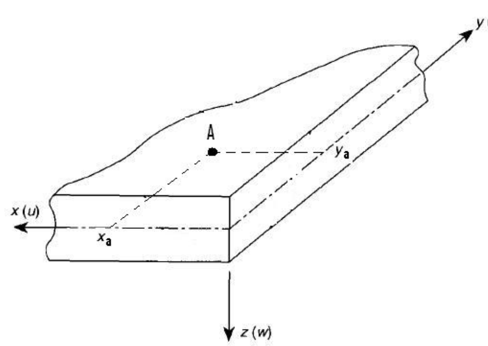
بر طبق تعاریف صورت گرفته و به منظور محاسبات فنی زمانی که نسبت ضخامت به طول دهانه کوچکتر کمتر از $\frac{1}{20}$ باشد ورق نازک در نظر گرفته می شود.

در این پایان نامه مواد تشکیل دهنده ورق همگن و همسانگرد فرض گردیده است. یک ماده همگن در کل سازه خواص یکسانی را از خود نشان می دهد. هنگامی که خواص در همه جهات یکسان باشد، ماده همسانگرد نامیده می شود. در این فصل به

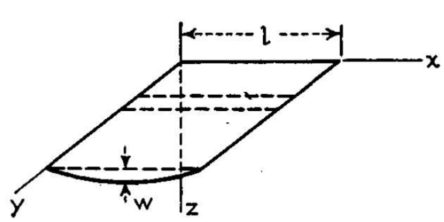
بیان روابط میان نیرو یا ممان خارجی بـا کـرنش، تـنش و تغییـر مکـان پرداختـه شـده است.

فرضیات در نظر گرفته شده :

همانگونه که در شکل (۲-۱) نشان داده شده اسـت صـفحه xy را منطبـق بـر صـفحه میانی ورق در نظر می گیریم در نتیجه در این حالت خیز هر نقطه روی صفحه میـانی به مختصات (x,y) صفر می باشد. مولفه های تغییر مکان در هر نقطه در جهـات x و y و z را به ترتیب با u و v و w نشان می دهـیم. هنگـامی کـه در اثـر بارگـذاری در ورق تغییر شکلی رخ دهد سطح میانی در هر نقطه بـه مختصـات (x_a ,y_a) همانگونـه که در شکل (۲-۲) نشان داده شده است دارای خیز w می گردد.



شکل (۲-۱) : مختصات هر نقطه بر روی ورق



شکل (۲-۲) : پارامتر های بوجود آمده ناشی از تغییر شکل ورق

فرضیات اصلی نظریه خیز کوچک خمش یا همان نظریه کلاسـیک ورق هـا ، بـرای یک ورق نازک ، الاستیک، همگن و همسانگرد بر اساس هندسه تغییر شکل آن مـی باشد که در زیر این فرضیات بیان شده است.

۱. خیز سطح میانی در مقایسه با ضخامت ورق کوچک است و شیب سطح خیزدار بسیار کوچک و مقدار مجذور شیب در مقایسه با واحد قابل صرف نظر کردن است.
۲. صفحه میانی بعد از خمش بدون کرنش باقی می ماند.
۳. مقاطع عمود بر سطح میانی بعد از خمش نیز عمود بر سطح باقی می مانند. که درنتیجه از اثر کرنش های برشی عمودی γ_{xz} و γ_{yz} می توان صرف نظر نمود. البته در بررسی تئوری میندلین این ساده سازی در نظر گرفته نمی شود..
۴. تنش عمود بر صفحه میانی ، σ_z در مقایسه با مولفه های دیگر تنش کوچک است و می توان از آن صرف نظر کرد.

فرضیات ارائه شده به فرضیات کیرشهف معروف بوده و مشابه فرضیات نظریه خمش ساده تیر ها می باشد.

روابط کرنش – انحناء

با توجه به فرض سوم و صفر شدن کرنش های برشی γ_{xz} و γ_{yz} و همچنین برابر صفر قرار دادن کرنش در جهت محور z ها روابط کرنش ها به صورت معادلات(۲-۱) ساده می گردند.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial X} \quad \text{(الف)} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad \text{(ب)}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{(پ)} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{(ت)} \quad \text{معادلات (۲-۱)}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{(ث)} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{(ج)}$$

با توجه به معادله ۲-۱ (ب) نتیجه گرفته می شود که جابجایی ورق تنها به x,y وابسته می باشد و به مختصات z وابسته نیست که رابطه زیر بیان کننده این واقعیت می باشد.

$$w = w(x, y)$$

به همین ترتیب با انتگـرال گیـری از روابـط (۲-۱) (ت) و(ج) جابجـایی ورق را در دو راستای x و y نیز به صورت زیر محاسبه می گردد.

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x} + u.(x, y)$$

$$v = -z\frac{\partial w}{\partial y} + v.(x, y) \qquad (۲-۲)$$

با در نظر گرفتن فرض دوم جابجایی های اولیه .u و .v برابر صفر مـی باشـند کـه در نتیجه:

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$v = -z\frac{\partial w}{\partial y} \qquad (۳-۲)$$

با جایگذاری معادلات اخیر در معادلات (۲-۱) (الف) و (پ) و (ث) کـرنش هـا بـر اساس جابجایی ها بدست می آید، که به صورت زیر نشان داده شده است.

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad (۴-۲)$$

$$\gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

همچنین انحنای ورق نیز با معادلات(۲-۵) نشان داده می شود.

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \qquad (۲-۵)$$
$$\kappa_y = \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y}$$
$$\kappa_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

با جایگزینی معادلات (۲-۵) در معادلات (۲-۴) روابط کرنش انحنا به صورت زیر بیان می گردند.

$$\varepsilon_x = -z\kappa_x \qquad (۲-۶)$$
$$\varepsilon_y = -z\kappa_y$$
$$\gamma_{xy} = -2z\kappa_{xy}$$

با توجه به روابط بالا کرنش ها به خیز ورق وابسته گردید.در بخش بعدی روابط بین تنش ها و کرنش ها بیان می گردد تا رابطه خیز با تنش بدست آید و نهایتا معادله حاکم بر ورق ها حاصل گردد.

روابط تنش و کرنش

روابط تنش و کرنش در حالت سه بعدی برای یک ماده همگن به صورت معادلات (۲-۷) بیان شده است.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \qquad (۲-۷)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

ثابت های G, ν, E به ترتیب مدول الاستیسیته، ضریب پواسن و مدول برشی را نشان می دهند. رابطه بین مدول برشی و الاستیسیته بصورت زیر بیان می شود.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$