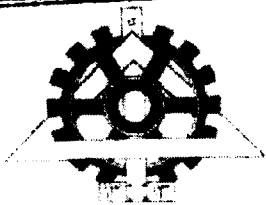


٤٧٥٩٨



دانشگاه تهران

تحلیل محیط نیمه بی‌نهایت ایزوتروپ جانبی تحت اثر

نیروی متحرک کسینوسی

۵۱۳۹

توسط: حسن بهار

استاد راهنما: دکتر محمد رحیمیان

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

در

رشته مهندسی عمران گرایش سازه

دانشکده فنی

۲۷۵۹۸

تحليل محیط نیمه بی نهایت ایزوتروپ جانبی تحت

اثر نیروی متحرک کسینوسی

توسط: حسن بهار
استاد راهنما: دکتر محمد رحیمیان

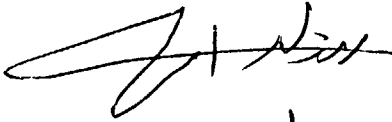
پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد مهندسی عمران گرایش سازه

از این پایان نامه در تاریخ چهارشنبه ۲۷ بهمن ماه ۱۳۷۸ در مقابل هیأت داوران
دفاع به عمل آمد و مورد تصویب قرار گرفت.

اعضای هیأت داوران:



۱- دکتر محمد رحیمیان (استاد راهنما)



۲- دکتر اسد... نورزاد



۳- دکتر ایرج محمود زاده کنی

تحلیل محیط نیمه بی‌نهایت ایزوتروپ جانبی تحت اثر نیروی متحرک کسینوسی

نام و نام خانوادگی: حسن بهار

رشته تحصیلی و گرایش: مهندسی عمران - سازه

گروه: عمران

تاریخ دفاع: ۱۳۷۸/۱۱/۲۷

استاد راهنما: دکتر محمد رحیمیان

چکیده:

در این پایان نامه، تحلیل محیط نیمه بی‌نهایت ایزوتروپ جانبی تحت اثر بار متحرک که به صورت قائم بر سطح محیط وارد می‌شود مورد نظر است. نیروی سطحی هارمونیک در دستگاه مختصات XYZ به صورت رابطه زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$P(x, y, t) = P_0 \delta(y) e^{i \frac{n\pi}{L}(x - Ct)}$$

برای حل این مسأله، از توابع پتانسیل لخنیتسکی استفاده می‌شود. در این روش، دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای به صورت مجزا تبدیل شده و این معادلات مجزا به کمک تبدیل انتگرالی فوریه حل می‌شوند. بنابراین، تغییر مکانها و تنشها در فضای فوریه به دست می‌آیند. سپس با اعمال تبدیل وارون

فوریه و انتگرال‌گیری عددی تغییر مکانها و تنشهای ناشی از بار در فضای حقیقی به دست می‌آیند. در انتها به کمک سری فوریه تغییر مکانها و تنشهای ناشی از بارهای هارمونیک با هم جمع بسته می‌شوند و تغییر مکانها و تنشهای ناشی از بار متمرکز متحرک به دست می‌آیند.

کلیه نتایج فوق هم برای محیطهای ایزوتروپ جانبی و هم برای محیطهای ایزوتروپ به دست آمده‌اند. همچنین نمودارهایی که

نتایج عددی را در انتهای پایان نامه بیان می کنند، انطباق بسیار خوب نتایج این تحقیق و نتایج موجود در محیطهای ایزوتروپ و ایزوتروپ جانبی در حالت استاتیکی را نمایش می دهد که نشان دهنده صحت جوابهای به دست آمده از این پایان نامه هستند. نتایج این پایان نامه می توانند در تحقیقات بعدی و نیز برای مقاصد طراحی استفاده گردد.

فهرست مطالب:

۷-۱	مقدمه: تاریخچه و معرفی مسأله
۲	۱-۰-۱- تاریخچه
۵	۲-۰-۲- معرفی این پایان نامه
۱۶-۸	فصل اول: معادلات حرکت در محیط ایزوتروپ جانبی
۹	۱-۱- معادله دیفرانسیل حاکم
۱۱	۲-۱- به دست آوردن معادله حرکت بر حسب تغییر مکانها
۱۲	۳-۱- معادله حرکت در محیط ایزوتروپ جانبی
۱۴	۴-۱- شرایط مرزی مسأله
۱۴	۵-۱- نتیجه گیری
	فصل دوم: توابع پتانسیل مورد نیاز برای حل معادله حرکت حاکم بر محیط ایزوتروپ
۲۳-۱۷	جانبی و معادلات دیفرانسیل حاکم بر توابع پتانسیل
۱۸	۰-۲- مقدمه
۱۸	۱-۲- به دست آوردن معادلات دیفرانسیل حاکم بر توابع پتانسیل
۵۰-۲۴	فصل سوم: حل معادلات حاکم بر توابع پتانسیل و محاسبه تغییر مکانها و تنشها
۲۵	۰-۳- مقدمه
۲۵	۱-۳- تبدیل فوریه
۲۵	۲-۳- خواص تبدیل فوریه
۲۶	۱-۲-۳- خطی بودن
۲۶	۲-۲-۳- تبدیل مشتق

- ۳-۳-حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل حاکم بر توابع پتانسیل در فضای تبدیل یافته ۲۶
- ۳-۳-۱-حل معادله $\nabla_1^2 \nabla_2^2 F = 0$ ۲۶
- ۳-۳-۲-حل معادله $\nabla_0^2 \chi = 0$ ۳۱
- ۳-۴-ارضاء شرایط مرزی و به دست آوردن تغییرمکانها و تنشها در فضای حقیقی ۳۳
- ۳-۴-۱-ارضاء اصل تشعشع ۳۴
- ۳-۴-۲-به دست آوردن کرنشها بر حسب تغییرمکانها ۳۵
- ۳-۴-۳-به دست آوردن تنشها ۳۷
- ۳-۴-۴-ارضاء شرایط مرزی برای به دست آوردن ضرایب مجهول B_1 ، B_2 و B_3 ۴۰
- ۳-۴-۵-به دست آوردن تنشها و تغییرمکانها در فضای حقیقی ۴۳
- ۳-۵-به دست آوردن تغییرمکانها و تنشهای ناشی از بار متمرکز متحرک ۴۶
- ۳-۵-۱-سری فوریه ۴۷
- ۳-۵-۲-بسط به سری فوریه نیروی متمرکز متحرک ۴۷
- فصل چهارم: روشهای عددی اعمال تبدیل وارون فوریه و محاسبه سری فوریه ۵۱-۱۱۶
- ۴-۰-مقدمه ۵۲
- ۴-۱-روشهای انتگرال گیری عددی ۵۲
- ۴-۱-۱-قاعده دوزنقه ۵۳
- ۴-۱-۲-قاعده سیمپسون ساده ۵۴
- ۴-۲-مسائل و مشکلات مربوط به برآورد عددی جوابها ۵۵
- ۴-۲-۱-انتگرال گیری از توابع مختلط ۵۵
- ۴-۲-۲-نقاط تکین و روشهای مقابله با آنها ۵۶
- ۴-۲-۳-تعیین حد بالا و پایین انتگرال گیری ۵۷

۵۷	۴-۲-۴- تعیین گامهای انتگرال گیری
۵۹	۴-۲-۵- اصلاح آرگومانهای توابع به صورت $e^{i\theta}$
۵۹	۴-۳- تأخیر فاز در جوابها
۶۱	۴-۴- حل مسأله در حالت استاتیکی
۶۱	۴-۵- بسط به سری فوریه بارگذاریهایی به صورت $e^{i\omega_n(x-Ct)}$
۶۲	۴-۵-۱- محاسبه ضریب جمله عمومی بسط به سری فوریه در حالت خاص $n=0$
۶۲	۴-۶- مشخصات ورودیهای برنامه کامپیوتری
۶۴	۴-۷- بررسی صحت جوابهای به دست آمده از این پایان نامه
۶۴	۴-۷-۱- روابط تغییر مکان و تنش مربوط به مسأله بوسینسک
۶۷	۴-۷-۲- روابط تغییر مکان و تنش مربوط به مقاله پن و چو
۶۹	۴-۸- نتایج عددی و نمودارها
۱۲۰-۱۱۷	فصل پنجم: نتیجه گیری
۱۲۲-۱۲۱	فهرست مراجع:

فهرست نمودارها:

- نمودار ۱-۴-مقایسه تغییرات U_z بر حسب y بین نتایج پایان نامه و مسأله بوسینسک در $z=2\text{mm}$
- نمودار ۲-۴-مقایسه تغییرات U_y بر حسب x بین نتایج پایان نامه و مسأله بوسینسک در $z=2\text{mm}$
- نمودار ۳-۴-مقایسه تغییرات S_{xx} بر حسب y بین نتایج پایان نامه و مسأله بوسینسک در $z=2\text{mm}$
- نمودار ۴-۴-مقایسه تغییرات S_{yy} بر حسب x بین نتایج پایان نامه و مسأله بوسینسک در $z=2\text{mm}$
- نمودار ۵-۴-مقایسه تغییرات S_{zz} بر حسب x بین نتایج پایان نامه و مسأله بوسینسک در $z=2\text{mm}$
- نمودار ۶-۴-مقایسه تغییرات S_{yz} بر حسب x بین نتایج پایان نامه و مسأله بوسینسک در $z=2\text{mm}$
- نمودار ۷-۴-مقایسه تغییرات U_z بر حسب z بین نتایج پایان نامه و مقاله پن و چو برای Layered Soil $y=0\text{mm}$
- نمودار ۸-۴-مقایسه تغییرات S_{zz} بر حسب z بین نتایج پایان نامه و مقاله پن و چو برای Layered Soil $y=0\text{mm}$
- نمودار ۹-۴-مقایسه تغییرات U_z بر حسب z بین نتایج پایان نامه و مقاله پن و چو برای Beryl Rock $y=2\text{mm}$
- نمودار ۱۰-۴-مقایسه تغییرات S_{zz} بر حسب z بین نتایج پایان نامه و مقاله پن و چو برای Beryl Rock $y=2\text{mm}$
- نمودار ۱۱-۴-مقایسه تغییرات U_z بر حسب z بین نتایج پایان نامه و مقاله پن و چو برای G-Composite $z=5\text{mm}$
- نمودار ۱۲-۴-مقایسه تغییرات S_{zz} بر حسب z بین نتایج پایان نامه و مقاله پن و چو برای G-Composite $z=5\text{mm}$
- نمودار ۱۳-۴-مقایسه تغییرات S_{yz} بر حسب z بین نتایج پایان نامه و مقاله پن و چو برای Beryl Rock $y=2\text{mm}$
- نمودار ۱۴-۴-مقایسه تغییرات S_{yz} بر حسب z بین نتایج پایان نامه و مقاله پن و چو برای G-Composite $z=5\text{mm}$
- نمودار ۱۵-۴-تغییرات U_z بر حسب z در حالت استاتیکی برای مواد مختلف در $y=0$
- نمودار ۱۶-۴-تغییرات U_z بر حسب z در سرعت ۶۰ متر بر ثانیه برای مواد مختلف در $y=0$
- نمودار ۱۷-۴-تغییرات S_{zz} بر حسب z در حالت استاتیکی برای مواد مختلف در $y=0$
- نمودار ۱۸-۴-تغییرات S_{zz} بر حسب z در سرعت ۶۰ متر بر ثانیه برای مواد مختلف در $y=0$
- نمودار ۱۹-۴-تغییرات U_z بر حسب z در سرعتهای مختلف برای Beryl Rock در $y=0$
- نمودار ۲۰-۴-تغییرات U_z بر حسب z در سرعتهای مختلف برای Layered Soil در $y=0$
- نمودار ۲۱-۴-تغییرات S_{xx} بر حسب z در سرعتهای مختلف برای Beryl Rock در $y=0$
- نمودار ۲۲-۴-تغییرات S_{xx} بر حسب z در سرعتهای مختلف برای Layered Soil در $y=0$
- نمودار ۲۳-۴-تغییرات U_z بر حسب z در سرعتهای مختلف برای Beryl Rock در $y=0$
- نمودار ۲۴-۴-تغییرات S_{zz} بر حسب z در سرعتهای مختلف برای Beryl Rock در $y=0$
- نمودار ۲۵-۴-تغییرات حداکثر مقدار U_z بر حسب z در سرعتهای مختلف برای Beryl Rock در $y=0$

ادامه فهرست نمودارها:

- نمودار ۲۶-۴- تغییرات حداکثر مقدار Szz بر حسب z در سرعت‌های مختلف برای Beryl Rock در $y=0$
- نمودار ۲۷-۴- تغییرات Uz بر حسب z در سرعت ۴۰ متر بر ثانیه برای y برابر ۰ و ۲ میلی‌متر
- نمودار ۲۸-۴- تغییرات Szz بر حسب z در سرعت ۴۰ متر بر ثانیه برای y برابر ۰ و ۲ میلی‌متر
- نمودار ۲۹-۴- تغییرات Uy بر حسب z در سرعت‌های مختلف برای Beryl Rock در $y=2\text{.mm}$
- نمودار ۳۰-۴- تغییرات Uy بر حسب z در سرعت‌های مختلف برای Layered Soil در $y=2\text{.mm}$
- نمودار ۳۱-۴- تغییرات Uy بر حسب z در حالت استاتیکی برای مواد مختلف در $y=2\text{.mm}$
- نمودار ۳۲-۴- تغییرات Uy بر حسب z در سرعت ۶۰ متر بر ثانیه برای مواد مختلف در $y=2\text{.mm}$
- نمودار ۳۳-۴- تغییرات Syz بر حسب z در حالت استاتیکی برای مواد مختلف در $y=2\text{.mm}$
- نمودار ۳۴-۴- تغییرات Syz بر حسب z در سرعت ۶۰ متر بر ثانیه برای مواد مختلف در $y=2\text{.mm}$
- نمودار ۳۵-۴- تغییرات Syy بر حسب z در حالت استاتیکی برای مواد مختلف در $y=2\text{.mm}$
- نمودار ۳۶-۴- تغییرات Syy بر حسب z در سرعت ۶۰ متر بر ثانیه برای مواد مختلف در $y=2\text{.mm}$
- نمودار ۳۷-۴- تغییرات Szz بر حسب z در حالت استاتیکی برای مواد مختلف در $y=2\text{.mm}$
- نمودار ۳۸-۴- تغییرات Szz بر حسب z در سرعت ۶۰ متر بر ثانیه برای مواد مختلف در $y=2\text{.mm}$
- نمودار ۳۹-۴- تغییرات Uz بر حسب z برای مواد مختلف در حالت استاتیکی در $z=10\text{.mm}$
- نمودار ۴۰-۴- تغییرات Uz بر حسب z برای مواد مختلف در سرعت ۶۰ متر بر ثانیه در $z=10\text{.mm}$
- نمودار ۴۱-۴- تغییرات Uy بر حسب z برای مواد مختلف در حالت استاتیکی در $z=10\text{.mm}$
- نمودار ۴۲-۴- تغییرات Uy بر حسب z برای مواد مختلف در سرعت ۶۰ متر بر ثانیه در $z=10\text{.mm}$
- نمودار ۴۳-۴- تغییرات Sxx بر حسب z برای مواد مختلف در حالت استاتیکی در $z=10\text{.mm}$
- نمودار ۴۴-۴- تغییرات Sxx بر حسب z برای مواد مختلف در سرعت ۶۰ متر بر ثانیه در $z=10\text{.mm}$
- نمودار ۴۵-۴- تغییرات Syy بر حسب z برای مواد مختلف در حالت استاتیکی در $z=10\text{.mm}$
- نمودار ۴۶-۴- تغییرات Syy بر حسب z برای مواد مختلف در سرعت ۶۰ متر بر ثانیه در $z=10\text{.mm}$
- نمودار ۴۷-۴- تغییرات Szz بر حسب z برای مواد مختلف در حالت استاتیکی در $z=10\text{.mm}$
- نمودار ۴۸-۴- تغییرات Szz بر حسب z برای مواد مختلف در سرعت ۶۰ متر بر ثانیه در $z=10\text{.mm}$
- نمودار ۴۹-۴- تغییرات Syz بر حسب z برای مواد مختلف در حالت استاتیکی در $z=10\text{.mm}$
- نمودار ۵۰-۴- تغییرات Syz بر حسب z برای مواد مختلف در سرعت ۶۰ متر بر ثانیه در $z=10\text{.mm}$
- نمودار ۵۱-۴- تغییرات Syy بر حسب z در سرعت‌های مختلف برای Beryl Rock در $z=10\text{.mm}$
- نمودار ۵۲-۴- تغییرات Syy بر حسب z در سرعت‌های مختلف برای Layered Soil در $z=10\text{.mm}$
- نمودار ۵۳-۴- تغییرات Uz بر حسب z در سرعت‌های مختلف برای Beryl Rock در $z=10\text{.mm}$
- نمودار ۵۴-۴- تغییرات Uy بر حسب z در سرعت‌های مختلف برای Beryl Rock در $z=10\text{.mm}$
- نمودار ۵۵-۴- تغییرات Sxx بر حسب z در سرعت‌های مختلف برای Beryl Rock در $z=10\text{.mm}$
- نمودار ۵۶-۴- تغییرات Syy بر حسب z در سرعت‌های مختلف برای Beryl Rock در $z=10\text{.mm}$

ادامه فهرست نمودارها:

- نمودار ۴-۵۷- تغییرات S_{zz} بر حسب y در سرعت‌های مختلف برای Beryl Rock در $z=10\text{mm}$
- نمودار ۴-۵۸- تغییرات S_{yz} بر حسب y در سرعت‌های مختلف برای Beryl Rock در $z=10\text{mm}$
- نمودار ۴-۵۹- تغییرات U_z بر حسب x برای محیط Isotrop در $z=10\text{mm}$
- نمودار ۴-۶۰- تغییرات U_z بر حسب z برای محیط Isotrop و سرعت ۱۰ میلی‌متر بر ثانیه در $z=10\text{mm}$
- نمودار ۴-۶۱- تغییرات S_{zz} بر حسب z برای G-Composite در $z = .01\text{mm}$
- نمودار ۴-۶۲- شرایط مرزی برای Beryl Rock در $x = 20\text{mm}, y = 1\text{mm}, z = 0\text{mm}, t = 0\text{s}$
- نمودار ۴-۶۳- تغییرات U_z بر حسب z در حالت استاتیکی برای مواد مختلف در $y=0\text{mm}$
- نمودار ۴-۶۴- تغییرات U_z بر حسب z در سرعت ۶۰ متر بر ثانیه برای مواد مختلف در $y=0\text{mm}$
- نمودار ۴-۶۵- تغییرات S_{zz} بر حسب z در حالت استاتیکی برای مواد مختلف در $y=0\text{mm}$
- نمودار ۴-۶۶- تغییرات S_{zz} بر حسب z در سرعت ۶۰ متر بر ثانیه برای مواد مختلف در $y=0\text{mm}$
- نمودار ۴-۶۷- تغییرات U_z بر حسب z در سرعت‌های مختلف برای Isotrop در $y=0\text{mm}$
- نمودار ۴-۶۸- تغییرات U_z بر حسب z در سرعت‌های مختلف برای Beryl Rock در $y=0\text{mm}$
- نمودار ۴-۶۹- تغییرات S_{zz} بر حسب z در سرعت‌های مختلف برای Isotrop در $y=0\text{mm}$
- نمودار ۴-۷۰- تغییرات S_{zz} بر حسب z در سرعت‌های مختلف برای Beryl Rock در $y=0\text{mm}$
- نمودار ۴-۷۱- تغییرات U_z بر حسب y در حالت استاتیکی برای محیط‌های مختلف در $z=5\text{mm}$
- نمودار ۴-۷۲- تغییرات S_{zz} بر حسب y در حالت استاتیکی برای محیط‌های مختلف در $z=5\text{mm}$
- نمودار ۴-۷۳- تغییرات S_{yy} بر حسب y در حالت استاتیکی برای محیط‌های مختلف در $z=5\text{mm}$
- نمودار ۴-۷۴- تغییرات S_{yz} بر حسب y در حالت استاتیکی برای محیط‌های مختلف در $z=5\text{mm}$
- نمودار ۴-۷۵- تغییرات U_z بر حسب y در سرعت‌های مختلف برای Beryl Rock در $z=5\text{mm}$
- نمودار ۴-۷۶- تغییرات U_z بر حسب y در سرعت‌های مختلف برای Layered Soil در $z=5\text{mm}$
- نمودار ۴-۷۷- تغییرات S_{zz} بر حسب y در سرعت‌های مختلف برای Beryl Rock در $z=5\text{mm}$
- نمودار ۴-۷۸- تغییرات S_{zz} بر حسب y در سرعت‌های مختلف برای Layered Soil در $z=5\text{mm}$
- نمودار ۴-۷۹- تغییرات S_{xx} بر حسب y در سرعت‌های مختلف برای Beryl Rock در $z=5\text{mm}$
- نمودار ۴-۸۰- تغییرات S_{xx} بر حسب y در سرعت‌های مختلف برای Layered Soil در $z=5\text{mm}$
- نمودار ۴-۸۱- تغییرات S_{yy} بر حسب y در سرعت‌های مختلف برای Beryl Rock در $z=5\text{mm}$
- نمودار ۴-۸۲- تغییرات S_{yy} بر حسب y در سرعت‌های مختلف برای Layered Soil در $z=5\text{mm}$
- نمودار ۴-۸۳- تغییرات S_{yz} بر حسب y در سرعت‌های مختلف برای Beryl Rock در $z=5\text{mm}$
- نمودار ۴-۸۴- تغییرات S_{yz} بر حسب y در سرعت‌های مختلف برای Layered Soil در $z=5\text{mm}$

مقدمه:

تاریخچه و معرفی مسأله

۱-۰- تاریخچه:

تحلیل محیطهای نیمه بینهایت تحت اثر نیروهای وارده اولین بار در سال ۱۸۲۸ توسط لامه (Lame) و کلاپیرون (Clapeyron) با طرح مسأله بار نقطه‌ای عمود بر سطح محیط نیمه بینهایت مطرح شد. این مسأله در سال ۱۸۷۸ توسط بوسینسک (J.V. Bossinesq) حل شد [۹]. در سال ۱۹۶۳، باردن (Barden) تابع گرین محیط ایزوتروپ جانبی نیمه بینهایت را در حالت نیروی عمودی به دست آورد. در سال ۱۹۷۶ پن (Y.C. Pan) و چو (T.W. Chou) تابع گرین محیط بی‌نهایت ایزوتروپ جانبی را در حالت‌های نیروی عمود بر صفحه ایزوتروپی و نیروی موازی با صفحه ایزوتروپی به دست آوردند [۸]. همین دو مولف در سال ۱۹۷۹ مسأله (Mindlin) را برای محیط ایزوتروپ جانبی حل کردند. (مسأله Mindlin) تحلیل محیط نیمه بینهایت ایزوتروپی است که بار متمرکزی در داخل آن اعمال شده و در سال ۱۹۳۶ حل شده بود. مسأله اخیر پن و چو را می‌توان با صفر در نظر گرفتن عمق بار متمرکز مدفون در محیط به مسأله محیط نیمه بینهایت ایزوتروپ جانبی که بار متمرکزی روی سطح آن وجود دارد تبدیل کرد [۵].

در زمینه محیطهای ایزوتروپ جانبی، لخنیتسکی (S.G. Lekhnitskii) حل کلی مسائل متقارن محوری ایزوتروپ جانبی را ارائه داده است. وی برای حل این مسائل توابع پتانسیل خاصی را پیشنهاد کرده است. در سال ۱۹۵۴، (Eubank) و (Sternberg) ثابت کردند اگر نیم حجم پایینی (meridional) محیط، نسبت به محور Z محدب (z -convex) باشد، حل لخنیتسکی کامل است. در سال ۱۹۹۴ (Wang) ثابت کرد که ارضاء شرط محدب بودن نسبت به محور Z ضروری نیست.

در سال ۱۹۵۳، هو (Hu) و در سال ۱۹۵۴ نوواکی (Nowacki) حل لخنیتسکی را برای حل مسائل عمومی سه بعدی محیط ایزوتروپ جانبی گسترش دادند. علاوه بر لخنیتسکی، (Elliot)

در سال ۱۹۴۸ و (Lodge) در سال ۱۹۵۵ توابع پتانسیل دیگری ارائه داده‌اند. البته این توابع را می‌توان از توابع پتانسیل لخنیتسکی، هو و نوواکی نتیجه گرفت [۳].

در سال ۱۹۹۵ (M.Z.Wang) و (W.Wang) ثابت کردند مجموعه توابع پتانسیل لخنیتسکی، هو و نوواکی یک مجموعه کامل جهت حل مسائل الاستواستاتیک محیطهای ایزوتروپ جانبی هستند [۳]. حل مسائل انتشار امواج تنشی در سال ۱۹۰۴ با مقاله لمب (Lamb) آغاز شد. او در این مقاله، انتشار امواج ناشی از یک بار هارمونیک وارد به یک محیط ایزوتروپ ارتجاعی نیمه بی‌نهایت را در حالت‌های دو و سه بعدی حل کرده است. معادلات موج در محیطهای ایزوتروپ به کمک توابع پتانسیل هلمهولتز به صورت مستقل در می‌آیند. لمب برای حل مسأله از همین توابع برای مستقل کردن معادلات موج استفاده کرد. در محیطهای غیر ایزوتروپ مسأله پیچیده تر است و این در حالیست که بسیاری از محیطها و مخصوصاً خاکها رفتارهای غیر ایزوتروپ دارند [۴].

حلهایی نیز برای سطح نیم فضاها در مسائل انتشار امواج ارائه شده است. در سال ۱۹۶۰ (C.C.Chao) تغییر مکانهای قائم و افقی مرز محیط نیمه بینهایت همگن و ایزوتروپی که تحت اثر نیروی متمرکز مماسی وارد بر سطح محیط است را به دست آورد. در این مسأله Chao فرض کرد که این نیروی متمرکز بر حسب زمان به صورت پله‌ای (Heaviside) تغییر می‌کند. همچنین در سال ۱۹۶۳ (Papadopolus) روی مسائل غیر متقارن محوری مانند بار مماسی مدفون و نیز کوپل نیرو مطالعاتی انجام داد ولی جزئیات نتایج گذرا را فقط برای سطح محیط نیمه بی‌نهایت ارائه داد [۶].

در سال ۱۹۶۹ گاکن هایمر (D.C.Gakenheimer) و میکلوویچ (J.Miklowitz) حل گذرای تحریک ناشی از بار متمرکز قائمی که با سرعت ثابت روی سطح محیط نیمه بی‌نهایت ایزوتروپ حرکت می‌کند را ارائه دادند. این حل در نهایت به صورت انتگرالهای مقدار اصلی کوشی (Cauchy Principal Value) ارائه شده‌است. با اینحال روش حل آنها آنقدر عمومیست دارد که برای

تحلیل سایر مسائل غیر متقارن محوری محیطهای نیمه بینهایت راهگشا باشد.

این دو مولف برای حل مسأله نسبت به زمان تبدیل فوریه و نسبت به متغیرهای x و y تبدیل فوریه گرفتند. سپس با استفاده از روش (Cagniard – deHoop) و استفاده از قضیه مانده‌ها تبدیل معکوس دوگانه فوریه و تبدیل معکوس لاپلاس را انجام دادند. این دو مولف تغییرمکانهای ناشی از موجهای برشی و طولی را جداگانه محاسبه کرده و در انتها حاصل این دو نوع تغییرمکان را باهم جمع بسته‌اند و روابط تغییرمکان را به صورت جبهه موج ارائه کردند. هرچند که انتگرالهای جواب محاسبه عددی نشده‌اند و همچنین بعضی از انتگرالها به صورت مقدار اصلی کوشی بیان شده‌اند [۶].

در سال ۱۹۷۲، (Freedman) و (Keer) ارتعاش هارمونیک یک شالوده نواری صلب که بر روی محیط ارتوتروپ ارتجاعی نیمه بی‌نهایت قرار دارد را در حالت دو بعدی بررسی کرده و با استفاده از سری فوریه متغیر زمان را به پارامتر فرکانس تبدیل کرده‌اند. دستگاه معادلات به دست آمده با استفاده از توابع پتانسیل هلمهولتز به صورت مجزا تبدیل شده و معادلات مستقل حاکم با استفاده از تبدیلات انتگرالی حل شده‌اند. در سال ۱۹۹۱ راجاپاکس (Rajapakse) و ونگ (Wang) ارتعاش هارمونیک سازه مدفون در محیط ارتوتروپ را در حالت دو بعدی با استفاده از روش حذفی و رسیدن به معادلات دیفرانسیل مستقل مرتبه بالاتر (دو برابر مرتبه معادلات دیفرانسیل اصلی) و با استفاده از تبدیلات انتگرالی حل کرده‌اند. در سال ۱۹۹۳، همین دو مولف مسأله انتشار امواج هارمونیک ناشی از ارتعاش یک شالوده مدفون در محیط ایزوتروپ جانبی، ارتجاعی و نیمه بینهایت را بررسی کرده و توانسته‌اند دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم را با استفاده از روش تبدیل انتگرالی و به کمک توابع پتانسیل الیوت (Elliot) به صورت معادلات مستقل به دست بیاورند. معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به دست آمده، به کمک تبدیل انتگرالی هنکل به شکل معادله