بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
ریاضی‌محض-جبر

مباحثی در گروه‌های $B(۴, k)$

استاد راهنما: دکتر محمّدعلی ایرانمنش

استاد مشاور: پروفسور بیژن دواز

پژوهش و نگارش: سمیّه قلندر

اسفند ماه ۱۳۹۲

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

تحفه ی ناچیز ذهن کوچکم را

به بلندای بی کران وجودتان پیش کش می کنم.

باسپاس

حمد و سپاس خدایی را که افتخار نگارش ذره‌ای از دریای بی‌منتهای دانشش را نصیب این بنده‌ی حقیر کرد.

بر حسب وظیفه و به مصداق «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق» تشکر و قدردانی می‌نمایم

از خانواده‌ی عزیزم، به ویژه دو گوهر گرانبهای زندگیم، پدر و مادر عزیزم . . . این دو معلم بزرگوارم . . . که همواره بر کوتاهی و درشتی من قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده‌اند و حضورشان آرامش و امید زیستنم بوده است،

از استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر محمّدعلی ایرانمنش که در کمال سعه‌ی صدر از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند، از استاد مشاورم، جناب آقای دکتر بیژن دواز به خاطر راهنمایی‌های سودمندشان و هم چنین از جناب آقای دکتر محمدرضا هوشمند اصل (داور خارجی) و جناب آقای دکتر سعید علیخانی (داور داخلی) که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند و از تمام کسانی که مرا آموختند، حتی به یک کلام یا یک نگاه.

چکیده

در این پایان‌نامه، خاصیت کمترین مربع روی مجموعه‌های k عضوی $(1 < k \in \mathbb{Z})$ و همچنین گروه $B(n, k)$ تعریف شده است. گروه‌های $DS(2)$ اخیرا توسط فریمن مورد مطالعه قرار گرفت و گروه‌های $DS(3)$ توسط برکویچ، فریمن و پرگر مورد مطالعه قرارگرفته است.

گروه‌های $B(2, k)$ و $B(3, k)$ به‌طور کامل مورد بررسی قرار گرفته است. هم اکنون به بررسی ساختار گروه‌های $B(4, k)$، $(11 \leq k \leq 13)$ می‌پردازیم و توصیف کاملی از گروه‌های $B(4, 13)$ که ۲-گروه نیستند و گروه‌های $B(4, 12)$ و گروه‌های $B(4, 11)$ به‌دست می‌آوریم و نشان می‌دهیم گروه‌های $B(4, 13)$ غیر آبلی نابدیهی که ۲-گروه نیستند، دقیقا ۲ تا هستند و گروه G یک گروه $B(4, 12)$ غیر آبلی نابدیهی است اگر و تنها اگر ۲-گروه همیلتونی از مرتبه‌ی حداقل ۱۶ است و نشان می‌دهیم یکی از سه گروه غیر آبلی از مرتبه ۱۲، یک گروه $B(4, 11)$ است.

فهرست مطالب

فهرست نمادها

$x^{-1}ax$	a^x
$a^{-1}x^{-1}ax$	$[a,x]$
زیرگروه تولیدشده به‌وسیله‌ی a	$< a >$
زیرگروه فراتینی G	$\phi(G)$
شاخص H در G	$[G:H]$
مرتبه‌ی G	$\|G\|$
مرکز G	$Z(G)$
مرکزساز H در G	$C_G(H)$
گروه خارج قسمتی G روی H	G/H
گروه دو وجهی ازمرتبه‌ی n	D_n
گروه کواترنیون از مرتبه‌ی n	Q_n
گروه همیلتونی ازمرتبه‌ی 2^{m+2}	H_m
همدسته‌ی چپ H در G	aH
همدسته‌ی راست H در G	Ha

پیشگفتار

مفهوم $DS(k)$ نخستین بار در سال ۱۹۹۱، توسط برکویچ، فریمن و پرگر ارائه شد [۴]. خاصیت کمترین مربع روی گروه‌های متناهی توسط برکویچ، فریمن و پرگر معرفی شد. $DS(۲)$ توسط فریمن [۶] در سال ۱۹۷۳ مورد مطالعه قرار گرفت. فریمن [۷] در سال ۱۹۸۱ ثابت کرد گروه‌های متعلق به $DS(۲)$ گروه‌های ددکیند هستند. گروه‌های $DS(۳)$ توسط برکویچ، فریمن و پرگر [۴] در سال ۱۹۹۱مورد مطالعه قرار گرفت.همچنین گروه‌های $B(۲, k)$ و $B(۳, k)$ توسط برکویچ، فریمن و پرگر بررسی شد.گروه‌های $B(۴, ۱۰)$ توسط پارمنتر [۱۰] در سال ۲۰۰۲ بررسی شد. پارمنتر ثابت کرد گروه G یک گروه $B(۴, ۱۰)$است اگر و تنها اگر یک گروه بدیهی است.

هدف اصلی در این پایان‌نامه، بررسی ویژگی‌هایی از گروه‌های $B(۴, k)$ است. طبیعی است، اولین چیزی که به ذهن خطور می‌کند، بررسی روی n و k به ازای اعداد کوچک است. گروه‌های $B(۲, k)$ و $B(۳, k)$ مورد مطالعه قرار گرفتند.

در فصل اول، به منظور یادآوری، به بیان مفاهیمی چند از نظریه‌ی گروه‌ها ومفاهیم مورد نیازکه در این پایان‌نامه به کار می‌رود، می‌پردازیم.

در فصل دوم، به بررسی خاصیت کمترین مربع روی مجموعه‌های k- عضوی می‌پردازیم. در ابتدا مربع‌های جابجایی و غیرجابجایی روی مجموعه‌های دوعضوی را بررسی می‌کنیم که در کل ۴ حالت هستند و با محاسبه‌ی گروه‌های نظیر دیده می‌شود که در این حالت تنها گروه‌های ددِکیند هستند، یعنی گروه‌های مشمول در $DS(۲)$ تنها گروه‌های ددِکیند هستند.

پس از آن به بررسی مربع‌های جابجایی روی مجموعه‌های سه‌عضوی پرداخته و تمام گروه‌های نظیر به آن‌ها را نیز تعیین می‌کنیم. مربع‌های غیرجابجایی نیز به طور مشابه قابل بررسی هستند که به دلیل طولانی شدن بحث و مشابه بودن روند انجام محاسبات، از ذکر مجدد آن‌ها خودداری می‌کنیم.

در فصل سوم، با توجه به اطلاعات بدست آمده، به بررسی گروه‌های $B(۴, ۱۳)$، $B(۴, ۱۲)$ و $B(۴, ۱۱)$ خواهیم پرداخت.

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

مقدمه

در این فصل ابتدا به بیان برخی تعاریف و قضایا از نظریه‌ی گروه‌ها پرداخته می‌شود، سپس مفاهیم مفاهیم مورد نیاز در فصل‌های ۲ و ۳ بیان خواهد شد.

۱.۱ مقدمه‌ای بر نظریه‌ی گروه‌ها

تعریف ۱.۱.۱ گروه G یک p- گروه است هرگاه مرتبه‌ی هر عضو غیر همانی G، توانی از عدد اول p است،به عنوان مثال گروه چهارتایی کلاین یک ۲-گروه است.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید p عددی اول است. در این صورت زیر گروه H از G را یک p-زیر گروه گوییم هرگاه H یک p -گروه باشد.

قضیه ۳.۱.۱ (قضیه کوشی برای گروه‌های متناهی). فرض کنید p عددی اول است که مرتبه‌ی گروه متناهی G را می‌شمارد. در این صورت G حداقل یک عضو از مرتبه p دارد [۱].

قضیه ۴.۱.۱ یک گروه متناهی، یک p -گروه است اگر و فقط اگر مرتبه‌ی آن توانی از p باشد.

اثبات. فرض کنید $|G| = p^n$ و x عضو دلخواه G است.در این صورت $|x| \setminus p^n$ و در نتیجه برای $\circ \leqslant k \leqslant n$، داریم $|x| = p^k$. حال فرض کنید G یک p -گروه متناهی است.ثابت می‌کنیم $|G| = p^n$. فرض کنید q عددی اول است به طوری که $q \setminus |G|$، چون $q \setminus |G|$، بنابر قضیه کوشی برای گروه‌های متناهی، $x \in G$ وجود دارد به طوری که $|x| = q$ و چون G یک p-گروه است پس $|x| = p^k$ و در نتیجه $q = p$ و $|x| = p^n$. □

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید G یک گروه متناهی و p عددی اول است به‌طوری که $|G| = p^n m$ و $(m,n) = ۱$.در این صورت هر زیر گروه از مرتبه‌ی p^n از G یک p-زیر گروه سیلوی G نامیده می‌شود.

گروه متناوب A_4،دارای مرتبه‌ی ۱۲است و هر زیر گروه مرتبه‌ی ۴ از این گروه یک ۲-زیرگروه سیلو است به عنوان مثال مجموعه‌ی ، $\{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ زیرگروه A_4 از مرتبه‌ی ۴ و یک ۲-زیرگروه سیلو است [۱].

تعریف ۶.۱.۱ گروه آبلی مقدماتی گروه آبلی متناهی است که هر عضو غیربدیهی آن از مرتبه‌ی عدد اول p است.

به عنوان مثال گروه چهارتایی کلاین یک گروه آبلی مقدماتی است.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید G یک گروه $a, b \in G$، در این صورت $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ را جابه‌جاگر a و b می‌نامیم.

تعریف ۸.۱.۱

۱. دنباله‌ی $\{e\} = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \ldots \leqslant G_n = G$ را یک سری نرمال گوییم هرگاه به ازای هر $0 \leqslant i \leqslant n$ داشته باشیم $G_i \lhd G$.

۲. سری نرمال $\{e\} = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \ldots \leqslant G_n = G$ دارای یک سری مرکزی است هرگاه $\frac{G_i}{G_{i-1}} \leqslant Z(\frac{G}{G_{i-1}})$.

۳. گروه G پوچ‌توان است هرگاه سری نرمال $\{e\} = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \ldots \leqslant G_n = G$ دارای یک سری مرکزی باشد. یا به عبارت دیگر $\frac{G_i}{G_{i-1}} \leqslant Z(\frac{G}{G_{i-1}})$.

به عنوان مثال، هر p -گروه متناهی نابدیهی و هرگروه آبلی پوچ توان هستند [۱].

قضیه ۹.۱.۱ فرض کنید G یک گروه پوچ توان و $H \leq G$. در این صورت H پوچ توان است [۱].

قضیه ۱۰.۱.۱ فرض کنید G یک گروه پوچ توان است و M زیرگروه ماکسیمالی از G است. دراین صورت M در G نرمال است [۱].

نکته ۱۱.۱.۱ رده پوچ‌توانی گروه G برابر کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت n است به‌طوری‌که گروه G دارای سری مرکزی از طول n باشد (طول سری مرکزی برابر n است، هرگاه $n+1$ زیرگروه متمایز «با زیرگروه بدیهی و خود گروه» در سری وجود داشته باشد).

۲.۱ مفاهیم مورد نیاز

تعریف ۱.۲.۱ G را یک گروه تناوبی نامیم، هرگاه هر عضو آن از مرتبه‌ی متناهی باشد.

به عنوان مثال، همه‌ی گروه‌های متناهی، تناوبی هستند.

نکته ۲.۲.۱ نمای گروه تناوبی G، در صورت وجود، برابر کوچک‌ترین مضرب مشترک مرتبه‌های اعضای G است. (علت این‌که در تعریف می‌گوییم "در صورت وجود" این است که لزوماً گروه متناهی نیست و مرتبه‌ی اعضا لزوماً یکسان نیستند و با توجه به این‌که مجموعه‌ی اعداد اول نامتناهی است، از این‌رو ممکن است کوچک‌ترین مضرب مشترک مرتبه‌های اعضا تعریف نشده باشد).

نمای گروه G با نماد $\exp G$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنید G یک گروه و k عدد صحیحی بزرگ‌تر ازیک است، یعنی $1 < k \in \mathbb{Z}$. در این‌صورت گروه G در خاصیت کمترین مربع روی k- مجموعه‌ها (مجموعه‌های k عضوی) صدق می‌کند، اگر برای هر زیرمجموعه‌ی k-عضوی از گروه G مانند K داشته باشیم $|K^2| < k^2$. در این حالت گوییم $G \in DS(k)$.

مثال:هرگروه آبلی در خاصیت کمترین مربع روی k- مجموعه‌ها (مجموعه‌های k عضوی) صدق می‌کند.

تعریف ۴.۲.۱ (مربع لاتین) آرایه‌ی مربعی $n \times n$، متشکل از n نماد متمایز یک مربع لاتین با اندازه‌ی n نامیده می‌شود اگر در هر سطر و ستون هر نماد فقط و فقط یک بار ظاهر شود.

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنید $E = \{a, b\}$ زیرمجموعه‌ی دو عضوی از یک گروه است. در مجموعه‌ی E^2 حداکثر چهار عضو a^2، ab، ba و b^2 وجود دارد و جدول ضرب آن به‌صورت زیر است:

$*$	a	b
a	a^2	ab
b	ba	b^2

چنین جدولی یک مربع نامیده می‌شود.

اعضای مربع (جدول ضرب نظیر به یک زیرمجموعه از گروه) را با حروف بزرگ نشان می‌دهیم. اگر در جدول ضرب، حاصل‌ضرب‌های برابر را با حروف یکسان و حاصل‌ضرب‌های نابرابر را با حروف متمایز نشان دهیم یک مربع لاتین به‌دست می‌آید. در این‌جا اصطلاح مربع لاتین را در حالت تعمیم یافته‌ای استفاده می‌کنیم. در این حالت، مربع لاتین یک ماتریس مربعی است که در آن اعضای هر سطر (و هر ستون) متفاوت‌اند.

نکته ۶.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{U}$ و$\mathcal{B}$ مربع‌های لاتین هم‌مرتبه هستند. هم‌چنین فرض کنید θ نگاشتی یک به یک از اعضای موجود در $\mathcal{U}$ به روی اعضای موجود در $\mathcal{B}$ است، یعنی θ نگاشتی دوسویی است. با اثر نگاشت θ روی $\mathcal{U}$، مربع لاتین جدید $\theta[\mathcal{U}]$ به‌دست می‌آید. اگر $\mathcal{B}$ توسط جایگشتی از سطرهای $\theta[\mathcal{U}]$ و جایگشتی مشابه از ستون‌های $\theta[\mathcal{U}]$ به‌دست آید، آن‌گاه $\mathcal{U}$ و $\mathcal{B}$ را یکریخت می‌نامیم.

مجموعه‌ی اعضای (درایه‌های) یک مربع می‌توانند به روش زیر مرتب شوند (در واقع ترتیب قراردادن تک تک حروف را در موقعیت‌های مربع مشخص می‌کند).

$$\begin{matrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{matrix}$$

اعضای مربع را با حروف لاتین نشان می‌دهیم و ترتیب الفبایی آن را بر ترتیب ذکر شده در بالا منطبق می‌کنیم، یعنی همان ترتیب لغت‌نامه‌ای (واژگان‌نگاری). به عنوان مثال می‌توان مربع زیر را در نظر گرفت (که در آن در سطر اول ترتیب کاملاً رعایت شده و در سایر سطر، حروف با توجه به رعایت ترتیب الفبایی و همچنین با توجه به اینکه در هر سطر و ستون هر حرف حداکثر یک بار ظاهر می‌شود، قرار می‌گیرند. در نظر گرفته می‌شود و حرف اول آن‌ها مرتب می‌شود).

$$\begin{matrix} A & B & C \\ B & C & A \\ D & E & B \end{matrix}$$

اما مربع زیر را نمی‌توان مربعی با ترتیب ذکر شده در نظر گرفت.

$$
\begin{array}{ccc}
B & A & C \\
- & - & - \\
- & - & -
\end{array}
$$

تعریف ۷.۲.۱ می‌گوییم دو عضو (یک زوج) نه لزوماً متمایز Y و Z نسبت به عضو X از قطر اصلی قرار گرفته‌اند، اگر

۱. X و Y در یک ستون باشند.

۲. Y و Z در موقعیت متقارنی نسبت به قطر اصلی قرار نداشته باشند، یعنی

$$
\begin{array}{ccc}
- & Y & - \\
- & X & Z \\
- & - & -
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
X & - & Z \\
Y & - & - \\
- & - & -
\end{array}
$$

هر عضو قطری دارای دو عضو (یک زوج) است که نسبت به آن قرار داده شده است.

تعریف ۸.۲.۱ به ازای $x, y \in G$ گوییم y، $< x >$ را نرمال می‌کند هرگاه

$$y^{-1} < x > y = < x > .$$

تعریف ۹.۲.۱ گروه G که هر زیرگروه آن نرمال است را گروه دِدِکیند می‌نامیم.

به عنوان مثال همه‌ی گروه‌های آبلی، گروه‌های دِدِکیند هستند. گروه دِدِکیند غیرآبلی را یک گروه همیلتونی می‌نامیم. معروف‌ترین مثال از یک گروه همیلتونی، گروه کواترنیونی از مرتبه‌ی ۸ است که با $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ نشان داده می‌شود.

لم ۱۰.۲.۱ فرض کنید G یک گروه ددکیند غیرآبلی است. در این صورت $G = Q_8 \times E \times A$ که در آن E یک ۲-گروه آبلی مقدماتی، A یک گروه آبلی مرتبه‌ی فرد و Q_8 گروه کواترنیون ازمرتبه‌ی ۸ است [۳].

تعریف ۱۱.۲.۱ زیرگروه فراتینی گروه G که با $\phi(G)$ نشان داده می‌شود، برابر اشتراک همه‌ی زیرگروه‌های ماکسیمال گروه G است. برای حالتی که گروه G هیچ زیرگروه ماکسیمالی ندارد، به عنوان مثال حالتی که $G = \{e\}$، قرار می‌دهیم $\phi(G) = G$

لم ۱۲.۲.۱ اگر G گروهی متناهی باشد، آن‌گاه $\phi(G)$ پوچ‌توان است. هم‌چنین اگر G یک p -گروه متناهی باشد، آن‌گاه زیرگروه فراتینی آن، کوچک‌ترین زیرگروه نرمال (نسبت به شمول) در گروه G است [۲].

تعریف ۱۳.۲.۱ گروه G یک $B(n,k)$ -گروه نامیده می‌شود، هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ی متناهی n عضوی A از گروه، داشته باشیم $|A^۲| \leqslant k$ ؛ که در آن n و k اعداد صحیح مثبت هستند و $k \leqslant n^۲ - ۱$.

مثال: $D_{۱۴}$ یک گروه $B(۴,۱۳)$ است.

تعریف ۱۴.۲.۱ فرض کنید G یک گروه $B(۴,۱۳)$ غیر آبلی نابدیهی که ۲− گروه نیست و دارای ۲− زیر گروه سیلوی P و ۲− مکمل نرمال T است. گوییم هر عضو $b \in P$، T را مرکزی می‌کند،هرگاه به ازای هر $a \in T$ داشته باشیم $ab = ba$ و همچنین هر عضو $b \in P$، T را وارون می‌کند هرگاه به ازای هر $a \in T$ داشته باشیم $a^b = a^{-۱}$.

قضیه ۱۵.۲.۱ (قضیه‌ی ۹.۱.۹). فرض کنید هر زیرگروه ماکسیمال از گروه متناهی G پوچ توان است اما G پوچ توان نباشد.در این صورت

۱. G حل پذیر است.

۲. $|G| = p^u q^v$. که p و q اعداد اول متمایز هستند.

۳. p -زیرگروه سیلو یکتای P و q-زیرگروه سیلوی Q دوری است. بنابراین $G = QP$ و $P \lhd G$.[۱۱]

فصل ۲

زیرمجموعه‌های دو عضوی و سه عضوی گروه‌ها

مقدمه

در این فصل به توصیفی از زیرمجموعه‌های دوعضوی و سه‌عضوی در گروه‌ها می‌پردازیم، در واقع هدف اصلی از این فصل یافتن گروه‌هایی است که به ازای عدد صحیح k، و هر زیرمجموعه‌ی K عضوی از گروه، $|K^۲| < k^۲$. چنین ویژگی را خاصیت کمترین مربع روی زیرمجموعه‌های kعضوی (k-مجموعه‌ها) گروه تعریف می‌کنیم و آن را با نماد $DS(k)$ نشان می‌دهیم، که در ادامه به بررسی خاصیت کمترین مربع روی مجموعه‌های سه‌عضوی، ۲-گروه متناهی G از نمای ۴، خواهیم پرداخت.

ابتدا در بخش اول، برای شروع مبحث فصل و آشنایی بیشتر با این مفهوم، به ذکر زیرمجموعه‌ای دوعضوی و سه‌عضوی از گروه دلخواه G پرداخته و با استفاده از عمل گروه G جدول ضرب (مربع‌های نظیر به زیرمجموعه‌های مذکور) آن‌ها را تشکیل می‌دهیم. تاحدودی در این قسمت گروه‌هایی را که دارای خاصیت مطلوب ما هستند مشخص می‌کنیم.

۱.۲ مربع‌های نظیر به زیرمجموعه‌های دوعضوی و سه‌عضوی گروه‌ها

لم ۱.۱.۲ برای زیرمجموعه‌های دوعضوی از گروه‌ها، تنها چهار نوع ممکن برای جدول ضرب به‌صورت زیر موجود است.

۱		۲		۳		۴	
A	B	A	B	A	B	A	B
B	A	B	C	C	A	C	D

اثبات. در واقع منظور از این چهار حالت ممکن، تمام مربع‌های متقارن و نامتقارنی است که در آن‌ها اولاً هر حرف در هر سطر و هر ستون حداکثر یکبار ظاهر می‌شود، ثانیاً چون مربع‌ها ۲ × ۲ هستند، چهار انتخاب برای حروف وجود دارد (بدون کاستن از کلیت، حروف انتخابی را از همان حرف A شروع به انتخاب می‌کنیم) و چون سطرها نیز برحسب ترتیب لغت‌نامه‌ای (واژگان‌نگاری) مرتب شده‌اند، به طور ثابت در همه‌ی آن‌ها سطر اول ثابت است، یعنی سطر اول برابر $A \quad B$ است و درواقع از دو حرف استفاده شده است.

از طرفی این را نیز در نظر می‌گیریم که ترتیب پرکردن یک مربع برحسب موقعیت‌های اعضا (درایه‌های) مربع به‌صورت زیر است.

$$\begin{array}{cc} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{array}$$

از این‌رو زمان پرکردن موقعیت سوم در مربع تنها سه حالت انتخاب از حروف یعنی همان حروف اولیه‌ی A، B و C موجود است.

چون مرتب کردن برحسب ترتیب لغت‌نامه‌ای است و در سطر و ستون هر حرف حداکثر یکبار ظاهر می‌شود، پس از بین چهار حرف، امکان انتخاب سه حرف B، C و D برای درایه‌ی موجود در موقعیت سوم از این مربع وجود دارد. حال با در نظر گرفتن این دو مطلب در می‌یابیم که تنها حالات ممکن انتخاب حرف برای موقعیت سوم در این مربع به ترتیب الفبایی حروف B و C است و این یعنی تا این‌جا داریم

ب	الف
$\begin{array}{cc} A & B \\ C & - \end{array}$	$\begin{array}{cc} A & B \\ B & - \end{array}$

حال برای پرکردن موقعیت چهارم در این مربع‌ها نیز، برحسب دو حالت ذکر شده در بالا بررسی می‌نماییم.

اگر حالت اول باشد، یعنی حرف B برای موقعیت سوم انتخاب شود، در این‌صورت هنوز از بین چهار حرف اولیه تنها دو حرف استفاده شده است و با توجه به همان مطلب بالا برای انتخاب حرف موجود در موقعیت چهارمِ مربع تنها مجاز به انتخاب حرف از بین حروف A، B و C هستیم.

هم‌چنین با توجه به این‌که حرف B در سطر و ستون دوم ظاهر شده است، تنها حالات ممکن برای این مربع به ترتیب لغت‌نامه‌ای به‌صورت زیر است.

۱	۲
$\begin{matrix} A & B \\ B & A \end{matrix}$	$\begin{matrix} A & B \\ B & C \end{matrix}$

حال به بررسی حالت دوم، یعنی هنگامی که در موقعیت سومِ مربع از حرف جدید $C(\neq A, B)$ استفاده شده است، می‌پردازیم. در این حالت در موقعیت چهارم مربع حالات مجاز برای انتخاب، هر چهار حرف A، B، C و D است و مجدداً چون حروف B و C در سطر و ستون به کار رفته است، تنها حالات ممکن با توجه به ترتیب لغت‌نامه‌ای به‌صورت زیر است.

۳	۴
$\begin{matrix} A & B \\ C & A \end{matrix}$	$\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$

پس با توجه به مطالب ذکر شده، تمام حالات ممکن مربع‌ها (جدول ضرب‌ها)، همان چهار نوع ذکر شده است. $\square$

تعداد مربع‌های موجود از هر چهار نوع بالا در یک گروه متناهی G را به ترتیب با P_1، P_2، P_3 و P_4 نشان می‌دهیم. هم‌چنین فرض کنید $P_{ij} = P_i + P_j$ که در آن $i \neq j$ و $1 \leqslant i, j \leqslant 4$. P

قضیه ۲.۱.۲ اگر $P_4 = 0$، آن‌گاه $G = Q_8 \times E$، که در آن Q_8 یک گروه کواترنیونی است و نمای E برابر ۲ است، یعنی $\exp E = 2$ (G گروهی ناآبلی فرض می‌شود).

اثبات. فرض کنید x و y اعضایی غیرجابجایی از G هستند، یعنی $xy \neq yx$. در این‌صورت با توجه به چهار نوع جدول ضرب ذکر شده، تنها دو حالت ۳ و ۴ امکان‌پذیر است. هم‌چنین با توجه به این‌که طبق فرض قضیه $P_4 = 0$، پس تنها حالت ممکن حالت ۳ است و با توجه به ساختار مربع، این یعنی $x^2 = y^2$. گروه خارج‌قسمتی $< x, y >/< x^2 >$ را در نظر می‌گیریم. این گروه توسط $x < x^2 >$ و $y < x^2 >= y < y^2 >$ تولید شده است. بنابراین گروه خارج‌قسمتی، آبلی از نوع $(2, 2)$ است و یا یک گروه دووجهی است.

در حالت اول y، $< x >$ را نرمال می‌کند. حال فرض کنید $< x, y >/< x^{۲} >$ یک گروه دووجهی است. در این‌صورت در این گروه، مربعی از نوع ۴ وجود دارد. بنابراین زوجی از اعضا در G موجود است که مربع آن‌ها از نوع ۴ است و این با فرض $P_{۴} = ۰$ در تناقض است.

بنابراین اگر $xy \neq yx$ باشد، آن‌گاه y، $< x >$ را نرمال می‌کند. این مطلب به طور مشابه برای حالت $xy = yx$ ثابت می‌شود. از این‌رو، هر زیرگروه دوری، در G نرمال است. در این‌صورت هر زیرگروه G نیز نرمال است، یعنی G یک گروه ددکیند است و بنا به لم ۱۰.۲.۱. [۳]، $G = Q_{۸} \times E \times A$ که $Q_{۸}$ و E دارای شرایط قضیه بوده و A گروه آبلی تناوبی است که همه‌ی اعضایش از مرتبه‌ی فرد هستند. فرض کنید $Q_{۸} =< u, v >$ که در آن u و v از مرتبه‌ی ۴ هستند. فرض کنید $A \neq ۱$ و هم‌چنین فرض کنید $A \ni a \neq ۱$. در این‌صورت au و v مربعی از نوع ۴ تولید می‌کنند، که تناقض است. بنابراین $A = ۱$ و حکم ثابت می‌شود. $\square$

۱.۱.۲ مربع‌های متقارن نظیر به زیرمجموعه‌های سه‌عضویِ گروه‌ها

این بخش و بخش بعد از آن توصیفی از همه‌ی انواع مجموعه‌های سه عضوی در گروه‌ها را شامل می‌شود. فرم مربع‌ها که نشان دهنده‌ی جدول‌های ضرب برای یک مجموعه‌ی داده شده از اعضای یک گروه است، بستگی به مرتبه‌ی اعضای داده شده دارد.

در این بخش حالت ساده‌تر مربع‌های متقارن برای زیرمجموعه‌های سه‌عضوی را طبق روند زیر بررسی می‌کنیم:

ابتدا همه‌ی مربع‌های جابجایی‌پذیر(ماتریس‌های متقارن) را به‌دست می‌آوریم (صرف‌نظر از این‌که این مربع‌ها می‌توانند در یک گروه نشانده شوند یا نه). پس از آن مجموعه‌ی مربع‌ها را با همان ترتیب واژگان‌نگاری (لغت‌نامه‌ای) مرتب می‌کنیم و بعد از آن نمونه‌ی گروه‌هایی را تعیین می‌کنیم که این فرم نمایش مربع‌ها در آن نشانده می‌شود.

یادآوری می‌کنیم که در ترتیب واژگان‌نگاری برای مجموعه‌ی مربع‌ها، سطر اول هر مربع به ترتیب الفبایی مرتب شده و ثابت است و در سطرهای دیگرِ هر مربع، صرفاً ترتیب حرف‌های اول هر سطر باید رعایت شود. ولی در ترتیب مربع‌ها نسبت به یکدیگر، حرف‌های سطرها در موقعیت‌های نظیر