بسم الله الرحمن
الرحيم

پیوست 3

باسمه تعالی

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
مدیریت تحصیلات تکمیلی

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب **مشکوة پارسا** متعهد می‌شوم کــــه مطالب منـــــدرج در ایـن پایان‌نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آنها استفاده شده است، مطابق مقـــررات ارجاع و در فهرست منـابع و مأخذ ذکر گردیده است. این پایان‌نامه/رساله قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطـح یا بالاتر ارایه نشده است. در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی می‌باشد.

نام ونام‌خانوادگی دانشجو

امضاء

تهران- لویزان کدپستی ۱۶۷۸۸- صندوق پستی ۱۶۳-۱۶۷۸۵ تلفن ۹-۲۲۹۷۰۰۶۰ (داخلی۲۳۱۷) نمابر ۲۲۹۷۰۰۱۱ پست الکترونیکی
sru@sru.ac.ir

دانشکده علوم پایه

یک روش ساخت بازگشتی برای طرح‌های متقارن جدید

نگارش

مشکوة پارسا

استاد راهنما :دکتر فرحبخش کمالی خمسه

استاد مشاور:دکترفرزانه نوروزی لرکی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

دی ماه ۱۳۹۱

بسمه تعالی

شماره: ۱۰۵/۱۴
تاریخ: ۹۲/۱/۳۱
پیوست:

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

صورتجلسهٔ دفاع پایان‌نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد خانم مشکات پارسا رشتهٔ ریاضی‌محض تحت عنوان: یک ساختار بازگشتی برای طرح‌های متقارن جدید،که در تاریخ: ۹۱/۱۱/۱۶ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی برگزار گردید و نتیجه به شرح زیر می باشد.

☐ قبول (بادرجه بسیار خوب امتیاز ۱۸/۲۷) ☐ دفاع مجدد ☐مردود

۱ ـعالی (۲۰ – ۱۹)

۲ ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ – ۱۸)

۳ ـ خوب (۱۷/۹۹ – ۱۶)

۴ ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ – ۱۴)

۵- غیرقابل قبول (کمتر از ۱۴)

اعضاء	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
استاد راهنما	دکتر فرحبخش کمالی خمسه	استادیار	
استاد مشاور	دکتر فرزانه نوروزی‌لرکی	استادیار	
استاد داور داخلی	دکتر منیره اکبری	استادیار	
استاد داور خارجی	دکتر بهروز طایفه رضایی	دانشیار	
نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر مهدی سعادت	استادیار	مهدی سعادت

دکتر ایوب اسماعیل‌پور
رئیس دانشکده علوم‌پایه

تهران، لویزان، کد پستی: ۱۶۷۸۸-۱۵۸۱۱
صندوق پستی: ۱۶۳-۱۶۷۸۵
تلفن: ۹-۲۲۹۷۰۰۶۰ فکس: ۲۲۹۷۰۰۳۳
Email:sru@sru.ac.ir
www.srttu.edu

تقدیم به ساحت مقدّس آقا امام زمان (عجّ)

از خداوند متعال می خواهم چنانچه این پایان نامه

مورد استفاده ی شخص یا اشخاصی قرار گرفت

ثواب آن برسد به روح مادر عزیزم

انشا ء ا...

تقدیر و تشکّر

در اینجا لازم می دانم مراتب تشکّر و قدر دانی خود را

از استاد بزرگوار و عزیزم خانم دکتر کمالی به جا آورم

که با زحمات بی دریغ خویش و با سعه ی صدر مرا در

این پایان نامه مورد راهنمایی های ارزشمندشان قرار دادند.

چکیده

در این پایان نامه نشان خواهیم داد ، چنانچه یک ماتریس وزنی تعمیم یافته و یا به اختصار یک BGW با پارامتر های $\left(\frac{q^{m+1}-1}{q-1}, q^m, q^m - q^{m-1}\right)$ روی یک گروه ضربی G داشته باشیم ، به طوری که $q = (2h-1)^2$ توانی از یک عدد اول و m یک عدد صحیح مثبت باشد، همچنین با فرض $h = \pm 3^n$، و وجود یک ماتریس آدامار منظم با حاصل جمع سطری $2h$، و طرح های بلوکی متقارن با پارامتر های $(4h^2, 2h^2-h, h^2-h)$، طرح هایی متقارن با پارامتر ها ی زیرخواهیم داشت.

$$\left(4h^2 \, {(q^{m+1}-1)}\big/{q-1}, (2h^2-h)q^m, (h^2-h)q^m\right)$$

واژه های کلیدی:

ماتریس های آدامار منظم، طرح های متقارن، ماتریس های وزنی تعمیم یافته.

فهرست مطالب

فهرست جداول

پیش گفتار

در این پایان نامه ، با استفاده از ماتریس های آدامار منظم و ماتریس های وزنی تعمیم یافته، با ایجاد شرایط لازم که به آن اشاره خواهد شد ، به ازای $h = \pm 3^n$ ، که n یک عدد صحیح غیر منفی است، به ازای هرعددصحیح مثبت m، طرح های بلوکی متقارن با پارامترهای زیر تولید خواهیم کرد .

ماتریس های آدامار منظم، ماتریس های مربعی متعامد(ماتریسی که سطرها وستون های آن دو به دو بر هم عمودند) با درایه های ۱+ و ۱− ، هستند به طوری که حاصل جمع هرسطر و هر ستون آن ها مقداری ثابت و یکسان است. همچنین ماتریس های وزنی تعمیم یافته، ماتریس های مربعی متعامد، با درایه های از مجموعه ی $\bar{G} = G \cup \{0\}$ (G یک گروه ضربی دلخواه است) هستند، به طوری که هر سطر و هر ستون آن ها دارای یک تعداد ثابت و یکسان عنصر غیر صفر باشند که این تعداد ثابت را وزن ماتریس می نامیم.

طر ح های بلوکی متقارن با پارامتر های (v, k, λ) که در آن ها v, k, λ اعداد صحیح و مثبت هستند و آن ها را به صورت زوج $D = (V, \mathcal{B})$ ، نمایش می دهیم نیز خانواده ای است متشکل از زیر مجموعه های k عضوی به نام بلوک ها، از یک مجموعه ی v عضوی V ، با عنوان مجموعه ی نقاط، و با شرط $k < v$ (که این خانواده از زیر مجموعه ها را با $\mathcal{B}$ نشان می دهیم) به طوری که هر ۲ عضو متمایز از مجموعه ی V ، دقیقا در λ بلوک ظاهر شود.

این حکم قبلا برای $h = \pm 2^t$ و $h = \pm 3$ در [۵] توسط آیونین[1]، و برای همه ی h های زوج که یک ماتریس آدامار با حاصل جمع سطری $\pm 2h$ وجود دارد ، توسط خرقانی[2] ، در [9]و[10] و برای $h = \pm 5$ و $h = \pm 9$ در [7] و[8] به وسیله ی خرقانی، جانکو[3] و تونچیو[4] به اثبات رسیده است .
هدف اصلی ما در این پایان نامه اثبات وجود چنین طرح هایی به ازای $h = \pm 3^n$ می باشد که به صورت یک حدس توسط آیونین – خرقانی در [۲] ارائه شده است.

[1] Ionin
[2] Kharaghani
[3] Janko
[4] Tonchev

برای رسیدن به نتیجه نهایی ابتدا لازم است با مفاهیم مطرح شده از قبیل ماتریس های آدامار و طرح های بلوکی بیشتر آشنا شویم که در فصل اول به معرفی آنها پرداخته ایم . در فصل دوم نیز با ماتریس های وزنی تعمیم یافته و گروه تقارن ها ، که از ابزار اصلی ساخت ما در این پایان نامه هستند، و همچنین قضیه و نتایج مهمی که ما را در رسیدن به هدفمان یاری می کنند، آشنا می شویم و در فصل پایانی با یک روش ساخت بازگشتی، که توسط آیونین در[۲] ارائه شده است، ماتریس ه‌ای آدامار منظم ساخته و با معرفی یک گروه تقارن های دوری و رجوع به قضایای ذکر شده در فصل های دوم و سوم ، طرح های بلوکی متقارن با پارامتر های فوق خواهیم ساخت و در انتهای فصل سوم به اثبات حدس آیونین- خرقانی خواهیم پرداخت. این حدس بیان می دارد :

با فرض $h \neq 0$ و $h = \pm 3^n$ و $q = (2h-1)^2$ ، اگر q توانی از یک عدد اول باشد، در این صورت برای هر عدد صحیح مثبت m، طرح هایی متقارن با پارامتر های زیر وجود دارد .

فصل اول:
تعاریف و قضایا

مقدمه

ماتریس های آدامار ابتدا در قرن ۱۹ و در سال ۱۸٦۷ توسط سیلوستر[5] مورد مطالعه قرار گرفت، سپس در سال ۱۸۹۳ توسط آدامار[6] نتایج مهمی در همین زمینه به دست آمد. این ماتریس ها در بسیاری از موارد از جمله ساخت طرح های بلوکی متقارن نقش مهمی را ایفا می کنند . برای آشنایی بیشتر با این ماتریس ها به معرفی دقیق تر آنها می پردازیم. مطالب این بخش از [1] و [6] آورده شده است.

۱-۱: ماتریس های آدامار

تعریف ۱-۱-۱: یک ماتریس مربعی $m \times m$ ، H با درایه های از مجموعه ی $\{1، -1\}$ را یک ماتریس آدامار مرتبه ی m گوییم هر گاه $HH^{\mathrm{t}} = mI$ ،که در آن I ماتریس همانی و H^{t} ترانهاده H است.

مثال ۱-۱-۱ : $H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس آدامار از مرتبه ی۲ وهمچنین ماتریس

$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ماتریسی آدامار از مرتبه ی ٤ است.

مثال۱-۱-۲ : قرار می دهیم $H_0 = [1]$ و به ازای هر $n \geq 1$ ، $H_n = \begin{bmatrix} H_{n-1} & H_{n-1} \\ H_{n-1} & -H_{n-1} \end{bmatrix}$ به سادگی دیده می شود که به ازای هر n ، H_n یک ماتریس آدامار از مرتبه ی 2^n است.

اگر H یک ماتریس آدامار از مرتبه ی n باشد، به سادگی می توان مشاهده نمود ماتریس حاصل از ضرب هر سطر یا هر ستون آن در ۱- نیز ،یک ماتریس آدامار از مرتبه ی n است. پس می توان با ضرب بعضی از سطرها و ستون های H در ۱- (در صورت نیاز) ماتریس آداماری از مرتبه ی n به دست آورد به طوری که، همه ی درایه های اولین سطر و ستون آن برابر ۱+ باشد.

---

[5] Sylvester
[6] Hadamard

تعریف ۱–۱–۲ : ماتریس آدامار با درایه های ۱+ در اولین سطر و ستون را ماتریس آدامار نرمال می نامیم.

مثال 1-1-3 : از ضرب ستون سوم و چهارم ماتریس ماتریس H_2 در مثال ۱-۱-۱ماتریس آدامار نرمال زیر به دست می آید.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس زیر نیز یک ماتریس آدامار نرمال از مرتبه ی 2^3 یعنی از مرتبه ی ۸ است.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

لازم است در همین ابتدای کار، با یک قضیه ی مهم در مورد ماتریس های آدامار آشنا شویم.

قضیه 1-1-1: اگر یک ماتریس آدامار از مرتبه ی $m \geq 2$ وجود داشته باشد آنگاه $m = 2$ یا m مضربی از ٤ است.

برهان : فرض کنیم H یک ماتریس آدامار از مرتبه m باشد. می دانیم که می توان آن را به یک ماتریس آدامار نرمال تبدیل کرد. پس تمام درایه های سطر اول آن ۱+ می شوند. اما چون سطر ها دوبه دو بر هم عمودند، پس باید سطر دوم این ماتریس دارای تعداد یکسان ۱+ و ۱− باشد، بنابراین تعداد $\frac{m}{2}$ درایه های این سطر ۱+ وتعداد $\frac{m}{2}$ درایه ها ۱− هستند، لذا m زوج است، پس $m = 2$ یا $m = 2k$ ، که $k \geq 2$. حال بدون اینکه خللی در کلیت مسئله ایجاد شود، می توانیم فرض کنیم سطر های اول و دوم ماتریس H به صورت زیر هستند:

$$1\,1\,1\ .\ .\ .\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1 .\ .\ .\ \ .\ .\ .\ 1$$
$$1\,1\,1\ .\ .\ .\ 1-1-1-1 .\ .\ .\ .-1$$

اگر در سطر سوم تعداد درایه های ۱+ موجود در نیمه اول و نیمه دوم را به ترتیب s و r در نظر بگیریم، در این صورت $\frac{m}{2}-s$ از نیمه ی اول و $\frac{m}{2}-r$ از نیمه ی دوم ۱- خواهند بود. اکنون از این خاصیت که سطر های ماتریس آداماردوبه دو بر هم عمودند استفاده کرده و یک بارحاصل ضرب سطر های اول و سوم ویک بار هم حاصل ضرب سطر های دوم و سوم را برابر صفر قرار می دهیم بنابراین خواهیم داشت:

$$r-\left(\frac{m}{2}-r\right)+s-\left(\frac{m}{2}-s\right)=0 \quad \text{و} \quad r-\left(\frac{m}{2}-r\right)-s+\left(\frac{m}{2}-s\right)=0$$

واز این دو رابطه خواهیم داشت $r+s=\frac{m}{2}$ و $2r-2s=0$ و لذا $r=s=\frac{m}{4}$

بنابراین مرتبه ی ماتریس به صورت $m=4r=4s$ در می آید. پس m برابر ۲ یا مضربی از ٤ است. ■

حدس زده می شود که :

حدس آدامار : به ازای هر n ، که n مضربی از ٤ است، یک ماتریس آدامار از مرتبه ی n وجود دارد.

تلاش های زیادی برای اثبات حدس آدامار صورت گرفته که منجر به نتایج جالبی در این زمینه شده است. برای مطالعه ی بیشتر در این زمینه می توان به [۱] و [۳] مراجعه نمود .

از آن جا که در این پایان نامه، به رده ی خاصی از ماتریس های آدامار، که ماتریس های آد امار منظم نامیده می شوند نیاز داریم، به معرفی آن ها می پردازیم.

تعریف 1-1-2 : ماتریس آدامار H از مرتبه ی n را منظم گوییم، هر گاه همه ی سطرها و ستون های آن دارای حاصل جمع ثابت ویکسان باشند. به عبارت بهتر، اگر H یک ماتریس آدامار منظم باشد، آنگاه $HJ=JH=tJ$ ، که در آن t یک عدد صحیح و J ماتریس تماما ۱ از مرتبه ی n است.

مثال 1-1-4 : ماتریس زیر یک ماتریس آدامار منظم از مرتبه ی ٤ است.

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

همانطوری که مشاهده می کنیم حاصل جمع همه ی سطر ها و ستون های H برابر ۲ است، پس طبق رابطه ای که برای ماتریس های آدامار منظم بیان کردیم خواهیم داشت:

$HJ = JH = tJ = 2J$ پس $t = 2$.

در رابطه ی فوق، t را حاصل جمع سطری H می نامیم و در سراسر این پایان نامه، حاصل جمع سطری هر ماتریس H را با $r(H)$ نشان می دهیم. همچنین حاصل جمع همه ی درایه های ماتریس H را با $s(H)$ نمایش می دهیم.

قضیه 2-1-1 : برای هر ماتریس آدامار منظم H از مرتبه ی n ، n مربع کامل است و حاصل جمع سطری H برابر $\pm\sqrt{n}$ است.

برهان : بنا به تعریف ماتریس های آدامار و ماتریس های آدامار منظم دو رابطه ی زیر برقرار است.

$$(1) \qquad (HH^t)J = (nI)J = nJ \quad \text{و}$$

$$(2) \qquad (HH^t)J = H(H^tJ) = H(JH)^t = H(tJ)^t = (HJ)t = t^2J ،$$

طبق روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت $nJ = t^2J$ ، لذا داریم $n = t^2$. بنابراین n مربع کامل است و حاصل جمع سطری H نیز برابر است با $r(H) = t = \pm\sqrt{n}$. ■

قضیه۱–۱–۳: ماتریس آدامار H از مرتبه ی n منظم است اگر و فقط اگر $s(H) = \pm n^{3/2}$

برهان: ابتدا فرض کنیم $s(H) = \pm n^{3/2}$. می دانیم در هر ماتریس آدامار H از مرتبه ی n ، سطر ها و ستون ها دوبه دو بر هم عمودند. همچنین می دانیم حاصل ضرب هر سطر در خودش و هر ستون در خودش برابر مرتبه ی ماتریس، یعنی n ، خواهد شد. حال اگر حاصل جمع درایه های ستون i ام ($i = 1،2، \dots ،n$) از ماتریس H را، برابر $s_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}$ در نظر بگیریم ، داریم :

$$n^2 = n + n + \cdots + n = n \times n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{ik} \qquad (*)$$

اما می دانیم به ازای هر $i، j = 1,2, \dots n$ ، داریم $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \begin{cases} n & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ ،

لذا طبق مطالب ذکر شده، در رابطه ی $(*)$ خواهیم داشت $n^2 = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} a_{ik})^2$

لذا داریم $n^2 = \sum_{k=1}^{n} {s_k}^2$ $(**)$. اما طبق نامساوی کوشی شوارتز می دانیم

اگر $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ و $y = (y_1, y_2, \dots y_n)$ آنگاه $x.y \leq |x|.|y|$. حال اگر قرار دهیم $x = (x_1, x_2, \dots x_n) = (1,1, \dots ,1)$ و $y = (y_1, y_2, \dots y_n) = (s_1, \dots , s_n)$ ، در این صورت $S(H) = n^{3/2} = \sum_{k=1}^{n}(1.s_k) \leq (n\sum_{k=1}^{n} {s_k}^2)^{1/2}$. لذا با به توان ۲ رساندن دو طرف نامساوی فوق و طبق $(**)$ داریم :

$$n^3 = (\sum_{k=1}^{n} s_k)^2 \leq n\sum_{k=1}^{n} s_k^2 = n \times n^2 = n^3$$

همان طوری که می بینیم دو طرف نامساوی با هم برابر شده اند. طبق نامساوی کوشی شوارتز تساوی فقط و فقط زمانی برقرار است که بردارهای x و y ، وابسته ی خطی باشند. یعنی $x = \lambda y$ لذا اینجا نیز به دلیل برقراری تساوی باید داشته باشیم $1 = \lambda s_1$ و ... و $1 = \lambda s_n$. یعنی داریم :

$$s_1 = s_2 = \cdots = s_n$$

پس حاصل جمع همه ی ستون های H با هم برابرند. اما می دانیم ترانهاده ی هر ماتریس آدامار نیز یک ماتریس آدامار است. لذا حاصل جمع همه ی سطر ها ی H^t نیز با هم برابرند. لذا ماتریس های H و H^t ، ماتریس های آدامار منظم هستند.

اکنون فرض کنیم ماتریس آدامار H از مرتبه ی n ، منظم است . پس طبق قضیه ی ۱-۱-۲ داریم $r(H) = \pm\sqrt{n}$ ، لذا حاصل جمع همه ی درایه های ماتریس H برابر است با

$$s(H) = n \times r(H) = \pm n\sqrt{n} = \pm n^{3/2} \qquad \blacksquare$$

روش هایی برای به دست آوردن یک ماتریس آدامار جدید با استفاده از ضرب دو ماتریس آدامار وجود دارد که در فصل دوم با آن ها آشنا خواهیم شد.

۱-۲: طرح های بلوکی

مطالعات جدید از طرح های بلوکی مطابق آنچه که اغلب گفته اند با چاپ یک مقاله در سال ۱۹۳٦ به وسیله ی شخصی به نام ییتس [۷] شروع شد. او در مقاله اش خانواده ای از زیر مجموعه های یک مجموعه با خاصیت های تعادل معین را در نظر گرفت .در این بخش با این طرح ها و طرح های متقارن و ویژگی های آن ها آشنا می شویم. مطالب این بخش از مرجع [1] آورده شده است.

تعریف ۱-۲-۱: فرض کنید v ، k و λ اعداد صحیح مثبت باشند و $k < v$. یک طرح بلوکی متعادل ناکامل با پارامتر های (v, k, λ) و یا به اختصار یک $BIBD$ ، که آن را به صورت زوج $D = (V, \mathcal{B})$ نمایش می دهیم، خانواده ای از زیر مجموعه های k عضوی (بلوک ها) از یک مجموعه ی v عضوی V (مجموعه ی نقاط) است به طوری که، هر زوج متمایز از عناصر V با هم دقیقا در λ بلوک ظاهر شوند. چون در این طرح ها داریم $k < v$ ، آن ها را ناکامل یا غیر بدیهی می نامیم.

مثال ۱-۲-۱ : فرض کنیم $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ مجموعه ی نقاط باشد. می توانیم بلوک ها را به صورت زیر در نظر بگیریم :

$$\mathrm{B}_1 = \{a, b, c\} \quad , \quad \mathrm{B}_2 = \{a, b, d\} \quad , \quad \mathrm{B}_3 = \{a, c, e\} \quad , \quad \mathrm{B}_4 = \{a, d, f\}$$
$$\mathrm{B}_5 = \{a, e, f\} \quad , \quad \mathrm{B}_6 = \{b, c, f\} \quad , \quad \mathrm{B}_7 = \{b, d, e\} \quad , \quad \mathrm{B}_8 = \{b, e, f\}$$
$$\mathrm{B}_9 = \{c, d, e\} \quad , \quad \mathrm{B}_{10} = \{c, d, f\}$$

همان طوری که مشاهده می کنید، همه ی بلوک ها ۳ عضوی هستند و هر زوج عناصرمتمایز با هم در بلوک ها درست ۲ بار ظاهر شده اند . پس V همراه با خانواده ی $\{\mathrm{B}_1، \mathrm{B}_2، \dots ،\mathrm{B}_{10}\}$ یک طرح بلوکی متعادل ناکامل با پارامتر های (۲ , ۳ , ٦) خواهد بود.

تذکر ۱-۲-۱ : در هر طرح بلوکی متعادل ناکامل $D = (V, \mathcal{B})$ ، تعداد بلوک ها را b و تعداد ظهور هر شیئ یا هر عنصر $x \in V$ در بلوک ها را، $r(x)$ در نظر می گیریم. در قضیه ی زیر خواهیم دید که این تعداد در مورد تمام عناصر مجموعه ی V یکسان است. بنا بر این می توانیم آن را با r نمایش دهیم. لذا پارامتر ها را در هر طرح بلوکی به صورت (v, b, k, r, λ) نیز

---

[۷] Yeyts

می توانیم در نظر بگیریم و از این به بعد هر طرح بلوکی متعادل ناکامل را به اختصار طرح بلوکی می گوییم.

قضیه ۱-۲-۱ : اگر یک طرح بلوکی با پارامتر های $(v\ ,b\ \ ,k\ ,\ \ r\ \ ,\lambda)$ داشته باشیم آنگاه

(الف) : $\lambda(v-1)=r(k-1)$

(ب) : $bk\ =vr$

برهان : اثبات قسمت الف :

اگر مجموعه ی V را مجموعه ی نقاط و مجموعه ی $\mathcal{B}$ را خانواده ای از بلوک ها مانند B در نظر بگیریم و داشته باشیم $x_0 \epsilon\ V$ ، در این صورت برای اثبات قسمت الف مجموعه ی زیر را به دو روش می شماریم.

$$A=\left\{(x_0,y)\ \middle|\ \ y\neq x_0 \ \text{و}\ \ \exists\ B\ \epsilon\ \mathcal{B}\ \ :\ \ x_0,y\ \epsilon B\right\}$$

روش اول : فرض کنید که x_0 در r بلوک و در هر بلوک با $k-1$ عنصر ظاهر شده است، لذا داریم : $|A|=r(k-1)$.

روش دوم : می دانیم x_0 با هر یک از عناصر $V-\{x_0\}$ ، λ بار همزمان ظاهر شده است. بنابراین تعداد اعضای مجموعه ی A ، یعنی $|A|$ برابر خواهد بود با $|A|=\lambda(v-1)$.

لذا $r(k-1)=\lambda(v-1)$. پس همان طوری که می بینیم r به انتخاب x_0 بستگی ندارد، لذا برای همه ی عناصر مجموعه ی V یکسان است.

و اما اثبات قسمت ب :

برای این منظور نیز تعداد اعضای مجموعه ی زیر را به دو روش شمارش می کنیم.

$$\acute{A}=\{(x\ ,B)\ |x\ \epsilon\ V\ ,\ \ B\ \epsilon\ \mathcal{B}\ \ \ ,\ \ \ x\epsilon B\}$$

روش اول : به ازای هر $x\ \epsilon\ V$ قرار می دهیم $B_x=\{(x\ ,B)\ |\ x\ \epsilon\ B\}$ در این صورت $|B_x|=r$. زیرا از قبل می دانیم تعداد ظهور هر عنصر از مجموعه ی V در بلوک ها برابر r است.

می توانیم $\acute{A}$ را به صورت $\acute{A} = \bigcup_{x \in V} B_x$ در نظر بگیریم که در آن مجموعه های B_x که $x \in V$ ، دوبه دو مجزا هستند. چون تعداد عناصر موجود در مجموعه ی V برابر v و تعداد B_x ها برابر r است پس تعداد اعضای $\acute{A}$ برابر است با $|\acute{A}| = v.r$.

روش دوم : این بار مجموعه ی X_B را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$X_B = \{(x, B) \mid x \in B\}$$

در این حالت تعداد عناصر موجود در هر بلوک مد نظر است که از قبل می دانیم این تعداد برابر k است، لذا خواهیم داشت: $|X_B| = k$ برای هر B . حال می توانیم مجموعه ی $\acute{A}$ را به صورت $\acute{A} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} X_B$ در نظر بگیریم که مجموعه های X_B ، $B \in \mathcal{B}$ دوبه دو مجزا هستند . لذا این بار مجموعه ی $\acute{A}$ را به صورت $|\acute{A}| = b.k$ شمارش می کنیم. پس حکم قسمت ب نیز برقرار است و داریم $b.k = v.r$ ■

نتایج مهمی که از قضیه ی قبل بدست می آید، شرایط لازم زیر را برای وجود یک طرح بلوکی با پارامتر های (v, b, k, r, λ) بیان می کند.

نتیجه : اگر یک طرح بلوکی با پارامتر های (v, b, k, r, λ) وجود داشته باشد آنگاه :

۱) $(k-1)|\lambda(v-1)$ ، زیرا r یک عدد صحیح است.

۲) $k|v.r$ ، زیرا b نیز یک عدد صحیح است.

مثال ۱-۲-۲ : هیچ طرح بلوکی با پارامتر های (۱۱،۶،۲) وجود ندارد زیرا طبق قضیه ی ۱.۲.۱داریم $r = 4$ و بنا به نتایج بعد از قضیه باید $5 = (k-1)|\lambda(v-1) = 2 \times 10$ ، و $6 =$ $k|v.r = 11 \times 4$ ، همان طوری که مشاهده می کنیم این شرط برقرار نیست، لذا طرح بلوکی با پارامتر های (۱۱،۶،۲) وجود ندارد.

شرط هایی که در نتیجه بیان شدند شرط های لازم هستند، اما کافی نیستند . یعنی اگر در طرحی روابط فوق بین پارامتر ها ی v،b،k،r و λ برقرار باشد دلیلی بر وجود آن طرح بلوکی نیست.

به عنوان مثال برای پارامتر های $(16,6,1)$ داریم : $5 = k-1|\lambda(v-1) = 15$ و چون $r = 3$ لذا داریم : $6 = k|vr = 16 \times 3$.