وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه دکتری
رشته ریاضی محض

عنوان :

فضاهای متریک مخروطی و T–پایداری

استاد راهنما :

دکتر شهرام رضاپور

استاد مشاور :

دکتر محمد حسین ستاری

پژوهشگر :

رباب حملبرانی حقی

آبان ماه / ۱۳۸۹

تبریز / ایران

بسم الله الرحمن الرحیم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگان شمردن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حق او گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشه تیزگام در راه شناسایی او لنگ است و سر فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ، صفتهای او تعریف‌ناشدنی است و به وصف درنیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، و به رحمتش بادها را بپراکنید، و با فرسنگها لرزه‌ی زمین را در مهار کشید.

پاک خدایا، چه بزرگ است آنچه می‌بینم از خلقت تو؛ و چه خرد است بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه باعظمت است آنچه می‌بینم از ملکوت تو؛ و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو؛ و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمت‌های آن جهان.

خدایا اگر در پرستش خود درمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما، که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات امام علی (ع)

به پاس عاطفه سرشارشان و گرمای امیدبخش وجودشان که در این
سردترین روزگاران بهترین پشتیبان من است

به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است
و به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند

این مجموعه را به

پدر و مادر بزرگوارم ، خواهر عزیزم

و

همسر مهربانم

تقدیم می‌کنم.

تشکر و قدردانی

پروردگارا

به من توانی عطا کن تا به آنچه مرا از دانش بخشیده‌ای، شکرگزار باشم و به آنان که زوایای تاریک اندیشه‌ام را با آموزگاری خویش روشن نموده‌اند و مشوق و یاریگرم بوده‌اند، اجر فراوان ده. مرا شایستگی عطا فرما در بازمانده حیات خویش سزاوار دانشی فزونتر از جانب تو باشم، عنایتی عطا کن تا آموخته‌هایم بی‌سود نباشد و بتوانم به یاری علمی که داده‌ای بنده‌ای شایسته برای تو و یاوری برای بندگان تو باشم.

رباب حملبرانی حقی

فهرست مندرجات

چکیده

این پایان‌نامه شامل دو فصل مجزا می‌باشد. در فصل اول، مفهوم فضای متریک مخروطی را معرفی و نتایجی را درباره قضایای نقاط ثابت و نقاط ثابت مشترک توابع انقباضی ارائه داده و ویژگی KM را به فضاهای متریک مخروطی تعمیم داده و چند قضیه نقطه ثابت را در این خصوص ارائه می‌دهیم. همچنین، فاصله بین دو مجموعه را در فضای متریک مخروطی منظم تعریف و نتایجی را در مورد بهترین تقریب در این فضاها بدست می‌آوریم. بعلاوه، نقطه ثابت چندتابعی‌های انقباضی را بررسی و نتیجه اصلی‌مان را که بیان می‌کند هر تابع شبه‌انقباضی در فضای متریک مخروطی نقطه ثابت منحصربفرد دارد، ثابت می‌کنیم. در نهایت، فضاهای متریک مخروطی مرتب توصیف می‌شوند. در فصل دوم، تعدادی از رویه‌های تکراری متداول معرفی می‌شوند و T–پایداری تکرارهای Picard و Mann برای توابع انقباضی مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس، هم‌ارزی T–پایداری برخی از رویه‌های تکراری را مطالعه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: فضای متریک مخروطی، نقطه ثابت، بهترین تقریب، نگاشت انقباضی، T–پایداری.

پیشگفتار

فضای نرم‌دار مرتب و مخروطها کاربردهایی در ریاضیات دارند برای مثال: در روش تقریبی نیوتن [[۴۶] و [۴۵] و [۲۲]] و در نظریه بهینه‌سازی [۱۰]. در سال ۲۰۰۷، Guang و Xian فضای متریک مخروطی را با جایگزینی مجموعه اعداد حقیقی مثبت با فضای باناخ مرتب شده در تعریف متریک معرفی کردند و فضای متریک مخروطی را به دو نوع نرمال و غیرنرمال تقسیم کردند سپس قضایای اساسی نقطه ثابت از جمله قضیه انقباضی باناخ را در فضاهای متریک مخروطی نرمال ثابت کردند [۱۲]. یک سال بعد، در مقاله [۳۰] مثالی از فضای متریک مخروطی غیرنرمال ارائه شد و تمام نتایج [۱۲] به فضای غیرنرمال تعمیم داده شد. مقالات متعددی تا کنون درباره قضایای نقطه ثابت در فضاهای متریک مخروطی به چاپ رسیده است که در فصل اول تعدادی از این مقالات مورد بررسی قرارگرفته است. علاوه بر نقطه ثابت، نقاط ثابت توابع انقباضی به عنوان تعمیمی از قضایای نقطه ثابت در مقالات [۱]، [۲] و [۱۹] بررسی شده است که ما در مقاله [۱۴] نشان دادیم که مقالات [۲] و [۱۹] تعمیم قضایای نقطه ثابت نیستند بلکه نتیجه‌ای از قضایای [۳۰] و [۳۱] می‌باشند. یک بخش از فصل اول را به نقطه ثابت توابع شبه انقباضی اختصاص دادیم که این بحث اولین بار در مقالات [۲۰]، [۲۱] و [۲۸] بررسی شده است. در مقاله [۳۱]، بسیاری از نتایج این مقالات را به فضاهای غیرنرمال تعمیم دادیم و ثابت کردیم که در هر فضای متریک مخروطی هر تابع شبه انقباضی نقطه ثابت منحصربفرد دارد. بخشهایی از فصل اول نیز به بررسی نقاط ثابت چندتابعی‌ها در فضای متریک مخروطی اختصاص دارد. در این بخش‌ها مقالات [۱۳]،[۳۲] و [۴] بررسی شده‌اند. در مقاله [۳۲]، متریک هاسدورف را در فضای متریک مخروطی نرمال با ثابت نرمال یک تعریف می‌کنیم و برخی از

قضایای [۲۳] را به این فضا تعمیم دادیم. در مقاله [۱۳]، در ابتدا قضیه Meir و Keeler را به فضای متریک مخروطی منظم تعمیم دادیم سپس با استفاده از اصل انتخاب و با تعمیم برخی از قضایای [۹] و [۲۴] به فضاهای متریک مخروطی نتایجی را درباره نقطه ثابت چندتابعی‌ها بدست آوردیم. در مقاله [۵] فرض شده است که فضای متریک مخروطی با یک ترتیب جزئی مرتب شده است سپس ثابت می‌کنند که یک رابطه انقباضی (که اگر برای هر دو عضو دلخواه برقرار باشد نتیجه می‌دهد که تابع موردنظر نقطه ثابت دارد) کافیست که برای هر دو عضو که با هم رابطه دارند برقرار شود، در اینصورت نتایج برقرار است.در مقاله [۴]، نشان دادند که تحت شرایطی، همواره یک ترتیب جزیی می‌توان روی فضای متریک مخروطی تعریف کرد سپس توابع به طور ضعیف صعودی و نزولی تعریف شده و چند قضیه در رابطه با نقاط ثابت چندتابعی‌ها به اثبات رسیده است. مقاله [۱۵] متفاوت با مقالات قبلی است. در این مقاله فاصله بین دو مجموعه در فضای متریک مخروطی را تعریف می‌کنیم و سپس شرایطی را بیان می‌کنیم که تحت آن، فاصله دو مجموعه وجود دارد. در نهایت، با استفاده از این نتایج، قضیه‌ای در مورد وجود بهترین تقریب ثابت می‌کنیم.

فصل دوم پایان‌نامه به مفهوم T–پایداری اختصاص دارد. در این بخش، رویه‌های تکراری متداول را معرفی می‌کنیم. T–پایداری مفهومی قویتر از همگرایی یک رویه تکراری می‌باشد. در واقع، اگر یک رویه تکراری T–پایدار باشد، همگرا نیز هست. تقریباً دو نوع مقاله در مورد T–پایداری وجود دارد. مقالاتی که به T–پایداری رویه‌های تکراری می‌پردازد و مقالاتی که به هم‌ارزی T–پایداری رویه‌های تکراری می‌پردازد. با توجه به [۷]، بررسی مفهوم T–پایداری رویه‌های تکراری در یک نقطه ثابت منسوب به Ostrowski می‌باشد. اما مطالعات نظام‌یافته T–پایداری در سال ۱۹۸۸ در رساله دکتری Harder و Hicks صورت گرفت و در مقالات [۱۶] و [۱۷] چاپ شدند که در این مقالات T–پایداری تکرار Picard برای توابع انقباضی بررسی شده است. سپس Rhoades در سالهای ۱۹۹۰ و ۱۹۹۳ دو مقاله ([۳۰] و [۳۶]) درباره T–پایداری تکرارهای Picard و Mann به چاپ رساند که تعمیم مقالات [۱۶] و [۱۷] بودند. همچنین Osilike T–پایداری تکرار Ishikawa را بررسی کرد و مقالات [۲۶] و [۲۷] را در سالهای ۱۹۹۵ و ۱۹۹۹ به چاپ رساند. سپس در سالهای ۲۰۰۱ و ۲۰۰۲، Stevic و Berinde دو مقاله [۴۲] و [۸] را در این زمینه به چاپ رساندند. در سالهای اخیر Rhoades و چند تن

دیگر از محققان مقالاتی را به چاپ رساندند به عنوان نمونه: [۲۹]، [۴۱]، [۵]، [۴۳]، [۴۴] و غیره. البته Berinde برخی از این مقالات را در کتاب [۷] گردآوری کرده است. ما نیز با استفاده از مقالات [۱۱]، [۳۴] و [۷] T–پایداری تکرار Mann و Picard را برای توابع انقباضی تعمیم‌یافته بررسی کردیم و همچنین هم‌ارزی T–پایداری بعضی از رویه‌های تکراری را مورد مطالعه قرار دادیم [۳۳].

فصل ۱

فضاهای متریک مخروطی

فضاهای متریک مخروطی

۱.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

فرض کنید E فضای برداری توپولوژیک و P زیر مجموعه E باشد. P را یک مخروط می‌نامیم هرگاه ویژگیهای زیر را داشته باشد:

(آ) P ناتهی و بسته باشد و $P \neq \{0\}$؛

(ب) برای هر $x, y \in P$ و $a, b \geq 0$، $ax + by \in P$؛

(پ) اگر $x, -x \in P$، آنگاه $x = 0$.

ترتیب جزیی $\leq$ نسبت به P در E را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad y - x \in p$$

همچنین خواهیم نوشت $x < y$ هرگاه $x \leq y$ و $x \neq y$ و نماد $x \ll y$ بدین معناست که $y - x \in \mathrm{int}P$، که در آن $\mathrm{int}P$ مجموعه نقاط درونی P است.

در فضای نرم‌دار E، مخروط P را نرمال نامیم هرگاه عدد حقیقی مثبت M چنان موجود باشد که برای هر $x, y \in E$،

$$0 \leq x \leq y \quad \Rightarrow \|x\| \leq M\|y\|.$$

کوچکترین عدد Mای را که در رابطه فوق صدق کند، ثابت نرمال P می‌نامیم. واضح است که همواره $M \geq ۱$. مخروط P را منظم نامیم هرگاه هر دنباله صعودی و از بالا کراندار همگرا باشد، یعنی اگر $\{x_n\}_{n\geq ۱}$ دنباله‌ای در E و $y \in E$ چنان باشد که

$$x_۱ \leq x_۲ \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots \leq y,$$

آنگاه $x \in E$ چنان موجود باشد که $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = ۰$. به سادگی می‌توان دید که P منظم است هرگاه هر دنباله نزولی و از پایین کراندار همگرا باشد. لم بعدی نشان می‌دهد که هر مخروط منظم، نرمال است.

لم ۱.۱.۱ [۳۰] در هر فضای باناخ، هر مخروط منظم نرمال است.

برهان. فرض کنید P مخروط منظمی باشد که نرمال نیست. برای هر $n \geq ۱$، $t_n, s_n \in P$ چنان موجودند که $t_n - s_n \in P$ و $n^۲\|t_n\| \leq \|s_n\|$. برای هر عدد طبیعی n، قرار دهید $x_n = \frac{s_n}{\|t_n\|}, y_n = \frac{t_n}{\|t_n\|}$. در اینصورت برای هر $n \geq ۱$، $x_n, y_n, y_n - x_n \in P$، $\|y_n\| = ۱$ و $\|x_n\| > n^۲$. چون $\sum_{n=۱}^{k} \frac{۱}{n^۲}\|y_n\|$ همگرا و P بسته است، $y \in P$ چنان موجود است که $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲} y_n = y$. حال توجه کنید که

$$۰ \leq x_۱ \leq x_۱ + \frac{۱}{۲^۲}x_۲ \leq x_۱ + \frac{۱}{۲^۲}x_۲ + \frac{۱}{۳^۲}x_۳ \leq \ldots \leq y,$$

چون P منظم است، لذا $\sum_{n=۱}^{k} \frac{x_n}{n^۲}$ همگراست. بنابرین $\lim_{n\to\infty} \frac{\|x_n\|}{n^۲} = ۰$ و این تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. ■

مثال بعدی نشان می‌دهد که عکس لم فوق برقرار نیست.

مثال ۱.۱.۱ [۳۰] فرض کنید $E = (C_{\mathbb{R}}[۰,۱], \|.\|_\infty)$ و $P = \{f \in E \;:\; f \geq ۰\}$. در اینصورت P مخروط نرمال با ثابت نرمال $M = ۱$ است. برای هر عدد طبیعی n، فرض کنید $f_n(x) = x^n$. در اینصورت $\{f_n\}_{n\geq ۱}$ دنباله‌ای در E است که $f_۱(x) \geq f_۲(x) \geq \ldots \geq ۰$. اما می‌دانیم دنباله فوق در E همگرا نیست. بنابرین P منظم نیست.

گزاره بعدی نشان می‌دهد که برای هر $K > 1$، مخروطی با ثابت نرمال $M > K$ وجود دارد.

گزاره ۱.۱.۱ [۳۰] برای هر $K > 1$، مخروطی با ثابت نرمال $M > K$ وجود دارد.

برهان. فرض کنید $K > 1$، $E = \{ax + b \ : \ a, b \in \mathbb{R}, x \in [1 - \frac{1}{K}, 1]\}$ مجهز به نرم سوپریمم باشد و $P = \{ax + b \in E \ : \ a \leq 0 \leq b\}$. در ابتدا نشان می‌دهیم که E منظم است. فرض کنید $\{a_n x + b_n\}_{n\geq 1}$ دنباله‌ای صعودی در E و از بالا کراندار به $cx + d \in E$ باشد، یعنی برای هر $x \in [1 - \frac{1}{K}, 1]$،

$$a_1 x + b_1 \leq a_2 x + b_2 \leq \ldots \leq a_n x + b_n \leq \ldots \leq cx + d.$$

بنابرین $\{a_n\}_{n\to\infty}$ و $\{b_n\}_{n\to\infty}$ دو دنباله از اعداد حقیقی هستند بطوریکه

$$b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq d, a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq c,$$

و لذا هر دو دنباله همگرا هستند. می‌توان فرض کرد $a_n x + b_n \to ax + b \in E$. بنابرین P منظم است. از اینرو $M \geq 1$ چنان موجود است که برای هر $f, g \in E$ که $0 \leq g \leq f$، $\|g\| \leq M\|f\|$. نشان می‌دهیم $M > K$. تعریف کنید $f(x) = -Kx + K$ و $g(x) = K$. لذا $K = \|g\| \leq M\|f\| = M$. همچنین با فرض $f(x) = -(K + \frac{1}{K})x + K$ و $g(x) = K$ نتیجه می‌شود که اگر $M = K$، آنگاه $K = \|g\| \leq K\|f\| = K + \frac{1}{K} - 1$ و این نشان می‌دهد که $M > K$. ■

با کمی تأمل می‌توان دریافت که بسیاری از مخروطها نرمال می‌باشند که اغلب آنها ثابت نرمال یک را دارند. مثال بعدی نشان می‌دهد که مخروط غیرنرمال نیز وجود دارد.

مثال ۲.۱.۱ [۳۰] فرض کنید $E = C^2_{\mathbb{R}}[0, 1]$، $P = \{f \in E \ : \ f \geq 0\}$ و برای هر $f \in E$ تعریف کنید $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. برای هر $k \geq 1$، قرار دهید $f(x) = x$ و $g(x) = x^{2k}$. در اینصورت $0 \leq g \leq f$ و $\|f\| = 2$ و $\|g\| = 2k + 1$. چون $k\|f\| \leq \|g\|$، k ثابت نرمال P نیست. بنابرین P مخروط نرمال نیست.

تعریف ۱.۱.۱ [۱۲] فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و نگاشت $d : X \times X \to P$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

(آ) برای هر $x, y \in X$، $d(x,y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$؛

(ب) برای هر $x, y \in X$، $d(x,y) = d(y,x)$؛

(پ) برای هر $x, y, z \in X$، $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

در اینصورت d یک متریک مخروطی روی X و (X,d) فضای متریک مخروطی نامیده می‌شود.

مثال ۳.۱.۱ [۱۲] فرض کنید $E = \mathbb{R}^2$، $P = \{(x,y) \in E \ : \ x, y \geq 0\}$، $X = \mathbb{R}$. نگاشت $d : X \times X \to P$ را با ضابطه $d(x,y) = (|x-y|, \alpha|x-y|)$ در نظر بگیرید، که $\alpha > 0$ یک عدد ثابت است. در اینصورت (X,d) یک فضای متریک مخروطی است.

در ادامه همگرایی دنباله‌ها در فضای متریک مخروطی تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱ [۱۲] فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی و $\{x_n\}_{n\geq 1}$ دنباله‌ای در X باشد.

(آ) گوییم $\{x_n\}_{n\geq 1}$ به $x \in X$ همگراست و آن را با نماد $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ یا $x_n \to x$ نشان می‌دهیم هرگاه برای هر $c \gg 0$، $N_0 \in \mathbb{N}$ چنان موجود باشد که برای هر $n \geq N_0$، $d(x_n, x) \leq c$؛

(ب) دنباله $\{x_n\}_{n\geq 1}$ کشی است هرگاه برای هر $c \gg 0$، $N_0 \in \mathbb{N}$ چنان موجود باشد که برای هر $n, m \geq N_0$، $d(x_n, x_m) \leq c$.

(X,d) را کامل گوییم هرگاه هر دنباله کشی در X همگرا باشد.

۲.۱ قضایای نقطه ثابت

نتایج و لم‌هایی که در ادامه بیان می‌شود با فرض نرمال بودن مخروط مورد نظر در [۱۲] ثابت شده‌اند سپس تمامی این نتایج در [۳۰] با حذف این فرض، تعمیم داده شدند. در این قسمت نتایج و لم‌ها را به آن صورتی که در [۳۰] بیان شده‌اند، ذکر می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۱ [۳۰] فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی کامل و نگاشت $T: X \to X$ چنان باشد که برای هر $x,y \in X$ داشته باشیم

$$d(Tx,Ty) \leq kd(x,y), \tag{۱}$$

که در آن $k \in [۰,۱)$ عدد ثابت است. در اینصورت T نقطه ثابت منحصربفرد دارد و برای هر $x \in X$، دنباله تکراری $\{T^n x\}_{n\geq ۱}$ به نقطه ثابت T همگراست.

برهان. $x_۰ \in X$ را در نظر بگیرید. برای هر $n \in \mathbb{N}$، قرار دهید $x_n = Tx_{n-۱}$. در اینصورت،

$$d(x_{n+۱},x_n) \leq kd(x_n,x_{n-۱}) \leq k^۲ d(x_{n-۱},x_{n-۲}) \leq \ldots \leq k^n d(x_۱,x_۰).$$

برای هر $n > m$ داریم

$$d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x_{n-۱}) + d(x_{n-۱},x_{n-۲}) + \ldots + d(x_{m+۱},x_m) \leq \frac{k^m}{۱-k} d(x_۱,x_۰).$$

حال فرض کنید $c \gg ۰$. $\delta > ۰$ چنان موجود است که $c + B(۰,\delta) \subseteq P$ (که در آن $B(۰,\delta) = \{v \in E : \|v\| < \delta\}$). عدد طبیعی $n_۱$ چنان موجود است که برای هر $m \geq n_۱$، $\frac{k^m}{۱-k}d(x_۱,x_۰) \in B(۰,\delta)$ یا بعبارتی $\frac{k^m}{۱-k}d(x_۱,x_۰) \ll c$. لذا برای هر $n > m > n_۱$،

$$d(x_n,x_m) \leq \frac{k^m}{۱-k}d(x_۱,x_۰) \ll c.$$

به این ترتیب $\{x_n\}_{n\geq ۱}$ دنباله کشی در (X,d) است. چون (X,d) کامل است، فرض کنید $x_n \to x^*$. حال عدد طبیعی $n_۲$ را چنان انتخاب کنید که برای هر $n \geq n_۲$، $d(x_n,x^*) \ll \frac{c}{۲}$. حال داریم

$$d(Tx^*,x^*) \leq d(Tx^*,Tx_n) + d(Tx_n,x^*) \leq kd(x^*,x_n) + d(x_{n+۱},x^*) \ll \frac{c}{۲} + \frac{c}{۲} = c.$$

چون $c \in P$ را دلخواه گرفته بودیم، بنابرین برای هر $m \in \mathbb{N}$، $d(Tx^*, x^*) \ll \frac{c}{m}$. با میل دادن n به بی‌نهایت، نتیجه می‌گیریم که $Tx^* = x^*$ و بوضوح نقطه ثابت T منحصربفرد است. ■

نتیجه ۱.۲.۱ [۳۰] فرض کنید (X, d) یک فضای متریک مخروطی کامل باشد و $c \gg 0$، $x_0 \in X$ و $B_C(x_0, c) = \{x \in X \ : \ d(x, x_0) \leq c\}$. همچنین فرض کنید نگاشت $T : X \to X$ چنان باشد که برای هر $x, y \in B_C(x_0, c)$ در شرط انقباضی (۱) صدق کند. اگر $d(Tx_0, x_0) \leq (1 - k)c$، آنگاه T نقطه ثابت منحصربفرد در $B_C(x_0, c)$ دارد.

برهان. نشان می‌دهیم که $B_C(x_0, c)$ کامل است و $T(B_C(x_0, c)) \subseteq B_C(x_0, c)$، که در اینصورت حکم از قضیه ۱.۲.۱ نتیجه می‌شود. پس فرض کنید $\{x_n\}_{n \geq 1}$ یک دنباله کشی در $B_C(x_0, c)$ باشد. لذا $x^* \in X$ چنان موجود است که $x_n \to x^*$. در اینصورت

$$d(x_0, x^*) \leq d(x_n, x_0) + d(x_n, x^*) \leq d(x_n, x^*) + c,$$

با میل دادن n به بی‌نهایت، نتیجه می‌شود که $x^* \in B_C(x_0, c)$. حال فرض کنید $x \in B_C(x_0, c)$، در اینصورت

$$d(x_0, Tx) \leq d(x_0, Tx_0) + d(Tx_0, Tx) \leq (1 - k)c + kd(x_0, x) \leq (1 - k)c + kc \leq c,$$

از اینرو $Tx \in B_C(x_0, c)$. ■

نتیجه ۲.۲.۱ [۳۰] فرض کنید (X, d) یک فضای متریک مخروطی کامل و نگاشت $T : X \to X$ چنان باشد که برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$d(T^n x, T^n y) \leq kd(x, y),$$

که در آن n یک عدد طبیعی است و $k \in [0, 1)$. در اینصورت T نقطه ثابت منحصربفرد دارد.

برهان. بنا به قضیه ۱.۲.۱، T^n نقطه ثابت منحصربفرد x^* را دارد. از طرفی $T^n(Tx^*) = T(T^n x^*) = Tx^*$ یعنی Tx^* نیز نقطه ثابت T^n می‌باشد. بنابرین $x^* = Tx^*$. آز آنجاکه نقاط ثابت T نقاط ثابت T^n نیز می‌باشند، لذا T نقطه ثابت منحصربفرد دارد. ■

قضیه ۲.۲.۱ [۳۰] فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی کامل و نگاشت $T : X \to X$ چنان باشد که برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$d(Tx,Ty) \leq k(d(Tx,x) + d(Ty,y)), \tag{۲}$$

که در آن $k \in [\circ, \frac{۱}{۲})$. در اینصورت T نقطه ثابت منحصربفرد در X دارد و برای هر $x \in X$، دنباله تکراری $\{T^n x\}_{n \geq ۱}$ به نقطه ثابت T همگراست.

برهان. $x_\circ \in X$ را در نظر بگیرید. برای هر $n \in \mathbb{N}$، قرار دهید $x_n = Tx_{n-۱}$. در اینصورت،

$$d(x_{n+۱}, x_n) \leq k(d(Tx_n, x_n) + d(Tx_{n-۱}, x_{n-۱})) = k(d(x_{n+۱}, x_n) + d(x_n, x_{n-۱})),$$

و لذا $d(x_{n+۱}, x_n) \leq \frac{k}{۱-k} d(x_n, x_{n-۱})$. با فرض $h = \frac{k}{۱-k}$، برای هر $n > m$،

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n-۱}) + d(x_{n-۱}, x_{n-۲}) + \ldots + d(x_{m+۱}, x_m) \leq \frac{h^m}{۱-h} d(x_۱, x_\circ).$$

حال برای هر $c \gg \circ$، عدد طبیعی $n_۱$ چنان موجود است که برای هر $m \geq n_۱$، $\frac{h^m}{۱-h} d(x_۱, x_\circ) \ll c$. بنابرین $\{x_n\}_{n \geq ۱}$ دنباله کشی است. فرض کنید $x_n \to x^*$. عدد طبیعی $n_۲$ را چنان انتخاب کنید که برای هر $n \geq n_۲$، $d(x_{n+۱}, x_n) \ll \frac{(۱-k)c}{۲k}$ و $d(x_{n+۱}, x^*) \ll \frac{(۱-k)c}{۲}$. در نتیجه برای هر $n \geq n_۲$ داریم

$$d(Tx^*, x^*) \leq d(Tx^*, Tx_n) + d(Tx_n, x^*) \leq k(d(Tx_n, x_n) + d(Tx^*, x^*)) + d(X_{n+۱}, x^*)$$

و لذا $d(Tx^*, x^*) \ll c$. بنابرین $x^* = Tx^*$. از رابطه (۲) واضح است که نقطه ثابت T منحصربفرد است. ■

قضیه ۳.۲.۱ [۳۰] فرض کنید (X, d) یک فضای متریک مخروطی کامل و نگاشت $T : X \to X$ چنان باشد که برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$d(Tx, Ty) \leq k(d(Tx, y) + d(Ty, x)), \qquad (۳)$$

که در آن $k \in [۰, \frac{۱}{۲})$. در اینصورت T نقطه ثابت منحصربفرد در X دارد و برای هر $x \in X$، دنباله تکراری $\{T^n x\}_{n \geq ۱}$ به نقطه ثابت T همگراست.

برهان. $x_۰ \in X$ را در نظر بگیرید. برای هر $n \in \mathbb{N}$، قرار دهید $x_n = Tx_{n-۱}$. مشابه قضیه‌های قبلی ثابت می‌شود که T نقطه ثابت منحصربفرد دارد. ■

قضیه ۴.۲.۱ [۳۰] فرض کنید (X, d) یک فضای متریک مخروطی کامل و نگاشت $T : X \to X$ چنان باشد که برای هر $x, y \in X$، داشته باشیم

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) + ld(y, Tx),$$

که در آن $k, l \in [۰, ۱)$. در اینصورت T نقطه ثابت دارد. چنانچه فرض شود $k + l < ۱$، نقطه ثابت T منحصربفرد خواهد بود.

در ادامه چند قضیه درباره نقطه ثابت مشترک که نتیجه‌ای از قضایای قبلی است بیان می‌کنیم و در ابتدا لم کلیدی زیر را ثابت می‌کنیم.

لم ۱.۲.۱ [۱۴] فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و نگاشت $T : X \to X$ باشد. دراینصورت $X' \subseteq X$ چنان موجود است که $T : X' \to X$ یک به یک باشد و $TX = TX'$.