فهرست مندرجات

Abstract

In this thesis we prove the existence of fixed point for several classes of mappings (admitting a center , nonexpansive mappings and asymptotically nonexpansive mappings)defined on the closed and convex subsets of a Banach space satisfying some proximinality condition. We study the existence of fixed point in an important class of spaces which are usually called strictly $L(\tau)$ - spaces and which contain all Lebesgue $L^p(\tau)$ spaces for $p \geq ۱$. We will show that for these spaces there is strong connection between mappings admitting a center and nonexpansive mappings.

In particular we show closed , bounded and convex subsets of $L_{۱}[۰, ۱]$ that are weak compact , has fixed point property for nonexpansive self mappings.

Keywords:Fixed point; Nonexpansive mappings; Mappings admitting a center; Weak star topology.

چکیده

مطالعهٔ نگاشتهای دارای مرکز، نگاشتهای غیر انبساطی و نگاشتهای مجانباً غیر انبساطی در نظریه نقطه ثابت از اهمیت خاصی برخوردار است. بدین منظور به مطالعهٔ وجود نقطه ثابت برای این رده از نگاشتها هنگامی که روی زیر مجموعه های محدب و بسته از فضای باناخ تعریف شده اند و در شرط پروکسیمینالیتی صدق می کنند ، می پردازیم. در واقع نشان می دهیم شرط معادل اثبات وجود نقطه ثابت برای نگاشتهای پیوستهٔ دارای مرکز ، شرط پروکسیمینالیتی می باشد.

در پایان فضای $L(\tau)$ — اکید را معرفی کرده و ثابت می کنیم در این فضا همچنان شرط پروکسیمینالیتی معادل اثبات وجود نقطه ثابت برای نگاشتهای پیوستهٔ دارای مرکز است. همچنین نشان می دهیم در این فضا نگاشتهای غیر انبساطی که در شرط پروکسیمینالیتی صدق کنند ، نقطه ثابت دارند.

واژه‌های کلیدی: نگاشتهای دارای مرکز ، نقطه ثابت ، نگاشت غیر انبساطی ، نگاشت غیر انبساطی مجانبی ، توپولوژی ضعیف.

پیشگفتار

مجموعهٔ C و خود نگاشت $T: C \to C$ را در نظر بگیرید. جواب معادلهٔ $T(x) = x$ ، نقطهٔ ثابت نگاشت T نامیده می شود. اثبات وجود جواب برای این معادله در فضاهای مختلف اهمیت خاصی در ریاضیات دارد و بخش مهمی از نظریه نقطه ثابت را تشکیل می دهد. نظریه نقطه ثابت در فضای باناخ [1] یکی از مهمترین بخش های نظریهٔ نقطه ثابت است. نظریه نقطه ثابت باناخ و نتایج کلی آن در ریاضیات ، آمار ، مهندسی و اقتصاد بسیار کاربرد دارد.

مجموعه هایی را در فضای باناخ ، دارای خاصیت نقطه ثابت گوییم که نگاشتهای تعریف شده روی این مجموعه ها نقطه ثابت داشته باشند. به طور مثال درقضیه شاودر [2] این زیر مجموعه ها باید محدب و بسته باشند تا نگاشتهای پیوسته تعریف شده روی این مجموعه ها نقطه ثابت داشته باشند.

ری [3] در [۴۸] نشان داد که زیر مجموعه های محدب و بسته‌از فضاهای هیلبرت دارای خاصیت نقطه ثابت برای نگاشتهای غیر انبساطی هستند اگر و تنها اگر این مجموعه ها کراندار باشند.

داولینگ [4] ، لنارد [5] و تورت [6] در [۱۸] ثابت کردند که زیرمجموعه های ناتهی ، محدب ، کراندار و بسته از C_0 دارای خاصیت نقطه ثابت برای نگاشتهای غیر انبساطی هستند اگر و تنها اگر فشرده

---

[1] Banach

[2] Schauder

[3] Ray

[4] Dowling

[5] lennard

[6] Turett

ضعیف باشند. C_0 نمونه ای از فضاهای غیر هیلبرت باناخ است. اگر چه این نتیجه برای فضای باناخ $(\ell_1, \|.\|_1)$ درست نیست.

کارلوویتز[۷] در [۳۸] نشان داد که در فضای $(\ell_1, \|.\|_1)$ فقط زیر مجموعه های محدب و فشرده ضعیف ستاره دارای نقطه ثابت برای نگاشتهای غیر انبساطی هستند و مثلاً بعضی زیر مجموعه های محدب ، بسته و کراندار از این فضا فاقد خاصیت نقطه ثابت می باشند پس پرسشی که اینجا مطرح می شود این است که چه نوعی از زیر مجموعه های محدب ، بسته و کراندار از $(\ell_1, \|.\|_1)$ دارای خاصیت نقطه ثابت برای نگاشتهای غیر انبساطی هستند.

لین [۸] در [۴۲] نشان داد که که این نگاشتها در صورتی نقطه ثابت دارند که $\|.\|-$ غیر انبساطی باشند که $\|.\|$ نرمی روی ℓ_1 معادل با نرم $\|.\|_1$ است.

این پایان نامه ، نشان خواهد داد که شرط پروکسیمینالیتی معادل اثبات وجود نقطه ثابت برای نگاشتهای دارای مرکز است. زیر مجموعه های $L_1([0,1])$ باید فشرده ضعیف باشند تا نگاشتهای غیر انبساطی تعریف شده روی آنها نقطه ثابت داشته باشند.

فصل (۱) به بیان تعاریف مقدماتی که دانستن آنها در فصول بعدی ضروری است ، می پردازد.

نگاشتهای دارای مرکز را در فصل (۲) تعریف می کنیم. این نگاشتها تحت شرایطی که در این فصل گفته خواهد شد نقطه ثابت خواهند داشت. همچنین خاصیت (C) را شرح می دهیم و کاربرد آن را در حل یک معادله انتگرالی نشان می دهیم.

خاصیت پروکسیمینالیتی را در فصل (۳) تعریف کرده و وجود نقطه ثابت را برای نگاشتهای دارای مرکز با عطف به این خاصیت بیان می کنیم .

فصل (۴) فضاهای $L(\tau)-$ اکید را معرفی کرده و وجود نقطه ثابت را برای آن اثبات می کند. این فضا شامل همه فضاهای لبگ $L^P(\Omega)$ برای $P \geq 1$ است. در این فضاها ارتباطی قوی بین نگاشتهای دارای مرکز و نگاشتهای غیر انبساطی وجود دارد و تمام نتایجی که برای نگاشتهای دارای مرکز در فصل (۲) برقرار بود برای این نگاشتها نیز قابل نتیجه گیری است.

---
۷ Karlovitz

۸ Lin

فصل (۵) زیرمجموعه هایی از فضای باناخ را نشان می دهد که فاقد خاصیت نقطه ثابت هستند. این زیرمجموعه ها شامل پایه های ℓ^1 – ایزومتریک مجانبی هستند.

لازم به ذکر است که منابع اصلی این پایان‌نامه، مقالات [۱۲]، [۱۳]،[۱۷] و [۲۱] می‌باشند.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدماتی از آنالیز تابعی

مطالعهٔ برخی مفاهیم اولیه و قضایا از آنالیز تابعی که در فصول بعدی کاربرد دارد ، ضروری است. لذا در این فصل به یادآوری و بیان این مفاهیم و قضایا می پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱ فضای دوگان : برای دو فضای باناخ X و Y ، $L(X,Y)$ نشان دهندهٔ فضای عملگر های خطی کراندار از X به توی Y است. نرم روی این فضا به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\|/\|x\| \ : \ x\in X \ , \ x\neq ۰\} \\ &= \sup\{\|Tx\| \ : \ x\in X \ , \ \|x\|=۱\}. \end{aligned}$$

دوگان فضای X را با X^* نشان می دهیم.

متریکی که به تعریف فاصلهٔ دو مجموعه می پردازد از اهمیت خاصی برخوردار است. این متریک ، به متریک هاسدورف معروف است که در ادامه آن را تعریف می کنیم.

تعریف ۲.۱.۱ فضای (X,d) را یک فضای متریک در نظر بگیرید و $H(X)$ را مجموعهٔ همهٔ زیر مجموعه های X فرض کنید. برای هر دو مجموعهٔ غیر خالی A,B از $H(X)$ ، فاصلهٔ مابین یک نقطه در A و مجموعهٔ B با رابطهٔ زیر بیان می شود:

$$d(x,B) = \inf\{d(x,y)|y \in B\}.$$

و فاصلهٔ مابین دو مجموعه از $H(X)$ با رابطه‌ای به شکل زیر تعریف می شود:

$$d(A,B) = \sup\{d(x,B) \mid x \in A\}.$$

تعریف ۳.۱.۱ متریک هاسدورف یافاصلهٔ مابین دو مجموعهٔ A,B از $H(X)$ به صورت زیر بیان می شود:

$$H(A,B) = \max\{d(A,B), d(B,A)\}.$$

تعریف ۴.۱.۱ نگاشت T تعریف شده روی فضای متریک (X,d) به خودش (خودنگاشت) یک **نگاشت لیپ شیتز** گفته می شود، اگر عدد ثابت حقیقی مثبتی مانند α موجود باشد، بقسمی که برای هر $x,y \in X$، داشته باشیم:

$$d(Tx,Ty) \le \alpha d(x,y).$$

اگر $۰ \le \alpha < ۱$، سپس T نگاشت انقباضی و α عامل انقباض گفته می شود.

تعریف ۵.۱.۱ اگر در تعریف بالا $\alpha = ۱$ باشد، نگاشت T را**غیر انبساطی** می گوییم.

تعریف ۶.۱.۱ نقطهٔ $u \in X$، نقطهٔ ثابت نگاشت $T : X \to X$ گفته می شود، اگر

$$Tu = u.$$

اصل انقباض **باناخ** یکی از اساسی ترین و مهم ترین نتایج در نظریه نقطه ثابت است که بصورت زیر بیان می شود:

تعریف ۷.۱.۱ فضای (X, d) را فضای متریک کامل در نظر بگیرید و $T : X \to X$ را یک نگاشت انقباضی فرض کنید. سپس T نقطه ثابت یکتا در X دارد و برای هر $x_{\circ} \in X$ دنباله تکراری $\{T^n x_{\circ}\}$ همگرا به این نقطه ثابت است.

تعریف ۸.۱.۱ مجموعهٔ محدب C را در نظر بگیرید. تابع $f : C \to R$ محدب گفته می شود اگر برای هر $x, y \in C$ و برای هر $t \in [\circ, 1]$ داشته باشیم:

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

تعریف ۹.۱.۱ اگر $(X, \|.\|_X)$ و $(Y, \|.\|_Y)$ دو فضای باناخ باشند ، $X \oplus Y$ نمایانگر فضای حاصلضربی $X \times Y$ با نرم $\|(x, y)\|_1 := \|x\|_X + \|y\|_Y$ است. به طور مشابه $X \oplus_\infty Y$ به معنای فضای حاصلضربی $X \times Y$ با نرم $\|(x, y)\|_\infty := max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$ است.

اکنون به بیان تعریف مجموعه های قطری می پردازیم که در فصول بعدی این تعاریف را به کار خواهیم برد:

تعریف ۱۰.۱.۱ برای زیرمجموعه D و H از X مقادیر زیر را در نظر بگیرید:

$$r_u(D) = \sup\{\ \|u-v\| \ : \ v \in D\} \quad (u \in X),$$
$$r_H(D) = \inf\{\ r_u(D) \ : \ u \in H\}.$$

$r_u(D)$ را شعاع D نسبت به u و $r_H(D)$ و به ترتیب شعاع چبیشف D نسبت به H نامیده می شوند.

تعریف ۱۱.۱.۱ نقطه $u \in D$ را قطری گوییم هرگاه $r_u(D) = diamD$ باشد و مجموعه هایی که شامل این نقاط هستند را مجموعه های قطری می نامیم.

مثال ۱.۱.۱ مجموعه M را زیر مجموعه ای از $L[۰,۱]$ در نظر بگیرید که به صورت زیر آن را تعریف می کنیم:

$$M = \{x = \{x(t)\} \ : \ ۰ = x(۰) \leq x(t) \leq x(۱) = ۱\}.$$

دو نرم زیر را روی $L[۰,۱]$ در نظر می گیریم و نسبت به این دو نرم قطری بودن مجموعهٔ M را بررسی می کنیم:

$$\|x\|_۰ = \max\{\ |x(t)| \ : \ ۰ \leq t \leq ۱\},$$
$$\|x\|_۱ = \|x\|_۰ + \left(\int_۰^۱ (x(t))^۲\ dt\right)^{۱/۲}.$$

ابتدا نسبت به نرم $\|.\|_۰$ قطری بودن مجموعهٔ M را بررسی می کنیم. طبق تعریف اگر تساوی $r(M) = diamM$ برقرار باشد آنگاه M قطری است و همان طور که از تعریف مجموعه M برمی آید قطر این مجموعه برابر یک و شعاع M با توجه به تعریف شعاع برابر است با $r(M) = sup\{\|x\|_۰ \ : x \in M\} = ۱$ ، بنابراین تساوی $r(M) = diamM = ۱$ برقرار و M قطری

است.

حال قطری بودن مجموعهٔ M را نسبت به $\|.\|_1$ بررسی می کنیم:

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \|x\|_0 + \left(\int_0^1 (x(t))^2\, dt\right)^{1/2} \\ \|x\|_1 &= \max\{\,|x(t)| \;:\; 0 \le t \le 1\} + \left(\int_0^1 (x(t))^2\, dt\right)^{1/2} \\ \|x\|_1 &= 1 + \left(\int_0^1 1^2\, dt\right)^{1/2} = 2, \end{aligned}$$

پس قطر M در این حالت برابر ۲ است. اما شعاع M در نقطهٔ $x(t) = 1/2$ با قطر M برابر نیست زیرا

$$\begin{aligned} r(M) = \sup\{\|x\|_1 \;:\; x \in M\} &= \|x\|_0 + \left(\int_0^1 (x(t))^2\, dt\right)^{1/2} \\ &= 1 + \left(\int_0^1 1/2^2\, dt\right)^{1/2} \\ &= 1 + 1/2 = 3/2, \end{aligned}$$

بنابراین مجموعهٔ M نسبت به نرم $\|.\|_1$ قطری نیست زیرا تساوی $r(M) = diamM$ برقرار نیست.

تعریف تابع نیم پیوسته یکی دیگر از مفاهیم مهم و کاربردی در این پایان نامه است:

تعریف ۱.۱.۱۲ اگر X و Y مجموعه هایی باشند آنگاه $F : X \to 2^Y \backslash \{\emptyset\}$ یک تابع چند مقداری است و گفته می شود در نقطه x_0 نیم پیوسته بالایی است اگر و تنها اگر برای هر مجموعهٔ باز $V \subseteq Y$ که شامل $F(x_0)$ است بتوان همسایگی $\aleph(x_0)$ شامل U را ($U \subseteq \aleph(x_0)$) یافت به طوریکه $F(U) \subseteq V$ باشد این یعنی برای هر $x \in U$ ، $F(U) \subseteq V$ باشد.

به طور مشابه $F : X \to 2^Y \backslash \{\emptyset\}$ نیم پیوسته پایینی در x_0 است اگر و تنها اگر برای هر مجموعهٔ باز $V \subseteq Y$ که $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$ است بتوان همسایگی $\aleph(x_0)$ شامل U را یافت به طوریکه $F(U) \cap V \neq \emptyset$ باشد این یعنی برای هر $x \in U$ ، $F(x) \cap V \neq \emptyset$ باشد.

مثال ۲.۱.۱ اگر مجموعه های X و Y به صورت $X = Y = R$ باشند و تابع $F(x)$ را به صورت زیر داشته باشیم:

$$F(x) = \begin{cases} [0, 1], & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

آنگاه با توجه به توضیحات بالا این تابع چند مقداری است و می توان همسایگی $\aleph$ را حول نقطه $x = 0$ یافت به طوریکه در شرایط بالا صدق کند و در نتیجه این تابع نیم پیوسته پایینی است در حالیکه نیم پیوسته بالایی نیست زیرا نمی توان همسایگی مورد نظر حول نقطه $x = 0$ را یافت.

فصل ۲

خاصیت نقطه ثابت برای نگاشتهای دارای مرکز

۱.۲ نگاشتهای دارای مرکز

فصل (۲) به معرفی نگاشتهای دارای مرکز، نگاشتهای نوع J و برخی از ویژگی های این نگاشتها می پردازد. همچنین در این بخش شرایط وجود نقطه ثابت برای این نگاشتها بیان می شود.

اگر C زیر مجموعه محدب ، بسته و کراندار از فضای نرم دار $(X, \|.\|)$ باشد و $T : C \to X$ نگاشت غیر انبساطی با نقطه ثابت $y_\circ \in C$ باشد آنگاه برای هر $x \in C$ داریم:

$$\| y_\circ - T(x) \| \ \leq \ \| y_\circ - x \|. \qquad (۱)$$

نامساوی (۱) حتی برای نگاشت های غیر انبساطی که نقطه ثابت آنها خارج از C $(y_\circ \notin C)$ قرار دارد ،

نیز برقرار است. برای مثال نگاشت آفین بل [۱] را بررسی می کنیم. قبل از آن به یادآوری تعریف نگاشت آفین می پردازیم:

تعریف ۱.۱.۲ نگاشت $T : C \to C$ را آفین نامیم اگر C مجموعه ای محدب باشد و برای هر $x, y \in C$ و هر $k \in [0, 1]$ داشته باشیم:

$$T(kx + (1 - k)y) \ = \ kTx + (1 - k)Ty.$$

مثال ۱.۱.۲ نگاشت T را روی گوی واحد باز، از فضای دنباله ای کلاسیک C_0 در نظر بگیرید که ضابطهٔ آن به صورت زیر باشد:

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) \ = \ (1, x_1, x_2, \dots),$$

اگر $y_0 = 2e_1 = (2, 0, 0 \dots)$ باشد آنگاه T در نامساوی (۱) صدق می کند. برای هر $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in B$ روابط زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} \|T(x) - y_0\| = & \ \|(-1, x_1, x_2, \dots)\| = 1 \\ \leq & \ \ 2 - x_1 = \|(x_1 - 2, x_2, x_3, \dots)\| = \|x - y_0\|. \end{aligned}$$

پس هدف ما در این فصل بررسی نگاشت هایی است که به ازای هر $y_0 \in X$ در نامساوی (۱) صدق کنند و در اصطلاح به این نقاط مراکز T و چنین نگاشت هایی را نگاشت های دارای مرکز گوییم .

تعریف ۲.۱.۲ زیر مجموعه محدب ، بسته و کراندار C از فضای باناخ X را در نظر بگیرید. $y_0 \in X$ را یک مرکز برای نگاشت $T : C \to X$ گوییم ، اگر برای هر $x \in C$ داشته باشیم:

$$\| \ y_0 - T(x) \ \| \ \leq \ \| \ y_0 - x \ \|. \qquad (2)$$

[۱] Beals 'mapping

مجوعه تمام مراکز نگاشت T را با $Z(T)$ نشان می دهیم.

تعریف ۳.۱.۲ زیر مجموعه محدب ، بسته و کراندار C از فضای باناخ X را در نظر بگیرید. . نگاشت $T : C \to X$ را نوع J نامیم هرگاه پیوسته و مرکزی مانند $y_\circ \in X$ داشته باشد.

تعریف ۴.۱.۲ زیر مجموعه محدب ، بسته و کراندار C از فضای باناخ Xرا در نظر بگیرید. نگاشت $T : C \to C$ را شبه غیر انبساطی گوییم هرگاه حداقل یک نقطه ثابت درC داشته باشد و هر نقطه ثابت ، مرکزی برای T باشد.

توجه ۱.۱.۲ اگر نگاشت $T : C \to X$ دارای مرکز $y_\circ \in C$ باشد یعنی مرکز به دامنه تعلق داشته باشد آنگاه $T(y_\circ) = y_\circ$ است. یعنی در این حالت هر مرکز T حتماً نقطه ثابت آن نیز است. بنابراین وجود نقطه ثابت را برای نگاشت های نوع J فقط وقتی مرکز خارج از دامنه قرار گیرد $(y_\circ \notin C)$ بررسی می شود.

توجه ۲.۱.۲ از مفهوم نگاشت نوع J چنین بر می آید که مرکز نباید لزوماً نقطه ثابت باشد.

نتایج زیر از تعریف مرکز یک نگاشت قابل استخراج است :

۱) **اگر نگاشت $T : C \to X$ دارای مرکز$y_\circ \in X$ باشد و$r \in (\circ, ۱)$ باشد سپس نگاشت $T_r = rI + (۱ - r)T$ دارای همان مرکز $y_\circ \in X$ است.**

۲) **اگر نگاشت $T : C \to X$ دارای مرکز$y_\circ \in X$ باشد سپس نگاشت $T^n : C \to C$ نیز دارای همان مرکز $y_\circ \in X$ است.**

۳) اگر نگاشت $T : C \to X$ دارای مرکز $y_\circ \in X$ باشد سپس تحدید T به هر زیر مجموعهٔ C نیز دارای همان مرکز $y_\circ \in X$ است.

۴) اگر نگاشت $T : C \to X$ دارای مرکز $y_\circ \in X$ باشد سپس نگاشت $\tilde{T} : C - \{y_\circ\} \to X$ با ضابطهٔ $\tilde{T}(x - y_\circ) = T(x) - y_\circ$ ، $\circ_X$ را به عنوان مرکز می پذیرد .

۵) اگر چه هر نقطه ثابت یک نگاشت غیر انبساطی یک مرکز برای این نگاشت است اما در حالت کلی نقطه ثابت نگاشت لیپ شیتز لزوماً مرکز نیست.

مثال ۲.۱.۲ نگاشت $T \; : \; [۱/۲, ۲] \to [۱/۲, ۲]$ را با ضابطهٔ $T(x) = ۱/x$ در نظر بگیرید ، چون مشتق $T'(x) = -۱/x^۲$ روی $C = [۱/۲, ۲]$ کراندار است پس نگاشت T لیپ شیتز روی C است.
واضح است که $x_\circ = ۱$ یکتا نقطه ثابت T است ، اما این نقطه مرکزی برای آن نمی باشد زیرا:

$$|T(۱/۲) - ۱| = ۱ > |۱/۲ - ۱| = ۱/۲,$$

بیشتر اینکه اگر $y_\circ > ۲$

$$|T(۲) - y_\circ| = |۱/۲ - y_\circ| > |۲ - y_\circ|,$$

و اگر $y_\circ < ۱/۲$

$$|T(۱/۲) - y_\circ| = |۲ - y_\circ| > |۱/۲ - y_\circ|,$$

پس با وجود اینکه T نقطه ثابت در C دارد اما فاقد مرکز است.

۶) بعضی نگاشت های انبساطی که حتی لیپ شیتز نیستند نیز نوع J می باشند.

مثال ۳.۱.۲ نگاشت $T_n : [\circ, ۱] \to [\circ, ۱]$ با ضابطهٔ $T_n(x) = x^n$ را در نظر بگیرید. این نگاشت نقطهٔ $y_\circ = -a \geq \circ$ به عنوان مرکز می پذیرد.

T_n برای $n \geq ۲$ روی $[۰,۱]$ غیر انبساطی نیست. توجه کنید که هر نگاشت T_n دو نقطه ثابت در $[۰,۱]$ دارد که آنها $y_۰ = ۰$ و $y_۱ = ۱$ هستند حال آنکه $y_۰$ مرکزی برای T_n است و $y_۱$ مرکز T_n نیست پس چنین نگاشتی نمی تواند شبه غیر انبساطی باشد.

از طرف دیگر نگاشت غیر لیپ شیتز $T : [۰,۱] \to [۰,۱]$ با ضابطه $T(x) = \sqrt[۴]{x}$ نقطه ثابت $y_۱ = ۱$ را به عنوان مرکز می پذیرد.

۷) مثال های بالا نشان می دهد که نگاشت های نوع J ممکن است بیش از یک مرکز بپذیرند.

۲.۱.۱ نمونه هایی از نگاشتهای نوع J

این قسمت نمونه هایی از نگاشتهای نوع J را بیان می کند که عبارت اند از نگاشتهای غیر انبساطی با نقطه ثابت ، نگاشتهای غیر انبساطی مجانباً متناوب و نگاشتهایی که در داخل کره ها قرار می گیرند که به تفصیل به بررسی هریک از آن ها می پردازیم:

۱) نگاشتهای غیر انبساطی با نقطه ثابت

هر نگاشت غیر انبساطی $T : C \to X$ با نقطه ثابت ، که درآن C زیر مجموعه محدب ، بسته و کراندار از فضای باناخ X است ، نگاشت نوع J است. به علاوه هرنقطه ثابت $y_۰$ از چنین T مرکزی برای آن است و همچنین نگاشتهای غیر انبساطی خوش تعریفی موجود است که مجموعه نقاط ثابت شان تک عضوی نیست ، اینها نمونه دیگر از نگاشتهای نوع J است که بیش از یک مرکز می پذیرند.

مجموعه نقاط ثابت نگاشت غیر انبساطی نیازی نیست محدب باشد اما این مجموعه همیشه بسته است. این مطلب برای مجموعه مراکز نگاشتهای $T : C \to X$ که نوع J هستند یعنی

$Z(T)$ نیز برقرار است:

$z \in \overline{Z(T)}$ را در نظر می گیریم ، دنبالهٔ (z_n) را در $Z(T)$ می توان پیدا کرد به طوریکه $z_n \to z$ باشد. بنابراین برای هر $x \in C$ داریم:

$$\begin{aligned} \|T(x)-z\| &= \lim_{n\to\infty} \|T(x)-z_n\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \|x-z_n\| = \|x-z\|, \end{aligned}$$

و در نتیجه $z \in Z(T)$ و $Z(T)$ بسته است.□

۲) نگاشتهای غیر انبساطی محدباً متناوب

یکی دیگر از انواع نگاشتهای نوع J نگاشتهای غیر انبساطی محدباً متناوب است که در این قسمت ابتدا این نگاشتها را تعریف کرده و سپس وجود مرکز و نقطه ثابت را برای این نگاشتها اثبات خواهیم کرد.

تعریف ۵.۱.۲ زیر مجموعه محدب ، بسته و کراندارC از فضای باناخ X را در نظر بگیرید. نگاشت $T: C \to C$ را غیر انبساطی محدباً متناوب گوییم اگر برای هر$n \in N$ و $x_1, \ldots, x_n, y \in C$ داشته باشیم:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{n} T(x_i) - T(y) \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{n} x_i - y \right\|.$$

هر نگاشتهای غیر انبساطی محدباً متناوب ، غیر انبساطی نیز هستند. به علاوه اگر $T: C \to C$ نگاشت غیر انبساطی خطی باشد سپس غیر انبساطی محدباً متناوب نیز خواهد بود.

بعضی از نگاشتهای آفین انقباضی بدون این خاصیت نیز موجودند. به مثال زیر توجه نمایید: