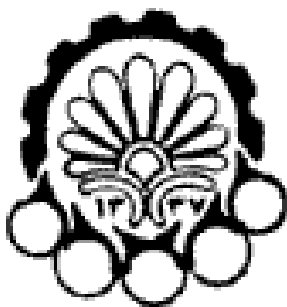


به نام خدا



دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده برق

پایان نامه کارشناسی ارشد برق

محاسبه پارامترهای تشعشعی یک آنتن آرایه فازی در باند فرکانسی S با استفاده
از تبدیل میدان راه نزدیک به دور با به کارگیری روش FDTD

نگارش:

مجتبی احدی

استاد راهنما:

دکتر ایاز قربانی

استاد مشاور:

دکتر غلامرضا مرادی



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

بسمه تعالی

فرم اطلاعات پایان نامه
کارشناسی - ارشد و دکترا

تاریخ:
شماره:

معاونت پژوهشی
فرم پروژه تحصیلات تکمیلی ۷

مشخصات دانشجو:

نام و نام خانوادگی: مجتبی احدی
شماره دانشجویی: ۸۵۱۲۳۰۸۷

دانشجوی آزاد
دانشکده: برق

بورسیه
رشته تحصیلی: مخابرات

معادل
گروه: میدان

مشخصات استاد راهنما:

نام و نام خانوادگی: دکتر ایاز قربانی
نام و نام خانوادگی:

درجه و رتبه: دانشیار
درجه و رتبه:

مشخصات استاد مشاور:

نام و نام خانوادگی: دکتر غلامرضا مرادی
نام و نام خانوادگی:

درجه و رتبه: استادیار
درجه و رتبه:

عنوان پایان نامه به فارسی: محاسبه پارامترهای تشعشی یک آنتن آرایه فازی در باند فرکانسی S با استفاده از تبدیل میدان راه نزدیک به دور با به کارگیری روش FDTD

عنوان پایان نامه به انگلیسی: Calculating an Array Antennas Radiation Patterns in S band using Near-Field to Far-Field Transportation by Numerical FDTD Method

نوع پروژه: کارشناسی ارشد دکترا
کاربردی بنیادی نظری سال تحصیلی: ۸۵

تاریخ شروع: ۸۶/۸ تاریخ خاتمه: ۸۷/۱۲ تعداد واحد: ۶ سازمان تأمین کننده اعتبار:

واژه‌های کلیدی به فارسی: تفاضل محدود، حوزه زمان، میدان راه نزدیک، میدان راه دور، آنتن، پترن آنتن، تبدیل میدان راه نزدیک به میدان راه دور
واژه‌های کلیدی به انگلیسی: Near Field, Far Field, FDTD, Time Domain, Finite Difference, Antennas, Antennas patterns, near-field far-field transportation

مشخصات ظاهری	تعداد صفحات	تصویر <input checked="" type="radio"/> جدول <input type="radio"/> نمودار <input checked="" type="radio"/> نقشه <input type="radio"/> واژه‌نامه <input type="radio"/>	تعداد مراجع	تعداد صفحات ضمیمه
زبان متن	فارسی <input checked="" type="radio"/> انگلیسی <input type="radio"/>	انگلیسی <input type="radio"/> چکیده	فارسی <input checked="" type="radio"/> انگلیسی <input checked="" type="radio"/>	۰
یادداشت				

نظرها و پیشنهادهای به منظور بهبود فعالیت‌های پژوهشی دانشگاه

استاد:

دانشجو:

تاریخ: ۸۵/۱۲/۲۵

امضاء استاد راهنما:

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

که همیشه پشتیبانم بوده‌اند

چکیده

تفاضل محدود حوزه زمان از روش‌هایی است که به وسیله آن می‌توان به بررسی مسائل الکترومغناطیسی پرداخت. یکی از عللی که باعث می‌شود تا به سمت روش‌های عددی در الکترومغناطیس برویم آن است که در بعضی مسائل ساختار مساله به گونه‌ای است که با روش‌های ریاضی متداول و با حل مستقیم معادلات ماکسول، رسیدن به جواب غیر ممکن می‌شود. بدین منظور برای حل این مسائل باید تقریب‌هایی را در نظر گرفت تا مساله قابل حل باشد. در این صورت دیگر جواب بدست آمده دارای دقت خوبی نبوده و با مقدار حقیقی فاصله زیادی دارد. اگر بخواهیم جواب‌هایی با دقت بالا داشته باشیم ناگزیر به استفاده از روش‌های عددی در الکترومغناطیس هستیم. بدین ترتیب با تبدیل معادلات انتگرالی و دیفرانسیل به معادلات تفاضلی، می‌توان مسائل پیچیده‌ای را که تا کنون قابل حل نبودند را حل کرد.

یکی از کاربرهای روش‌های عددی بررسی آنتن‌ها و پارامترهای تشعشی آنها می‌باشد. برای این منظور باید به نحوی میدان‌های راه دور یک آنتن را محاسبه و سپس با استفاده از این داده‌ها به بررسی پارامترهای آنتن پرداخت.

تبدیل میدان نزدیک به دور را می‌توان با استفاده از جریان‌های معادل میدان‌های اسکتر شده الکتریکی و مغناطیسی از منبع بر روی یک سطح فرضی بدست آورد. این امر با استفاده از روش ترکیبی تفاضل محدود حوزه زمان و فرکانس قابل انجام است. بدین منظور میدان‌های ناحیه نزدیک با استفاده از روش تفاضل محدود حوزه زمان محاسبه می‌شود و پس از محاسبه این میدان‌ها در حوزه زمان، با استفاده از تبدیل میدان نزدیک به میدان دور در حوزه فرکانس، میدان‌های ناحیه دور محاسبه می‌شوند. این روش دقت روش حوزه فرکانس در میدان نزدیک و سرعت تبدیل میدان نزدیک به دور را با هم ترکیب می‌کند.

در این پروژه به بررسی آرایه‌های خطی دو و چهارتایی و آرایه‌های دایروی چهار، شش و دوازده تایی پرداخته شد و نتایج آنها با روش آنالیتیک مقایسه شد. آنچه به عنوان ادامه کار پیشنهاد می‌شود این است که چند آرایه دایروی هم مرکز و یا آرایه‌های بیضوی مورد بررسی قرار گیرند.

کلید واژه- میدان نزدیک، تحلیل آنتن، روشهای ترکیبی، میدانهای پراکنندگی، Near Field.

Scattering Fields, Mixed methods, Numerical Methods, Antenna analysis

فهرست مطالب

مقدمه ۱

فصل اول

روش تفاضل محدود حوزه زمان ۳

۱-۱ تفاضل محدود ۴

۱-۱-۱ تبدیل معادلات به روش تفاضل محدود ۵

۲-۱ معادلات FDTD برای شبکه YEE ۱۰

۱-۲-۱ منابع و محیط‌های تلفاتی ۱۹

۲-۲-۱ هادی‌های کامل الکتریکی ۲۳

۳-۱ تعیین حالت پایدار ۲۳

۴-۱ محاسبات ثانویه ۲۵

۱-۴-۱ توان تشعشی ۲۵

۲-۴-۱ ولتاژ، جریان ۲۶

۵-۱ شرایط مرزی جاذب موج (ABC) ۲۷

شرایط مرزی تحلیلی جاذب موج و معادله موج یک طرفه ۲۷..... ۱-۵-۱

شرایط مرزی لایه کاملاً منطبق (PML) ۳۵..... ۲-۵-۱

فصل دوم

تبدیل میدان نزدیک به میدان دور ۴۵.....

تئوری تبدیل میدان نزدیک به میدان دور ۴۶..... ۱-۲

محاسبه میدان دور در حوزه زمان ۴۸..... ۱-۱-۲

محاسبه میدان دور در حوزه فرکانس ۵۳..... ۲-۱-۲

محاسبه میدان دور با استفاده از میدان نزدیک ۵۹..... ۲-۲

فصل سوم

کوپلینگ بین آنتن‌ها و اثر پروب ۶۶.....

کوپلینگ بین آنتن‌ها ۶۷..... ۱-۳

تعیین ضریب کوپلینگ ۷۴..... ۲-۳

اثر پروب در اندازه‌گیری ۷۹..... ۳-۳

فصل چهارم

۸۳.....	شبیه‌سازی‌ها و نتایج
۸۴.....	۱-۴ FDTD در مقابل روش ترکیبی حوزه زمان و فرکانس
۸۸.....	۲-۴ مقایسه نتایج بدست آمده از روش عددی و آنالیتیک
۹۴.....	۳-۴ بررسی درستی شبیه‌سازی آنتن
۹۶.....	۴-۴ تئوری آرایه‌ها
۱۰۰.....	۵-۴ محاسبه پترن آرایه‌ای از دو آنتن دایپول
۱۰۵.....	۶-۴ محاسبه پترن آرایه‌ای از چهار آنتن دایپول
۱۰۹.....	۷-۴ محاسبه پترن آرایه دایروی
۱۱۰.....	۸-۴ محاسبه پترن آرایه دایروی چهار آنتن دایپول
۱۱۴.....	۹-۴ محاسبه پترن آرایه دایروی شش آنتن دایپول
۱۱۷.....	۱۰-۴ محاسبه پترن آرایه دایروی دوازده آنتن دایپول
۱۲۱.....	۱۱-۴ محاسبه پارامترهای تشعشی آنتن
۱۲۴.....	۱۲-۴ محاسبه امپدانس ورودی

۱۳-۴ نتیجه گیری و پیشنهادات ۱۲۶

منابع ۱۲۸

مقدمه

معادلات الکترومغناطیس بر طبق معادلات ماکسول بیان می‌شوند و لازم است تا به روش کلاسیک با معادلات دیفرانسیل یا معادلات انتگرالی پیچیده ریاضی حل شوند. البته با توجه به پیشرفت و پیچیدگی مسائل در این علم، نیاز به روش‌های عددی برای آنالیز مسائل اهمیت بیشتری می‌یابد. امروزه با توجه به افزایش قدرت محاسباتی رایانه‌ها هر گونه مساله با هر درجه از پیچیدگی را می‌توان به روش عددی حل نمود.

به عنوان یکی از ضعف‌های روش تحلیلی کلاسیک می‌توان به مدل سازی معادلات الکترومغناطیسی بدن انسان اشاره نمود که آن را به صورت استوانه مدل می‌کنند که در عمل تفاوت‌های بنیادینی بین استوانه و بدن انسان وجود دارد. همچنین صورت انسان در روش کلاسیک به صورت کره مدل می‌شود. در واقع می‌توان گفت با عدم به کار گیری روش‌های عددی بررسی‌های دقیق شرایط مساله بسیار دشوار خواهد بود.

حل عددی معادلات جزئی و معادلات انتگرالی دارای تاریخچه‌ای طولانی بوده و روش‌های گوناگونی برای آن به وجود آمده است. علم الکترومغناطیس در گرو چنین معادلاتی است و بخش اعظم پیشرفت‌های اخیر در زمینه توسعه و ایجاد روش‌های پر قدرت جدید نیز مرهون انجام مطالعات عددی در همین علم می‌باشد. سه روش بنیادی در حل عددی مسائل الکترومغناطیس عبارتند از: روش تفاضل محدود^۱، اجزای محدود^۲ و روش مومنت^۳.

در حقیقت بیشتر تاکید بر مسائل الکترومغناطیسی و الگوریتم‌هایی است که به عنوان بنیان برنامه‌های رایانه‌ای و ارائه دهنده نتایج عددی مناسب قابل استفاده باشد. سرعت پردازشگر و حافظه مناسب برای بدست آوردن دقت بیشتر مورد نیاز است. مسائل فیزیکی واقعی دارای سه متغیر فضایی و یک متغیر زمان هستند.

¹ Finite Difference

² Finite Element

³ Method of Moments

اصول کاربردهای مهندسی از روش‌های عددی در علم الکترومغناطیس برای امواج هدایت شونده، آنتن‌ها و مسائل پراکندی می‌باشد. بخش مهمی از مسائل الکترومغناطیس به آنالیز پراکندگی امواج می‌پردازد. ساده‌ترین مساله پراکندگی به یک موج مسطح مربوط می‌شود که در فضای آزاد به یک جسم برخورد می‌کند، اغلب موارد آن جسم را به عنوان یک هادی در نظر می‌گیریم. موج تابشی موجب به وجود آمدن جریاناتی در جسم می‌شود که این جریان‌ها می‌توانند موج ثانویه معروف به موج پراکنده را به وجود آورند.

با این مقدمه اجمالی به سراغ بحث اصلی این پروژه که استفاده از روش تفاضل محدود در حوزه زمان به منظور تبدیل میدان نزدیک به دور و همچنین محاسبه پارامترهای تشعشعی از روی آن است پردازیم.

فصل اول

روش تفاضل محدود حوزه زمان

۱-۱ تفاضل محدود

روش تفاضل محدود حوزه زمان (FDTD) یکی از روشهای عددی الکترومغناطیس بر پایه حل معادلات دیفرانسیل می‌باشد. مزیت اولیه روش FDTD سر راست بودن آن در کار با گریدهای مستطیلی بوده و مولفه‌های میدان را به طور مستقیم و بدون نیاز به معکوس کردن ماتریس می‌توان محاسبه کرد. معادلات میدان به طور طبیعی پایدار در پله‌های زمانی مشخص به دست می‌آیند. الگوریتم FDTD به طور موثر برای مسایل ماکروویو نظیر موجبرها، خطوط شکافی و مدارهای میکرواستریپ استفاده می‌گردد. همچنین روش FDTD در حل مسائل مربوط به تشعشع و پراکندگی به طریقه گسسته سازی مستقیم قوانین فاراده و آمپر، به کار برده می‌شود. فرآیند گسسته سازی روی معادلات کرل ماکسول و یا معادلات انتگرالی میدان‌ها اعمال می‌گردد. روش ارائه شده در اینجا با گسسته سازی معادلات کرل ماکسول که در ابتدا توسط Yee انجام گرفته، آغاز می‌شود. به طور کلی تحلیل مسائل با روش FDTD به دلایل زیر اهمیت دارد:

۱. روش FDTD دقیق است، زیرا از مدلی استفاده می‌کند که با واقعیت همخوانی دارد.
۲. انعطاف پذیر است و قابلیت تحلیل ساختارهای پیچیده در این مدل بسیار بالاست.
۳. مقادیر میدان نزدیک را به طور مستقیم محاسبه می‌کند.
۴. توانایی لازم برای استفاده از مواد مختلف در شبیه سازی را دارد.
۵. پهنای باند وسیع دارد. زیرا در روش FDTD امکان در نظر گرفتن تابع پالسی در ورودی وجود دارد.
۶. هم اطلاعات حوزه زمان و هم حوزه فرکانس در روش FDTD قابل محاسبه است.

در این بخش طرز مدل کردن منبع و محیط‌های مرزی مختلف به منظور اطمینان از دقت مدل سازی همراه با حفظ الگوریتم موثر محاسباتی مربوط به زمان اجرا مورد توجه قرار می‌گیرد. هم چنین جزئیات روشهایی برای انجام محاسبات ثانویه کمیت‌هایی نظیر توان تشعشعی، ولتاژ، جریان و امپدانس مطرح شده است.

تفاضل محدود روشی است که بر اساس گسسته سازی مستقیم معادلات دیفرانسیل است. معادلات دیفرانسیل با معادلات تفاضل محدود جایگزین می‌شوند. معمولاً تقریب‌های تفاضلی با استفاده

از سری تیلور محاسبه می‌شوند. در ساده ترین حالت جواب به صورت شبکه‌های یکنواخت مستطیلی گسسته تقریب زده می‌شوند. از مزایای روش تفاضل محدود مدل کردن ساده مواد پیچیده است. همچنین این روش را می‌توان در آنالیزهای حوزه زمان برخلاف روش‌های FEM، MOM و BEM که روش‌های اختصاصی در حوزه فرکانس هستند اعمال کرد. اشکال روش تفاضل محدود سختی در مدل کردن شرایط هندسی با شکل دلخواه است. به عنوان مثال سطوح منحنی را نمی‌توان با دقت بالایی با شبکه‌های مستطیلی شبیه سازی کرد.

۱-۱-۱ تبدیل معادلات به روش تفاضل محدود

مشتق تابع $f(x)$ در نقطه x_0 به صورت زیر است

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} f(x) \right|_{x=x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad (1-1)$$

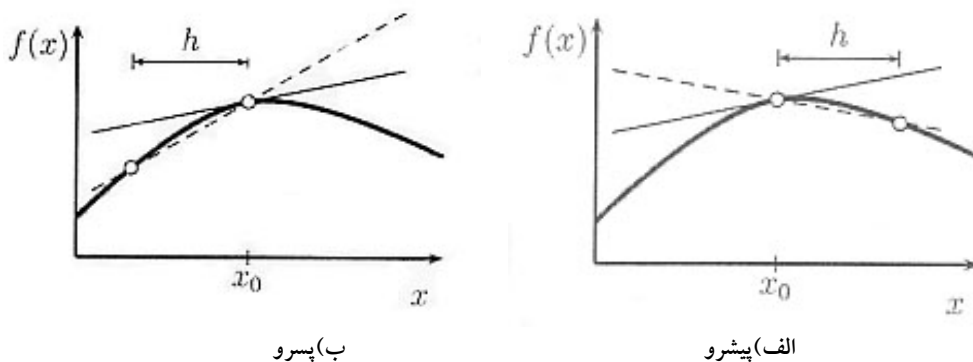
از این رو مشتق به معنای تغییرات مقدار تابع در نقطه مورد نظر است. در روش تفاضل محدود مشتقات به چند دسته تقسیم می‌شوند. به عنوان مثال

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} f(x) \right|_{x=x_0} \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad (2-1)$$

تفاضل پیشرو نامیده می‌شود. تفاضل پسرو به صورت

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} f(x) \right|_{x=x_0} \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \quad (3-1)$$

تعریف می شود. به عبارت دیگر تفاضل محدود مشتق محلی را به وسیله محاسبه تغییرات کلی مقدار تابع در بازه h تخمین می زند. شکل زیر این تقریب رو نشان می دهد.

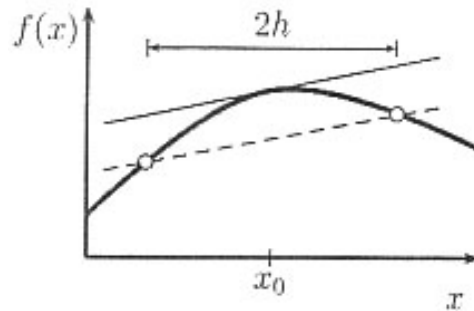


شکل ۱-۱-تقریب تفاضل

در یک نگاه ما می توانیم تفاضل پیشرو و پسرو را به صورت کم دقتی تخمین بزنیم، به عنوان مثال خط رسم شده با خط مماس بر منحنی موازی نیست. در این مثال در شکل ۱-۱ مقدار h باید به منظور بهبود دقت، کاهش پیدا کند. به توجه به شکل ۱-۱ شرایطی را تصور کنید که مقدار h کوچکتر شود و خط رسم شده به مقدار شیب منحنی نزدیک می شود در نهایت وقتی h به صفر میل کند با هم برابر می شوند. مقدار کوچک h دقت بالاتری را می دهد. اگر ما میانگین تفاضلات پیشرو و پسرو را محاسبه کنیم، به رابطه تفاضل مرکزی می رسیم

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x} f(x) \right|_{x=x_0} &\approx \frac{1}{2} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \right] \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \end{aligned} \quad (4-1)$$

شکل ۲-۱ هندسه تفاضل مرکزی را نشان می‌دهد. خط رسم شده تقریباً با خط مماس موازی است.



شکل ۲-۱-تفاضل مرکزی

تفاضل مرکزی از نوع دقت با مرتبه دوم است. به عبارت دیگر، این عبارت را می‌توان توسط مشتقات چند جمله‌ای از مرتبه دوم به طور دقیق محاسبه کرد. این مساله را می‌توان با استفاده از یک چند جمله‌ای درجه سوم $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ بررسی کرد. مشتق این چند جمله‌ای در نقطه دلخواه x_0 به صورت زیر است.

$$f'(x_0) = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c \quad (5-1)$$

تقریب تفاضل مرکزی در همان نقطه عبارت است از

$$\begin{aligned} f'(x_0) &\approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \\ &= \frac{a(x_0+h)^3 + b(x_0+h)^2 + c(x_0+h) + d}{2h} \\ &\quad - \frac{a(x_0-h)^3 + b(x_0-h)^2 + c(x_0-h) + d}{2h} \\ &= 3ax_0^2 + 2bx_0 + c + ah^2 \end{aligned} \quad (6-1)$$

این مقدار به مقدار حقیقی وقتی که h خیلی کوچک شود نزدیک می‌شود. می‌توان به این مساله نیز پی برد که اگر $a=0$ باشد مقدار تقریب تفاضل با مقدار حقیقی به ازای تمام مقادیر h برابر است. این مساله مربوط به چندجمله‌ای‌های مرتبه دوم می‌شود.

این مساله نیز امکان پذیر است که مشتقات بالاتر را با تفاضل محدود محاسبه کرد. به عنوان مثال تقریب تفاضل مرکزی مشتق مرتبه دوم بدین صورت خواهد شد.

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) \right|_{x=x_0} \approx \frac{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}}{h} \quad (7-1)$$

$$= \frac{f(x_0) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$$

روش دیگری که می‌توان معادلات بالا را بدست آورد استفاده از سری تیلور است. به سری تیلور دو تابع زیر توجه کنید.

$$u(x_0 + \Delta x) = u|_{x_0} + \Delta x \cdot \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_0} + \dots \quad (8-1)$$

$$u(x_0 - \Delta x) = u|_{x_0} - \Delta x \cdot \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_0} - \dots \quad (9-1)$$

از معادلات بالا می‌توان به نتایج زیر دست پیدا کرد

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0} = \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_0} - \dots \quad (10-1)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0} = \frac{u(x_0) - u(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_0} - \dots \quad (11-1)$$

و از تفریق آن دو معادله به معادله زیر می‌رسیم.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0} = \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{3} \cdot \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{x_0} + \dots \quad (12-1)$$

با توجه به عبارات بدست آمده، همانطور که مشاهده می‌شود آنچه در محاسبه تفاضل مرکزی استفاده می‌شود از تقریب بهتری نسبت به تفاضل پیشرو و پسرو دارد.

۲-۱ معادلات FDTD برای شبکه Yee

معادلات کرل ماکسول در ناحیه بدون تلف، بدون منبع و ایزوتروپیک را می‌توان به صورت زیر

نشان داد [1]:

$$-\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \nabla \times E \quad (13-1)$$

$$\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \nabla \times H \quad (14-1)$$

به طوریکه ε و μ پارامترهای اساسی محیط و E و H میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی

می‌باشند. در مختصات مستطیلی دو معادله برداری فوق به شش معادله تقسیم می‌شوند:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \quad (15-1)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad (16-1)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \quad (17-1)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \quad (18-1)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (19-1)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (20-1)$$

بعد از گسسته سازی تابع $f(x, y, z, t)$ اندیس های زیر جایگزین می گردند:

$$f(i \Delta x, j \Delta y, k \Delta z, n \Delta t) = f^n(i, j, k) \quad (21-1)$$

مشتقات جزیی با استفاده از تفاضل مرکزی تقریب زده می شوند. کوانتیزه شده معادلات بالا به صورت زیر می شود.

$$\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k)}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu} \times \left(\frac{E_z^n \left(i, j + \frac{1}{2}, k \right) - E_z^n \left(i, j - \frac{1}{2}, k \right)}{\Delta y} - \frac{E_y^n \left(i, j, k + \frac{1}{2} \right) - E_y^n \left(i, j, k - \frac{1}{2} \right)}{\Delta z} \right) \quad (22-1)$$