بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور

پایان نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته آمار ریاضی

دانشکده علوم

گروه علمی آمار

عنوان پایان نامه:

تابع مولد احتمال GPED2

استاد راهنما:

دکتر عبد الرضا بازرگان لاری

استاد مشاور:

دکتر نرگس عباسی

نگارش:

آمنه ثابت سروستانی

ماه و سال
شهریور ماه ۱۳۸۸

دانشگاه پیام نور
بسمه تعالی

تصویب پایان نامه /رساله

پایان نامه تحت عنوان

تابع مولد احتمال GPED2

که توسط سرکار خانم **آمنه ثابت سروستانی** در مرکز **شیراز** تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأیید می‌باشد.

تاریخ دفاع: **۸۸/۶/۳۱**   نمره: **۱۸/۷۵**   درجه ارزشیابی: **عالی**

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر عبدالرضا بازرگان لاری	استادیار	
۲- استاد مشاور	دکتر نرگس عباسی	دانشیار	
۳- استاد داور	دکتر مسعود یارمحمدی	استادیار	
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر احمد خاکساری	استادیار	

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

دراینجا از استاد راهنمایم جناب آقای دکتر عبدالرضا بازرگان لاری که در طول این مدت زحمت راهنمایی این پایان نامه را به عهده گرفتند، تشکر و قدردانی نموده و همچنین از سرکار خانم دکترنرگس عباسی که استاد مشاور اینجانب بودند، سپاسگزاری نمایم. همچنین از جناب آقای دکتر مسعود یارمحمدی که داوری این پایان نامه را تقبل نمودند، نهایت قدردانی را دارم.

چکیده

در این پایان نامه خانواده توزیع پولیا ایگن برگر تعمیم یافته نوع اول و توزیع پولیا اگنبرگر تعمیم یافته نـوع دوم معرفی شده و خصوصیات و ویژگی‌های آن‌ها به طور منظم مورد بررسی قرار گرفته شده است.رابطه ای که بین احتمالات در این دو توزیع وجود دارد و همچنین گشتاورها و برآورد پارامترها محاسبه شده است.

هدف اصلی این پایان نامه به دست آوردن تابع مولد احتمال توزیع پولیا اگنبرگر تعمیم یافته نوع دوم $GPED_2$ و همچنین محاسبه تابع چگالی احتمال دامنه تغییرات در یک نمونه تصادفی که اندازه نمونه یک متغیر تصادفی با توزیع‌های پولیا ایگن برگر تعمیم یافته نوع اول و توزیع پولیا اگنبرگر تعمیم یافته نوع دوم است، می‌باشد. بسیاری از خانواده های توزیع‌های گسسته(توزیع دوجمله ای، توزیع دوجمله ای منفی، خانواده توزیع کاتز و ...) زیر کلاسی‌های این دو توزیع هستند و به همین دلیل از اهمیت و کاربرد بسیار زیادی برخوردار هستند.

این پایان نامه در چهار فصل تنظیم شده است. در فصل اول، توزیع‌های پولیا ایگن برگر تعمیم یافته نـوع اول و نوع دوم معرفی شده و ویژگی‌های آن مورد بررسی قرار گرفته شده است.

در فصل دوم تابع توزیع دامنه تغییرات در یک نمونه تصادفی که اندازه نمونه متغیـر تصـادفی صـحیح مقـدار و غیرمنفی می‌باشد، محاسبه شده است.

در فصل سوم تابع چگالی احتمال دامنه تغییرات یک نمونه تصادفی با توزیع یکنواخت بر (k,l) و توزیع نمایی با پـارامتر λ کـه انـدازه نمونـه دارای توزیـع پولیـا ایگـن برگـر تعمـیم یافتـه نـوع اول ($GPED_1$) می‌باشد، محاسبه شده است.

در فصل چهارم تابع مولد احتمال توزیع توزیع پولیا ایگن برگر تعمیم یافته نوع دوم ($GPED_2$) و تابع چگـالی احتمال دامنه تغییرات در یک نمونه تصادفی با توزیع یکنواخت بر (k,l) یا از توزیع نمایی با پارامتر λ که اندازه نمونه دارای توزیع پولیا ایگن برگر تعمیم یافته نوع دوم ($GPED_2$) می‌باشد، محاسبه شده است.

فهرست

فصل اول

توزیع پولیا اگنبرگر تعمیم یافته و ویژگی‌های

۱-۱ مقدمه ۱

۱-۲ خانواده GPED نوع اول ۳

۱-۲-۱ ویژگی‌های خانواده GPED1 ۸

۱-۳ خانواده GPED نوع دوم ۹

۱-۳-۱ ویژگی‌های خانواده GPED2 ۱۰

۱-۴ رابطه‌های بازگشتی بین احتمال‌ها ۱۱

۱-۵ گشتاورها و رابطه‌های بازگشتی ۱۴

۱-۶ ویژگی‌های خانواده GPED ۲۱

۱-۷ برآورد پارامترهای GPED1 ۲۵

فصل دوم

تابع توزیع دامنه

۲-۱ مقدمه ۲۹

۲-۲ توزیع دامنه ۳۱

۲-۲-۱ نتایج مهم ۴۱

۲-۲-۲ کاربرد ۵۰

فصل سوم

تابع چگالی دامنه تغییرات زمانی‌که اندازه نمونه دارای توزیع GPED1 می‌باشد

۳-۱ مقدمه ۵۴

۳-۲ توزیع دامنه تغییرات ۵۵

۳-۳ نکات مهم ۶۰

فصل چهار

تابع مولد احتمال توزیع پولیا اگنبرگر تعمیم یافته نوع دوم

۴-۱ مقدمه ۶۵

۴-۲ توزیع دامنه ۷۰

۴-۳ نکات مهم ۷۶

فصل اول
توزیع پولیا اگنبرگر تعمیم یافته
و ویژگی‌های آن

۱-۱ مقدمه

ژاناردان[1] درسال۱۹۷۳به معرفی توزیع پولیا اگنبرگرتعمیم یافته[2] پرداخت که به اختصـار آن را بـا $GPED$ نشان داده و از محدود کردن توزیع پولیا مارکف تعمـیم یافتـه[3] ($GMPD$) بـه دسـت آورده است. ژاناردان و رائو[4] در سال ۱۹۸۲ تعدادی از ویژگی‌های این دو توزیع را ارائه دادند. در این فصل ویژگی‌های خانواده $GPED$ مورد بررسی قرار می‌گیـرد و تـابع مولـد احتمـال، گشـتاورها و روابـط بازگشتی بین گشتاورها به دست می‌آید. در این‌جا نشان داده می‌شود که توزیع‌های لاگرانژ کاتز[5] یک زیر کلاس از خـانواده $GPED$ (یـا $GPED_1$) بـوده وتوزیـع پولیـا اگنبرگـر تعمـیم یافتـه نـوع دوم ($GPED_2$) نیز معرفی و تعدادی از ویژگی‌های آن مطرح شده است(کانسول و فاموی[6] (۱۹۹۶)).

رابطه‌های بازگشتی بین احتمالات $GPED_1$ و $GPED_2$ محاسبه و تعدادی از ویژگی‌هـای مهـم و ساختاری $GPED_1$ که با توجه کردن به ویژگی‌های خانواده لاگرانژ کاتز به دسـت آمـده، بیـان شـده

۱: Janardan
۲: Generalized Polya Eggenberger
۳: Generalized Markov-Polya
۴: Rao
۵: Lagrangian katz
۶: Consul and famoye

است. همچنین پارامترهای $GPED_{۱}$ نیز با روش‌های گشتاورها و درستنمایی ماکسیمم برآورد شده است.

تابع جرم احتمال $GMPD$ عبارت است از:

$$P(X=x)=\frac{ab(a+b+nt)(a+xt)^{(x,c)}(b+(n-x)t)^{(n-x,c)}}{(a+b)(a+xt)(b+(n-x)t)(a+b+nt)^{(n,c)}}\ ;x=۰,۱,...,n \quad (۱-۱-۱)$$

که در آن $a>۰$، $b>۰$، $t\geq ۰$، $t+c\geq ۰$، $m^{(۰,c)}=۱$ و برای مقادیر $x\geq ۱$، $m^{(x,c)}=m(m+c)(m+۲c)...(m+(x-۱)c)$ می‌باشد.

توزیع احتمال (۱-۱-۱) توزیع‌های دیگری را نیز در بر دارد، به عنوان نمونه اگر در توزیع (۱-۱-۱)، $t=۰$ و $c=۰$ قرار دهیم به توزیع دوجمله‌ای و با قرار دادن $t=۰$ و $c=-۱$ به توزیع فوق‌هندسی، در ازاء $t=۰$ و $c=۱$ به توزیع فوق‌هندسی منفی یا دوجمله‌ای بتا[۱]، در ازاء $c=-۱$ به توزیع فوق‌هندسی‌تعمیم یافته یا توزیع فوق‌هندسی‌کوشی[۲] ، در ازاء $c=۱$ به توزیع فوق هندسی‌منفی‌تعمیم‌یافته یا توزیع فوق‌هندسی‌منفی‌کوشی و در ازاء $t=۰$ به توزیع پولیا مارکف می‌رسیم.

ژاناردان (۱۹۷۳) با مطالعه ویژگی‌های $GMPD$ و با محدودکردن آن تحت شرایطی به $GMPD$ محدود شده رسید با تابع جرم احتمال (۱-۱-۲) که او نام این توزیع را توزیع پولیااگنبرگر تعمیم‌یافته ($GPED$) نامید.

$$h(u)=f(z)=(\frac{۱-\beta}{۱-z\beta})^{a/c};z=u\left(\frac{۱-\beta}{۱-z\beta}\right)^{b/c}\quad ;x=۰,۱,... \qquad (۲-۱-۱)$$

که در آن $a>۰$، $c>۰$.، $t+c\geq ۰$ و $۰<\beta<۱$ هست.

ژاناردان و رائو (۱۹۸۲) ویژگی‌هایی از $GMPD$ و $GPED$ را بیان کردند وکروکلیس[۳] (۱۹۸۶) به توصیف $GPED$ بریده شده تحت تغییرات شرط رائو_روبین[۴] پرداخت.

۱: Negative Hypergometric or Beta Binomial
۲: Generalized (or quasi)
۳: Kourouklis
۴: Rao-Rubin

آلزاید[1] (۱۹۸۶)، رائو و شانهاگ[2] (۱۹۹۴) نیز به توصیف استقلال جزئی $GPED$ پرداختند. همچنین آن‌ها نتایجی که ژاناردان و رائو (۱۹۸۲) درباره $GPED$ به دست آورده بودند را اثبات کردند. اگر چه نویسندگانی خانواده $GPED$ را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند، اما ساختار و خصوصیات گشتاوری $GPED$ به صورت منظم مورد مطالعه قرار نگرفته است.

دراین‌جا $GPED$ و گشتاورها، خصوصیات و رابطه بین آن‌ها را به‌طور منظم مورد مطالعه قرار گرفته است. در این پایان نامه $GPED$ نوع اول را با $GPED_1$ نشان داده و بیان می‌کنند که خانواده توزیع لاگرانژ کاتز که توسط کانسول و فاموی (۱۹۹۶) مورد مطالعه قرار گرفته است، یک زیر کلاس از $GPED$ که ژاناردان (۱۹۷۳) آن را مطرح کرده است، می‌باشد. در این‌جا با برابر قرار دادن دو پارامتر خاص از $GPED_1$، تمامی نتایجی که کانسول و فاموی (۱۹۹۶) در رابطه با خانواده لاگرانژ کاتز بیان کردند را به دست می‌آیند.

در این پایان‌نامه $GPED$ نوع دوم $GPED_2$ نیز معرفی و ویژگی‌های آن مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین رابطه‌های بازگشتی بین احتمالات $GPED_1$ و $GPED_2$ جهت کارهای محاسباتی بیان شده است، پارامترهای $GPED_1$ با روش‌های گشتاوری و درستنمایی ماکسیمم برآورد شده‌اند. در این فصل عمدتا از مقاله ژاناردان (۱۹۹۸) استفاده شده است.

۱-۲ خانواده $GPED$ نوع اول

تابع جرم احتمال $GPED_1$ برای $x = 0,1,...$، $a > 0$، $c > 0$، $b + c \geq 0$ و $0 < \beta < 1$ به صورت زیر است:

$$P(X = x) = P(x,a,b,c,\beta)$$

$$= \frac{a/c}{(a+xb/c+x)}\binom{(a+xb)/c+x}{x}\beta^{x}(1-\beta)^{(a+bx)/c} \qquad (۱-۲-۱)$$

$$= J_x(a,b,c)\beta^{x}(1-\beta)^{(a+bx)/c} \qquad (۲-۲-۱)$$

و برای سایر مقادیر x برابر با صفر می‌باشد که در آن

[1]: Alzaid
[2]: Shanbhag

$$J_x(a,b,c)=\frac{a(a+xb)^{(x,c)}}{(a+xb)x!c^x}=\frac{a/c}{((a+xb)/c+x)}\binom{(a+xb)/c+x}{x} \qquad (۱-۲-۳)$$

می‌باشد، پس $X\sim GPED_۱(a,b,c,\beta)$ است، هرگاه تابع جرم احتمال آن به صورت (۱-۲-۱) باشد.

اگر $f(z)$ و $g(z)$ دو تابع از z که دارای مشتق‌های متوالی باشند و $f(۱)=g(۱)=۱$، $g(۰)\neq ۰$ و $۱>f(۰)>۰$ باشد، آنگاه با استفاده از تبدیل $u=\frac{z}{g(z)}$ برای مقادیری از z، در شعاع همگرایی u، $f(z)$ را می‌توان توسط بسط اول لاگرانژ به‌صورت یک سری توانی نسبت به u به صورت زیر به‌دست آورد (جنسن[۱] (۱۹۰۲)).

$$f(z)=f(۰)+\sum_{x=۱}^{\infty}\frac{u^x}{x!}D_z^{x-۱}[(g(z))^x D_z f(z)]_{z=۰} \qquad (۱-۲-۴)$$

که در آن $D_z=\frac{\partial}{\partial z}$ می‌باشد.

اگردر رابطه(۱-۲-۴)، $f(z)=(۱-\beta)^{a/c}(۱-z\beta)^{-a/c}$ و $g(z)=(۱-\beta)^{b/c}(۱-z\beta)^{-b/c}$ را قرار دهیم که در آن $a>۰$، $b>۰$، $b+c\geq ۰$ و $۱>\beta>۰$ هستند، آن‌گاه پس از انجام محاسباتی رابطه زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned}\left(\frac{۱-\beta}{۱-z\beta}\right)^{a/c} &= h(u)\\ &=\sum_{x=۰}^{\infty}u^x\binom{\frac{(a+bx)}{c}+x}{x}\frac{a/c}{((a+bx)/c+x)}\beta^x(۱-\beta)^{(a+bx)/c}\end{aligned} \qquad (۱-۲-۵)$$

چون $\sum_{x=۱}^{\infty}P(x;a,b,c,\beta)=۱$ (زمانی‌که $z=u=۱$ باشد) پس تابع مولد احتمال $GPED_۱$ به صورت (۱-۲-۶) به دست می‌آید:

۱: Jensen

$$h(u)=f(z)=(\frac{1-\beta}{1-z\beta})^{a/c};z=u\left(\frac{1-\beta}{1-z\beta}\right)^{b/c} \qquad (۶-۲-۱)$$

اثبات:

$$f(z)=f(0)+\sum_{x=1}^{\infty}\frac{u^x}{x!}D_z^{x-1}[(g(z))^x D_z f(z)]_{z=0}$$

$$(\frac{1-\beta}{1-z\beta})^{\frac{a}{c}}=(1-\beta)^{\frac{a}{c}}+\sum_{x=1}^{\infty}\frac{u^x}{x!}D_z^{x-1}[(\frac{1-\beta}{1-z\beta})^{\frac{xb}{c}}D_z(\frac{1-\beta}{1-z\beta})^{\frac{a}{c}}]_{z=0}$$

$$=(1-\beta)^{\frac{a}{c}}+\sum_{x=1}^{\infty}\frac{u^x}{x!}D_z^{x-1}[(\frac{1-\beta}{1-z\beta})^{\frac{xb}{c}}\frac{a}{c}\beta(1-\beta)^{\frac{a}{c}}(\frac{1}{1-z\beta})^{\frac{a}{c}+1}]_{z=0}$$

$$=(1-\beta)^{\frac{a}{c}}+\sum_{x=1}^{\infty}\frac{u^x}{x!}\frac{a}{c}\beta(1-\beta)^{\frac{a+bx}{c}}D_z^{x-1}[(\frac{1}{1-z\beta})^{\frac{a+bx}{c}+1}]_{z=0}$$

حال به محاسبه $D_z^{x-1}[(\frac{1}{1-z\beta})^{\frac{a+bx}{c}+1}]$ برای مقادیر مختلف X می‌پردازیم.

برای $x=1$ داریم

$$D_z^{0}[(\frac{1}{1-z\beta})^{\frac{a+bx}{c}+1}]=(\frac{1}{1-z\beta})^{\frac{a+bx}{c}+1}$$

برای $x=2$ داریم

$$D_z^{1}[(\frac{1}{1-z\beta})^{\frac{a+bx}{c}+1}]=\beta(\frac{a+bx}{c}+1)(\frac{1}{1-z\beta})^{\frac{a+bx}{c}+2}$$

برای $x=3$ داریم

$$D_z^{2}[(\frac{1}{1-z\beta})^{\frac{a+bx}{c}+1}]=\beta^2(\frac{a+bx}{c}+1)(\frac{a+bx}{c}+2)(\frac{1}{1-z\beta})^{\frac{a+bx}{c}+3}$$

با ادامه این روند داریم

$$D_z^{x-1}[(\frac{1}{1-z\beta})^{\frac{a+bx}{c}+1}]$$

$$=\beta^{x-1}(\frac{a+bx}{c}+1)(\frac{a+bx}{c}+2)\dots(\frac{a+bx}{c}+(x-1))(\frac{1}{1-z\beta})^{\frac{a+bx}{c}+x}$$

$$=(1-\beta)^{\frac{a}{c}}+\sum_{x=1}^{\infty}u^x\frac{a}{c}\frac{(\frac{a+bx}{c}+1)(\frac{a+bx}{c}+2)\dots(\frac{a+bx}{c}+(x-1))}{x!}\beta^x(1-\beta)^{\frac{a+bx}{c}}$$

$$=(1-\beta)^{\frac{a}{c}}+\sum_{x=1}^{\infty}u^x\frac{\frac{a}{c}}{(\frac{a+bx}{c}+x)}\binom{\frac{a+bx}{c}+x}{x}\beta^x(1-\beta)^{\frac{a+bx}{c}}$$

$$=\sum_{x=0}^{\infty}u^x\frac{\frac{a}{c}}{(\frac{a+bx}{c}+x)}\binom{\frac{a+bx}{c}+x}{x}\beta^x(1-\beta)^{\frac{a+bx}{c}}$$

در سمت راست تساوی آخر تابع چگالی احتمال $GPED_1$ دیده می‌شود و اثبات کامل می‌شود.

تابع مولد احتمال دیگر $GPED_1$ عبارت است از

$$H(u)=f(z)=(1-\beta+z\beta)^{a/c}\ ;z=u(1-\beta+z\beta)^{b/c+1} \qquad (1-2-7)$$

اثبات:

$$f(z)=f(0)+\sum_{x=1}^{\infty}\frac{u^x}{x!}D_z^{x-1}[(g(z))^x D_z f(z)]_{z=0}$$

$$(1-\beta+\beta z)^{\frac{a}{c}}=(1-\beta)^{\frac{a}{c}}+\sum_{x=1}^{\infty}\frac{u^x}{x!}D_z^{x-1}[(1-\beta+\beta z)^{\frac{xb}{c}+x}D_z(1-\beta+\beta z)^{\frac{a}{c}}]_{z=0}$$

$$=(1-\beta)^{\frac{a}{c}}+\sum_{x=1}^{\infty}\frac{u^x}{x!}D_z^{x-1}[(1-\beta+\beta z)^{\frac{xb}{c}+x}\frac{a}{c}\beta(1-\beta+\beta z)^{\frac{a}{c}-1}]_{z=0}$$

$$=(1-\beta)^{\frac{a}{c}}+\sum_{x=1}^{\infty}\frac{u^x}{x!}\frac{a}{c}\beta D_z^{x-1}[(1-\beta+\beta z)^{\frac{a+bx}{c}+x-1}]_{z=0}$$

حال به محاسبه $D_z^{x-1}[(1-\beta+\beta z)^{\frac{a+bx}{c}+x-1}]$ برای مقادیر مختلف X می‌پردازیم.

برای $x=1$ داریم

$$D_z^{0}[(1-\beta+\beta z)^{\frac{a+bx}{c}+x-1}]=(1-\beta+\beta z)^{\frac{a+bx}{c}+x-1}$$

برای $x=2$ داریم

$$D_z^{1}[(1-\beta+\beta z)^{\frac{a+bx}{c}+1}]=\beta(\frac{a+bx}{c}+x-1)[(1-\beta+\beta z)^{\frac{a+bx}{c}}-2$$

برای $x=3$ داریم

$$D_z^{2}[(1-\beta+\beta z)^{\frac{a+bx}{c}+1}]=\beta^{2}(\frac{a+bx}{c}+x-1)(\frac{a+bx}{c}+x-2)\times(1-\beta+\beta z)^{\frac{a+bx}{c}+x-3}$$

با ادامه این روند داریم

$$\begin{aligned}
&D_z^{x-1}[(1-\beta+\beta z)^{\frac{a+bx}{c}+x-1}]\\
&=\beta^{x-1}(\frac{a+bx}{c}+x-1)\ldots(\frac{a+bx}{c}+1))(1-\beta+\beta z)^{\frac{a+bx}{c}}\\
&=(1-\beta)^{\frac{a}{c}}+\sum_{x=1}^{\infty}u^{x}\,\frac{a}{c}\,\frac{(\frac{a+bx}{c}+x-1)(\frac{a+bx}{c}+x-2)\ldots(\frac{a+bx}{c}+1)}{x!}\beta^{x}(1-\beta)^{\frac{a+bx}{c}}\\
&=(1-\beta)^{\frac{a}{c}}+\sum_{x=1}^{\infty}u^{x}\,\frac{\frac{a}{c}}{(\frac{a+bx}{c}+x)}\binom{\frac{a+bx}{c}+x}{x}\beta^{x}(1-\beta)^{\frac{a+bx}{c}}\\
&=\sum_{x=0}^{\infty}u^{x}\,\frac{\frac{a}{c}}{(\frac{a+bx}{c}+x)}\binom{\frac{a+bx}{c}+x}{x}\beta^{x}(1-\beta)^{\frac{a+bx}{c}}
\end{aligned}$$

در سمت راست تساوی آخر تابع چگالی احتمال $\text{GPED}_۱$ دیده می‌شود و اثبات کامل می‌شود.

۱-۲-۱ ویژگی‌های خانواده $\text{GPED}_۱$

ویژگی‌های خانواده $GPED_۱$ به شرح زیر می‌باشد.

۱- اگر در رابطه (۱-۲-۱)، b را برابر با صفر قرار دهیم به توزیع دوجمله‌ای‌منفی با پارامترهای $p=۱-\beta$ و $k=a/c$ می‌رسیم.

$$P(X=x)=\binom{a/c+x-۱}{x}\beta^x(۱-\beta)^{a/c}\quad ;x=۰,۱,... \qquad (۸-۲-۱)$$

۲- اگر در (۱-۲-۱)، $b=۰$ و $c=\beta$ قرار دهیم، به توزیع خانواده کاتز با پارامترهای a و β می‌رسیم.

$$P(X=x)=\binom{a/\beta+x-۱}{x}\beta^x(۱-\beta)^{a/\beta}\quad ;x=۰,۱,... \qquad (۹-۲-۱)$$

۳- اگر در رابطه (۱-۲-۱)، $b=-1$ و $c=1$ قرار دهیم، به توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای a (یک عدد صحیح) و β می‌رسیم.

$$P(X=x)=\binom{a}{x}\beta^x(1-\beta)^{a-x}\quad ;x=0,1,...,a. \qquad (۱۰-۲-۱)$$

۴- اگر در رابطه (۱-۲-۱)، $c=1$ قرار دهیم به توزیع دوجمله‌ای‌منفی‌تعمیم یافته[۱] (GNBD) با پارامترهای a , $\gamma=b+1$ و β می‌رسیم.

$$P(X=x)=\frac{a}{a+x\gamma}\binom{a+x\gamma}{x}\beta^x(1-\beta)^{(a+x\gamma-x)}\quad ;x=0,1,... \qquad (۱۱-۲-۱)$$

۱: Generalized Negative Binomial

این توزیع، عبارت است از تعداد شکست‌های قبل از حصول $(a+bx)$ امین پیروزی در یک دنباله آزمایش‌های مستقل برنولی است که احتمال پیروزی برابر با β است.

۵- با قرار دادن $c=\beta$ در رابطه (۱-۲-۱) به توزیع خانواده لاگرانژ کاتز با پارامترهای a، β و b می‌رسیم.

$$P(X=x) = \frac{a/\beta}{a/\beta+xb/\beta+x}\binom{a/\beta+xb/\beta+x}{x}\beta^x(1-\beta)^{a/\beta+bx/\beta};\ x=0,1,... \quad (۱-۲-۱۲)$$

که در این حالت می‌نویسیم $X \sim LKD(a,b,\beta)$.

در این جا به نتیجه می‌رسیم که خانواده $GPED_1$ یک خانواده غنی از خانواده توزیع‌های گسسته است که تعداد زیادی از توزیع‌های گسسته را شامل می‌شود.

ملاحظه می‌شود که خانواده توزیع لاگرانژ کاتز (فاموی و کنسول (۱۹۹۶)) یک زیر خانواده از $GPED_1$ است (زمانی‌که دو پارامتر c و β در $GPED_1$ برابر باشند) و نتایج زیادی که از LKD با محاسبات و روش‌های طولانی توسط همین مولفین به دست آمده، به راحتی به دست می‌آیند، علاوه بر این اگر در $GPED_1$ پارامتر c به صورت ضرایب صحیح از β $(c=k\beta)$ باشد آن‌گاه $GPED_1$ و LKD با پارامترها $(a/k,b/k,\beta)$ هم‌توزیع می‌شوند.

۶- اگر در $GPED_1$، c را به سمت صفر میل دهیم و $b/a=\alpha$ و $a\beta/c=\theta$ قرار دهیم به توزیع پوآسن تعمیم یافته[1] می‌رسیم:

$$P(X=x)=\theta^x(1+x\alpha)^{x-1}e^{-\theta(1+x\alpha)}\ ;x=0,1,... \quad (۱-۲-۱۳)$$

که در آن $\theta>0$ و $0<\alpha<\theta^{-1}$ است.

۱-۳ خانواده $GPED$ نوع دوم

تابع جرم احتمال $GPED_2$ برای $x=0,1,...$، $a>0$، $b>0$، $b+c\geq 0$ و $0<\beta<1$ به‌صورت (۱-۳-۱) است.

[1]: Generalized Poisson

$$P(X=x)=P^{*}(x;a,b,c,\beta)$$
$$=\frac{(c-c\beta-b\beta)}{c}\binom{\frac{(a+bx)}{c}+x-1}{x}\beta^{x}(1-\beta)^{\frac{a+bx}{c}-1} \qquad (۱-۳-۱)$$

و برای سایر مقادیر x این احتمال برابر با صفر می‌باشد.

قضیه ۱-۳-۱: اگر $X\sim GPED_{2}(a,b,c,\beta)$ باشد، آن‌گاه تابع مولد احتمال آن به صورت زیر است.

$$\psi(u)=\frac{c-c\beta-b\beta}{c-c\beta z-b\beta z}\left(\frac{1-\beta}{1-\beta z}\right)^{\frac{a}{c}-1} \qquad (۲-۳-۱)$$

که $z=u\left(\frac{1-\beta}{1-\beta z}\right)$ می‌باشد که در فصل چهارم به آن می‌پردازیم.

۱-۳-۱ ویژگی‌های خانواده $GPED_{2}$

ویژگی‌های این خانواده عبارت است از:

۱- با قرار دادن $b=0$ در رابطه (۱-۳-۱) به توزیع دوجمله‌ای‌منفی با پارامترهای $k=a/c$ و $p=1-\beta$ می‌رسیم.

$$P(X=x)=\binom{a/c+x-1}{x}\beta^{x}(1-\beta)^{\frac{a}{c}} \quad ;x=0,1,... \qquad (۳-۳-۱)$$

۲- با قرار دادن $b=0$ و $c=\beta$ در رابطه (۱-۳-۱) به توزیع خانواده کاتز با پارامترهای a و β می‌رسیم.

$$P(X=x)=\binom{a/\beta+x-1}{x}\beta^{x}(1-\beta)^{\frac{a}{\beta}} \quad ;x=0,1,... \qquad (۴-۳-۱)$$

۳- با قرار دادن $b=-1$ و $c=1$ در رابطه (۱-۳-۱) به توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای a (یک عدد صحیح) و β می‌رسیم.

$$P(X=x)=\binom{a-۱}{x}\beta^{x}(۱-\beta)^{a-۱-x}\quad ;x=۰,۱,...,a-۱ \qquad (۱-۳-۵)$$

۴- با قرار دادن $c=۱$ در رابطه (۱-۳-۱)، رابطه به صورت زیر ساده می‌شود.

$$P(X=x)=(۱-\beta\gamma)\binom{a+x\gamma}{x}\beta^{x}(۱-\beta)^{(a+x\gamma-x)}\quad ;x=۰,۱,... \qquad (۱-۳-۶)$$

که پارامترها $\alpha=a-۱$ و $\gamma=b+۱$ و β می‌باشد. ژاناردان و رائو (۱۹۹۳) آنرا تابع خطی توزیع دوجمله‌ای منفی خوانده[۱] و به اختصار می‌نویسیم: $X\sim LNBD(\alpha,\gamma,\beta)$.

۵- با قرار دادن $c=\beta$ در رابطه (۱-۳-۱) تابع جرم احتمال زیر به دست می‌آید.

(۱-۳-۷)

$$\begin{aligned}P(X=x)&\\&=(۱-۲\beta)\binom{a/\beta+xb/\beta+x-۱}{x}\beta^{x}(۱-\beta)^{a/\beta+bx/\beta-۱};x=۰,۱,...\end{aligned}$$

که آنرا توزیع لاگرانژ کاتز نوع دوم خوانده و به اختصار می‌نویسیم: $X\sim LKD_۲(a,b,\beta)$.

۱-۴ رابطه‌های بازگشتی بین احتمال‌ها

اگر $X\sim GPED_۱$ باشد، آن‌گاه رابطه زیر بین احتمال‌های $P(x+۱,a,b,c,\beta)$ و $P(x,a+b,b,c,\beta)$ وجود دارد.

$$\frac{P(x+۱,a,b,c,\beta)}{P(x,a+b,b,c,\beta)}=\frac{U+Vx}{۱+x} \qquad (۱-۴-۱)$$

اثبات:

$$P(x+۱,a,b,c,\beta)$$

۱: Linear function negative binomial

$$=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{a+b(x+1)}{c}+x+1}\binom{\frac{a+b(x+1)}{c}+x+1}{x+1}\beta^{x+1}(1-\beta)^{\frac{a+b(x+1)}{c}}$$

$$=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{(a+b)+bx}{c}+x+1}\binom{\frac{(a+b)+bx}{c}+x+1}{x+1}\beta^{x+1}(1-\beta)^{\frac{(a+b)+bx}{c}}$$

$$=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{(a+b)+bx}{c}+x+1}\binom{\frac{(a+b)+bx}{c}+x}{x}\frac{\frac{(a+b)+bx}{c}+x+1}{x+1}\beta^{x+1}(1-\beta)^{\frac{(a+b)+bx}{c}}$$

$$=\frac{\frac{(a+b)+bx}{c}+x}{x+1}\beta\frac{\frac{a}{c}}{\frac{(a+b)+bx}{c}+x}\binom{\frac{(a+b)+bx}{c}+x}{x}\beta^{x}(1-\beta)^{\frac{(a+b)+bx}{c}}$$

$$=\frac{\frac{(a+b)+bx}{c}+x}{x+1}\beta P(x,a+b,b,c,\beta)$$

که $U=\frac{(a+b)}{c}\beta$ و $V=\frac{(b+c)}{c}\beta$ می‌باشد.

برای کارهای محاسباتی، رابطه‌های بازگشتی بین احتمال‌های $GPED_1$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$P_{x+1}=\frac{a+(x+1)b+cx}{(x+1)c}\beta(1-\beta)^{b/c}\prod_{j=1}^{x-1}\left(1+\frac{b}{a+bx+cj}\right)P_x \quad ;x=1,2,... \qquad (۱-۴-۲)$$

که $P_0=a\beta(1-\beta)^{b/c}P_0/c$ و $P_1=a\beta(1-\beta)^{b/c}P_0/c$ می‌باشد.

تذکر ۱-۴-۱: با قرار دادن $\beta=c$ در (۱-۴-۱)، رابطه بازگشتی بین احتمال‌های توزیع خانواده لاگرانژ کاتز (LKD) به دست می‌آید.

به‌طور مشابه اگر $X\sim GPED_2(a,b,c,\beta)$ باشد، آن‌گاه رابطه بازگشتی بین احتمال‌های آن به صورت زیر است:

$$\frac{P^*(x+1;a,b,c,\beta)}{P^*(x;a+b,b,c,\beta)}=\frac{u+vx}{1+x} \qquad (۱-۴-۳)$$

اثبات:

$$
\begin{aligned}
&P^*(x+1,a,b,c,\beta)\\
&=\frac{c-c\beta-b\beta}{c}\binom{\frac{a+b(x+1)}{c}+x}{x+1}\beta^{x+1}(1-\beta)^{\frac{a+b(x+1)}{c}-1}\\
&=\frac{c-c\beta-b\beta}{c}\binom{\frac{(a+b)+bx}{c}+x}{x+1}\beta^{x+1}(1-\beta)^{\frac{(a+b)+bx}{c}-1}\\
&=\frac{c-c\beta-b\beta}{c}\binom{\frac{(a+b)+bx}{c}+x-1}{x}\frac{\frac{(a+b)+bx}{c}+x}{x+1}\beta\beta^{x}(1-\beta)^{\frac{(a+b)+bx}{c}-1}\\
&=\frac{\frac{(a+b)+bx}{c}+x}{x+1}\beta P^*(x,a+b,b,c,\beta)\\
&=\frac{(a+b)+bx+cx}{c(x+1)}\beta P^*(x,a+b,b,c,\beta)
\end{aligned}
$$

که $u=\frac{(a+b)}{c}\beta$ و $v=\frac{(b+c)}{c}\beta$ می‌باشد، و برای کارهای محاسباتی نیز، رابطه بازگشتی بین احتمال‌های $GPED_2$ به صورت زیر است.

$$P^*_{x+1}=\frac{a+(x+1)b+cx}{(x+1)c}\beta(1-\beta)^{b/c}\prod_{j=1}^{x}(1+\frac{b}{a+bx+cj})P^*_x \quad ;x=1,2,... \qquad (۱-۴-۴)$$

که در آن $P^*_0=(c-c\beta-b\beta)\beta/c$ و $P^*_1=(a+b)\beta(1-\beta)^{b/c}P^*_0/c$ می‌باشد.

رابطه بازگشتی بین احتمال‌های $GPED_1$، (۱-۴-۱) و $GPED_2$، (۱-۴-۳) دارای کاربردهای مهمی می‌باشد.

تذکر ۱-۴-۲: با قرار دادن $\beta=c$ در رابطه (۱-۴-۳)، رابطه‌های بازگشتی بین احتمال‌های (LKD_2) به دست می‌آیند.