دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی‌ارشد (M.Sc.)

گرایش: تحقیق در عملیات

عنوان:

تخمین بازده به مقیاس در DEA نادقیق

استاد راهنما:
دکتر قاسم توحیدی

استاد مشاور:
دکتر مسعود صانعی

نگارش:
سید اسماعیل میرعماد

زمستان ۱۳۹۰

تقدیم به:

روح پاک پدرم

که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم،

و به روان پاک برادرم

« شهید سید ابوالفضل میرعماد »

و همه‌ی شهدای گرانقدر این مرز و بوم.

تشکر و قدردانی

با سپاس و تقدیر و تشکر از زحمات بی‌شاعبهٔ جناب آقای دکتر قاسم توحیدی ، که در این پایان‌نامه در سمت استاد راهنما در تمامی مراحل همگام بودند و ضمن تشکر از جناب آقای دکتر مسعود صانعی به عنوان استاد مشاور و جناب آقای دکتر مهدی طلوع که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند. از خداوند متعال موفقیت‌های برتری را با چنین اساتیدی، خواستارم. در خاتمه از مادر بزرگوار و برادران دلسوزم که مساعدت، تشویق و زحمات ایشان در راه پیشرفت من کارساز بوده نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

فهرست مطالب

فهرست اشکال

فصل اول

مقدمه‌ای بر تحلیل پوششی داده‌ها

۱-۱ مقدمه

مساله ارزیابی عملکرد واحدها ازگذشته مورد توجه بوده است که برخورد علمی با این مطلب از اواخر جنگ جهانی دوم شروع وگسترش یافت. چون هر تصمیم‌گیری فوری بدون به‌کارگیری روش‌های علمی با مشکل مواجه می‌شد، به همین دلیل اولین گروه از دانشمندان برای تصمیم‌گیری در مورد مساله‌های جنگی، تصمیماتی را اتخاذ کردند. امروزه نیز با توجه به مشکلاتی از جمله محدود بودن واحدها در رابطه با تصمیم‌گیری‌های مناسب و . . .، بدون استفاده از راهکارهای علمی نتیجه‌ای برای بهره‌وری[1] بهتر حاصل نمی‌شود. با توجه به این مشکلات به منظور به‌کارگیری روش‌های علمی، تابعی

1) Productivity

به نام تابع تولید[1] جهت ارزیابی عملکرد واحدها بنا نهاده شد.

۱-۲ تابع تولید

تابع تولید تابعی است که برای هر ترکیب از ورودی‌ها ماکزیمم خروجی را بدهد. اما گاهی به دلیل چند مقداره بودن این تابع و مشکلاتی دیگر مجبوریم از تقریب آن به جای خود تابع استفاده کنیم. شناخت تابع تولید یکی از موضوعات مهم علم اقتصاد است. در این صورت رابطه‌ی عملکرد با عوامل تاثیرگذار تابعی است، که به تابع تولید معروف است و به صورت $\mathbf{y} = f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ تعریف می‌شود، که در آن بردار ورودی $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ خروجی $\mathbf{y}$ را تولید می‌کند. بردار ورودی از دو قسمت تشکیل شده است، $\mathbf{u}$ عوامل قابل کنترل و $\mathbf{v}$ عوامل غیرقابل کنترل هستند. f تابع تولید است که از ترکیب ورودی‌ها ماکزیمم خروجی را تولید می‌نماید. به عبارت دیگر اگر مقدار خروجی را با $\mathbf{y}$ نشان دهیم و ورودی‌ها را با $\mathbf{x}_1$،$\mathbf{x}_2$، ...،$\mathbf{x}_{m-1}$ و $\mathbf{x}_m$ نشان دهیم تابع تولید را می‌توان به صورت $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m)$ در نظر گرفت. در این تابع $\mathbf{y}$ حداکثر خروجی است که می‌توان با استفاده از ترکیب عوامل $\mathbf{x}_1$،$\mathbf{x}_2$، ...،$\mathbf{x}_{m-1}$ و $\mathbf{x}_m$ تولید نمود. محاسبه این تابع در حالت کلی دشوار است، بنابراین از تقریب آن استفاده می‌کنیم. این تقریب به دو صورت **پارامتری** و **غیرپارامتری** است.

۱-۲-۱ روش پارامتری

این روش، بسیار قدیمی است و می‌توان گفت تا سال ۱۹۵۷ که فارل[2] [۱۷] روش غیرپارامتری را پیشنهاد نمود از این روش استفاده می‌شد. در روش پارامتری شکل خاصی از یک تابع را برای تخمین تابع تولید درنظر می‌گیرند و با استفاده از روش‌های ریاضی پارامترهای تابع را مشخص می‌کنند که اصطلاحاً به آن «روش برازش منحنی[3]» نیز گفته می‌شود. در این روش ساده‌ترین تقریب به صورت تابع خطی است که شامل پارامترهایی است. روش‌هایی برای محاسبه این پارامترها وجود دارند که عبارتند از:

۱) مینیمم نمودن مجموع قدر مطلق انحرافات،

1) Production function 2) Farrell 3) Curve fitting

۲) مینیمم نمودن مجموع مربعات انحرافات،

۳) مینیمم نمودن ماکزیمم انحرافات است.

یکی از روش‌های پارامتری، روش کاب ـ داگلاس[1] است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_{۰} A_{۱}^{\mathbf{x}_{۱}} A_{۲}^{\mathbf{x}_{۲}} \dots A_{n}^{\mathbf{x}_{n}} \tag{۱-۱}$$

$A_{۱}$،$A_{۲}$،...،$A_{n-۱}$ و A_n ورودی‌ها و $\mathbf{y}$ خروجی و $\mathbf{x}_{۰}$،$\mathbf{x}_{۱}$،...،$\mathbf{x}_{n-۱}$ و $\mathbf{x}_n$ پارامترهای آن می‌باشند. هم‌چنین فرض می‌کنیم $\mathbf{y}_j$ خروجی مشاهده شده‌ی واحد jام و A_{ij} به ازای $i = ۱, ۲, \dots, m$ ، ورودی iام واحد jام است. اکنون با بیان مدل برنامه‌ریزی خطی زیر و حل آن پارامترهای این تابع تولید را تخمین می‌زنیم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=۱}^{n} \left[\mathbf{x}_{۰} + \sum_{i=۱}^{m} \mathbf{x}_i \mathbf{a}_{ij} - \mathbf{q}_j \right] \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x}_{۰} + \sum_{i=۱}^{m} \mathbf{x}_i \mathbf{a}_{ij} - \mathbf{q}_j \geqslant ۰, \qquad j = ۱, \dots, n \end{aligned} \tag{۲-۱}$$

که در آن $\mathbf{x}_{۰} = lnA_{۰}$ ، $\mathbf{a}_{ij} = lnA_{ij}$ و $\mathbf{q}_j = ln\mathbf{y}_j$ است. کارایی این تابع برای واحد jام به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\mathbf{y}_j}{\mathbf{y}_j^*} \leqslant ۱$$

که در آن $\mathbf{y}_j^*$ مقدار خروجی بهینه است.

۱-۲-۲ روش غیرپارامتری

سوال‌ها و ایرادات اساسی در زمینه منحنی برازش وجود داشتند که با روش پارامتری قابل پاسخگویی نبودند. لذا فارل [۱۷] در سال ۱۹۵۷ روش غیرپارامتری را مطرح کرد. یکی از روش‌های غیرپارامتری، روش تحلیل پوششی داده‌ها [2] (DEA) است. این روش، تکنیکی را برای محاسبه کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیری[3] (DMUs)فراهم می‌کند (کلمهٔ نسبی به دلیل مقایسه واحدها با یکدیگر است). با استفاده از مجموعه امکان تولیدی که فارل در این روش مطرح کرده بود، مدل‌هایی مانند

1) Cobb-Douglas 2) Data Envelopment Analysis 3) Desigen Making Units

4) Charnes Cooper Rhodes

CCR[۴] و در ادامه مدل‌هایی مثل BCC[۱] و ...برای محاسبه‌ی کارایی واحدها معرفی شدند. که به دلیل بسط و گستردگی مدل‌ها و حجم زیاد مطالب در این مقدمه تنها به مدل‌های CCR، BCC و مدل جمعی[۲] اشاره خواهیم کرد. برای آشنایی بیشتر با روند پیشرفت و انواع مدل‌های DEA طی ۳۰ سال اخیر به مرجع [۸] رجوع کنید. قبل از معرفی این مدل‌ها ابتدا به چند مفهوم مهم اشاره کوتاهی می‌کنیم.

اگر واحد تصمیم‌گیری دارای یک ورودی و یک خروجی باشد، نسبت خروجی به ورودی میزان، **کارایی مطلق**[۳] آن واحد (DMU) را نشان می‌دهد.

حال اگر واحد تصمیم‌گیری دارای m ورودی و s خروجی باشد و قیمت خروجی‌ها و هزینه ورودی‌ها مشخص باشند، نسبت مجموع وزنی خروجی‌ها به مجموع وزنی ورودی‌ها میزان **کارایی اقتصادی** را نشان می‌دهد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Eff(\text{واحد } j\text{ام}) = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \tag{۱-۳}$$

که x_{ij} ورودی iام و v_i وزن ورودی iام در واحد jام و y_{rj} خروجی rام و u_r وزن خروجی rام در واحد jام است. در ارزیابی بعضی از واحدها هزینه ورودی و قیمت خروجی، مشخص نیست و یکی از اهداف اصلی DEA، پیدا کردن همین وزن‌ها و تعیین کارایی است. بنابراین بحث ورودی و خروجی مجازی مطرح می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{ورودی مجازی} &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{x}_j \\ \text{خروجی مجازی} &= \lambda_1 \mathbf{y}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{y}_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{y}_j \end{aligned} \tag{۱-۴}$$

که $\lambda_j \geqslant 0 \, (j = 1, \ldots, n)$.

اکنون در این بخش برای بیان تعریف کارایی نسبی[۴] یک DMU لازم است ابتدا تعریف زیر را بیان کنیم.

1) Banker Charnes Cooper 2) Additive model 3) Absolute efficiency 4) Relative efficiency

تعریف ۱ بردار $\mathbf{x}$ غالب بر بردار $\mathbf{y}$ است اگر و فقط اگر $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}$ و $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. در این صورت بردار $\mathbf{y}$ به وسیله‌ی بردار $\mathbf{x}$ مغلوب گردیده است.

تعریف ۲ DMU_p (واحد تصمیم‌گیری pام) با بردار ورودی $\mathbf{x}_p$ و خروجی $\mathbf{y}_p$ را **کارای نسبی** گویند اگر $(-\mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p)$ به وسیله‌ی هیچ زوج مرتبی مانند $(-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{x}_j, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{y}_j)$ مغلوب نشود.

برای محاسبه‌ی میزان کارایی نسبی هر واحد باید کارایی مطلق آن واحد را بر ماکزیمم کارایی مطلق از بین دیگر واحدها تقسیم کرد.

۱-۲-۳ مجموعه امکان تولید (PPS)

همان طوری که در روش غیرپارامتری ذکر شد به دلیل‌های مختلف، تابع تولید به راحتی محاسبه نمی‌گردد و در بعضی مواقع به دست آوردن صورت تحلیلی آن غیرممکن است. از این رو مجموعه‌ای به نام مجموعه امکان تولید[1] می‌سازیم و مرز آن را تقریبی از تابع تولید در نظر می‌گیریم تا کارایی نسبی مجموعه مشاهدات را به ما بدهد. مجموعه امکان تولید به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) | \text{بردار نامنفی } \mathbf{x} \text{ بتواند بردار نامنفی } \mathbf{y} \text{ را تولید کند}\}$$

حال برای مشخص کردن مجموعه‌ی T ابتدا فرض می‌کنیم که در هر بردار ورودی و خروجی حداقل یک مؤلفه مثبت وجود دارد. حال مجموعه‌ی T را طوری در نظر می‌گیریم که در اصول زیر صدق نماید.

۱) اصل شمول مشاهدات: این اصل بیان می‌دارد که تمامی مشاهدات به مجموعه امکان تولید T تعلق دارند. یعنی:

$$(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j) \in T \qquad j = 1, \ldots, n$$

۲)اصل بیکرانی اشعه یا بازده به مقیاس ثابت: تکنولوژی تولید بازده به مقیاس ثابت دارد یعنی تغییرات خروجی به تغییرات ورودی ثابت است:

$$((\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in T, \lambda \geqslant 0) \Longrightarrow (\lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) \in T$$

1) Production Possebility Set

۳)اصل تحدب: T مجموعه‌ای محدب و بسته است. یعنی:

$$((\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1)\in T,(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_2)\in T, 0\leqslant\lambda\leqslant 1)\Longrightarrow(\lambda(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1)+(1-\lambda)(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_2))\in T$$

۴)اصل امکان‌پذیری: این اصل دلالت بر این دارد که اگر $\mathbf{x}$، $\mathbf{y}$ را تولید کند، هر ورودی بزرگتر یا مساوی از $\mathbf{x}$ نیز می‌تواند ، خروجی کمتر یا مساوی از $\mathbf{y}$ را تولید می‌کند. یعنی:

$$((\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}})\in T,\forall\mathbf{x}\quad \mathbf{x}\geq\bar{\mathbf{x}},\forall\mathbf{y}\quad \mathbf{y}\leq\bar{\mathbf{y}})\Longrightarrow(\mathbf{x},\mathbf{y})\in T$$

۵)اصل کمینه درون‌یابی: اگر مجموعه امکان تولید T' در اصول ۱ تا ۴ برقرار باشد، آنگاه $T\subseteq T'$. به عبارت دیگر T کوچکترین مجموعه‌ای است که در اصول ۱ تا ۴ صدق می‌کند.

اصول پنج گانه فوق، مجموعه‌ی منحصربه‌فرد T_c را به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$T_c=\left\{(\mathbf{x},\mathbf{y})|\mathbf{x}\geqslant\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\mathbf{x}_j,\mathbf{y}\leqslant\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\mathbf{y}_j,\lambda_j\geqslant 0, j=1,\ldots,n\right\}$$

برای آشنایی بیشتر با مجموعه امکان تولید به مرجع [۱] رجوع کنید.

مدل‌های DEA به صورت مدل‌های شعاعی و غیر شعاعی هستند. در مدل‌های شعاعی وقتی کارایی واحد ارزیابی موردنظر برابر ۱ باشد گویند DMU مربوطه به مفهوم شعاعی کارا است. کارایی در این مدل‌ها ممکن است ضعیف یا قوی باشد. وجه تسمیه کارایی در این مدل‌ها آن است که در امتداد شعاعی ورودی‌ها را به یک نسبت منقبض یا خروجی‌ها در امتداد شعاعی به یک نسبت منبسط می‌گردند. دو مدل CCR و BCC از مدل‌های شعاعی هستند. در مدل‌های غیر شعاعی روش انقباض تمامی ورودیها معمولاً به یک نسبت نیست. و درکل با اندازه‌های متفاوت فاصله واحد تحت ارزیابی را با مرزکارایی مورد سنجش قرار می‌دهد. در واقع به جای محاسبه بیشترین انقباض ممکن، روی اندازه بهینه متغیرهای کمکی متمرکز می‌شوند. بنابراین در این نوع مدل‌ها اگر فاصله بهینه صفر باشد واحد تحت ارزیابی کارا، و در غیر این صورت ناکارا معرفی می‌گردد. یکی از این مدل‌ها، مدل جمعی است.

۱-۳ مدل CCR

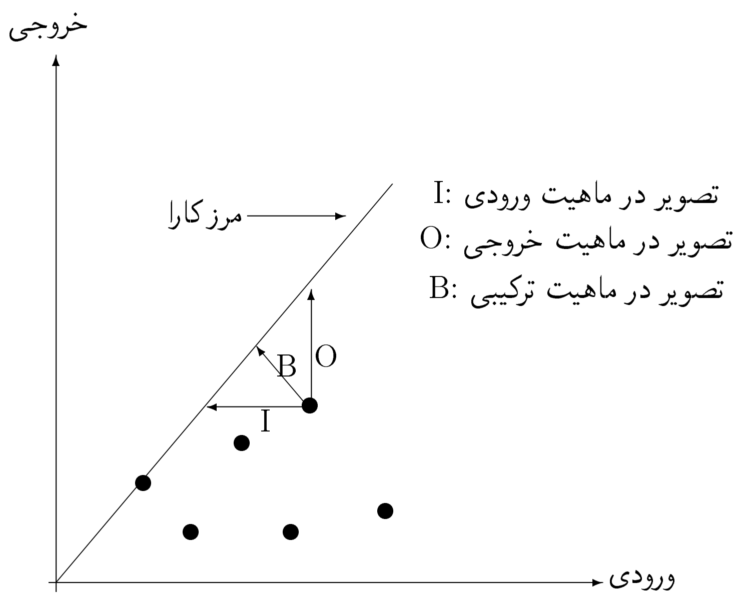
این مدل در سال ۱۹۷۸ توسط چارنز، کوپر و رودز [۶] ابداع گردید. آن‌ها روش تحلیل پوششی داده‌ها را برای سیستم‌های چند ورودی و چند خروجی تعمیم دادند. در این مدل از فرمول‌بندی

برنامه‌ریزی خطی برای اندازه‌گیری کارایی یک واحد تصمیم‌گیری نسبت به واحدهای دیگر با روش بهینه‌سازی ریاضی، استفاده می‌شود. با استفاده از مجموعه امکان تولید، مدل CCR تحت دو ماهیت ورودی و خروجی و مدل ترکیبی (بدون ماهیت) به دست می‌آید. در بررسی حالت اول فرض می‌کنیم DMU_o واحد ناکارای تحت ارزیابی باشد. به طور شعاعی به سه روش می‌توانیم DMU_o را روی مرز کارا تصویر کنیم. (شکل ۱-۱)

۱) ورودی آن را کاهش دهیم،

۲) خروجی آن را افزایش دهیم،

۳) بطور همزمان ورودی را کاهش و خروجی را افزایش دهیم.



شکل ۱-۱: تصویر DMU ناکارا بر روی مرز کارا

بنابراین در ماهیت ورودی (۱)، سعی در پیدا کردن واحد مجازی داریم که همان خروجی را با حداقل ورودی ممکن پیدا کند. پس با حل مساله‌ی زیر مواجه هستیم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ \text{s. t.} \quad & (\theta \mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o) \in T_c. \end{aligned} \tag{۱-۵}$$

با توجه به ساختار T_c مساله‌ی فوق به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \theta \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leqslant \theta x_{io}, \qquad i = 1, \ldots, m, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geqslant y_{ro}, \qquad r = 1, \ldots, s, \\
& \lambda_j \geqslant 0, \qquad j = 1, \ldots, n, \\
& \theta \ \text{آزاد}.
\end{aligned} \tag{۶-۱}$$

مدل فوق به مدل پوششی CCR در ماهیت ورودی معروف است. دوآل مدل بالا که به فرم مضربی در ماهیت ورودی معروف است به شرح ذیل است:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leqslant 0, \qquad j = 1, \ldots, n, \\
& u_r \geqslant 0, \qquad r = 1, \ldots, s, \\
& v_i \geqslant 0, \qquad i = 1, \ldots, m.
\end{aligned} \tag{۷-۱}$$

برای پیدا کردن واحد مجازی در ماهیت خروجی سعی بر این است که، با همان ورودی حداکثر خروجی را تولید کند. و این امکان با حل مساله‌ی زیر میسر می‌شود:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \varphi \\
\text{s.t.} \quad & (\mathbf{x}_o, \varphi \mathbf{y}_o) \in T_c.
\end{aligned} \tag{۸-۱}$$

بنابراین طبق ساختار T_c داریم:

$$\begin{aligned} \max \quad & \varphi \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leqslant x_{io}, && i = 1, \ldots, m, \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geqslant \varphi y_{ro}, && r = 1, \ldots, s, \\ & \lambda_j \geqslant 0, && j = 1, \ldots, n, \\ & \varphi \ \text{آزاد}. \end{aligned} \tag{۹-۱}$$

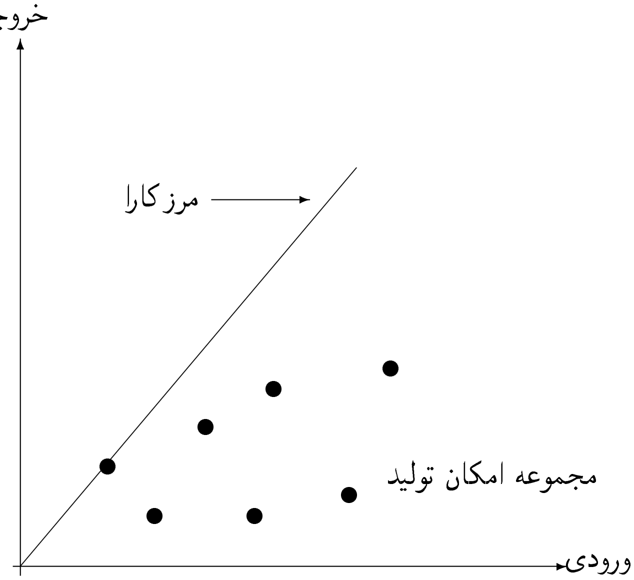
مساله‌ی بالا مدل پوششی CCR در ماهیت خروجی نامیده می‌شود که فرم مضربی یا دوآل آن نیز مشابه با حالت قبل تعریف می‌شود. و در حالت سوم به بررسی پیدا کردن واحد مجازی در مدل ترکیبی (بدون ماهیت) می‌پردازیم که تواماً با کاهش ورودی و افزایش خروجی همراه است:

$$\begin{aligned} \max \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & ((1-\theta)\mathbf{x}_o, (1+\theta)\mathbf{y}_o) \in T_c. \end{aligned} \tag{۱۰-۱}$$

و مطابق با ساختار T_c داریم:

$$\begin{aligned} \max \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leqslant (1-\theta) x_{io}, && i = 1, \ldots, m, \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geqslant (1+\theta) y_{ro}, && r = 1, \ldots, s, \\ & \lambda_j \geqslant 0, && j = 1, \ldots, n, \\ & \theta \ \text{آزاد}. \end{aligned} \tag{۱۱-۱}$$

دوآل یا فرم مضربی مدل پوششی CCR در مدل ترکیبی (بدون ماهیت) نیز به طور مشابه تعریف می‌شود. در شکل (۱-۲) مجموعه امکان تولید و مرز تولید مدل CCR نشان داده شده است.



شکل ۱-۲: مجموعه امکان تولید و مرز تولید مدل CCR

اکنون خواص مدل پوششی و مضربی CCR را به اختصار بیان می‌کنیم:

۱-۳-۱ خواص مدل پوششی CCR

۱) مدل پوششی CCR چه در ماهیت ورودی و چه در ماهیت خروجی و مدل ترکیبی همواره شدنی است.

۲) ماهیت ورودی جواب بهینه متناهی دارد یعنی همواره داریم: $0 < \theta^* \leqslant 1$.
مدل ترکیبی (بدون ماهیت) نیز دارای جواب بهینه متناهی است یعنی: $0 < \theta^* < 1$.

۳) ناحیه شدنی فرم پوششی CCR نامحدود است.

۴) در مدل پوششی CCR در ارزیابی DMU_o همواره داریم: $\theta^* = \frac{1}{\varphi^*}$.

۵) فرم پوششی مدل CCR نسبت به تغییر واحد پایدار است، به عبارت دیگر با تغییر واحد اندازه‌گیری ورودی‌ها و یا خروجی‌ها، تغییری در کارایی مدل حاصل نمی‌شود.

برای اثبات این خواص می‌توانید به [۳۴] مراجعه کنید.

۱-۳-۲ خواص مدل مضربی CCR

۱) خاصیت اول مدل پوششی همواره برای مدل مضربی CCR برقرار است.

۲) در ارزیابی DMU_o با مدل مضربی CCR حداقل یکی از قیود نامساوی در هر جواب بهین نافذ است.

۳) در مدل CCR حداقل یک DMUی کارا وجود دارد.

برای اثبات این خواص می‌توانید به [۱] مراجعه کنید.

۱-۴ مدل BCC

یکی دیگر از مدل‌های شعاعی مدل BCC است که در سال ۱۹۸۴ توسط بنکر، چارنز و کوپر [۲۱] ابداع گردید. این مدل براساس حذف بازده به مقیاس ثابت از مجموعه امکان تولید CCR ساخته می‌شود. مجموعه امکان تولید BCC، (شکل ۱-۳) با T_v نمایش داده می‌شود:

$$T_v = \left\{ (\mathbf{x},\mathbf{y}) | \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{x}_j \leq \mathbf{x}, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{y}_j \geq \mathbf{y}, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \right\}.$$

T_v کوچکترین مجموعه‌ای است که در اصول مشاهدات، تحدب، امکان‌پذیر و کمینه درون‌یابی صدق می‌کند. از مزیت‌های این مدل، این است که به مسائل حقیقی زندگی نزدیکتر است. با مقایسه مدل BCC و CCR درمی‌یابیم که:

۱) $T_v \subseteq T_c$. پس مقدار کارایی در مدل BCC بیشتر یا مساوی مقدار کارایی در مدل CCR است. (زیرا افزودن محدودیت مقدار تابع هدف را بهتر نمی‌کند).

۲) نسبت کارایی CCR به کارایی BCC به صورت $\frac{\theta^*_{CCR}}{\theta^*_{BCC}}$ است که به آن کارایی قیاسی[1] می‌گوئیم.

1) Scale efficiency