بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه
بخش ریاضی

رساله برای دریافت درجه دکتری

رشته ریاضی محض گرایش جبر-منطق

A-ایده‌ال‌های اول و رادیکال A-ایده‌ال‌ها در MV-مدول‌ها

مؤلف:

فرشته فروزش

استاد راهنما:

دکتر اسفندیار اسلامی

استاد مشاور:

دکتر ارشام برومند سعید

مرداد ماه ۱۳۹۲

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه دکتری به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و رایانه
دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: فرشته فروزش	امضاء:
استاد راهنما: دکتر اسفندیار اسلامی	امضاء:
استاد مشاور: دکتر ارشام برومند سعید	امضاء:
داور اول : دکتر بیژن دواز	امضاء:
داور دوم: دکترسید ناصرحسینی	امضاء:
نماینده تحصیلات تکمیلی دانشکده در جلسه دفاع:	امضاء:
معاون آموزشی و پژوهشی دانشکده:	امضاء:

تقدیم به:

همسرم که نشانه لطف الهی در زندگی من است،

فرزند دلبندم،

مقدس ترین واژه ها در لغت نامه دلم، پدر و مادر عزیزم،

و روان پاک عزیزانم که در زلزله پنجم دی ماه ۸۲ به خواب ابدی فرو رفتند.

تشکر و قدردانی

سپاس و حمد فراوان خالق هستی بخش را که به بنده توفیق کوشش در راه فراگیری علم و دانش را عطا فرمود و مرا در تمامی شئونات و لحظات زندگی مرهون الطاف و عنایات بی‌پایانش قرار داده است.

اینک که به لطف پروردگار متعال نگارش این رساله به پایان رسیده است، بر خود لازم می‌دانم از تمامی کسانی که در به ثمر رسیدن این رساله به هر نحو متحمل زحمت شده اند تشکر و قدردانی نمایم.

ابتدا وظیفه خود می‌دانم که از همسر عزیزم که همیشه همراه و حامی من در امر تحصیل بوده‌اند و محیطی سرشار از سلامت و امنیت و آرامش و آسایش برای من فراهم آورده‌اند تشکر و قدردانی نمایم. همچنین از پدر و مادر بسیار گرامیم که همواره در زندگی مشوق و پشتیبان من بوده‌اند و از خواهران و برادر گرامی و ارجمندم، همراهان همیشگی و پشتوانه‌های زندگی‌ام سپاسگزاری نموده و برای خانواده عزیزم طول عمر همراه با سربلندی و سعادت و سلامت خواستارم.

مراتب قدردانی صمیمانه خود را تقدیم می دارم به دایی عزیزم مرحوم آقای دکتر محمد شریف کمالی که همیشه مشوقم بودند(روحش شاد).

از الطاف و عنایات بی شائبه استاد ارجمند، جناب آقای دکتر اسلامی که درطول مدت تحصیل از راهنمایی‌ها، اخلاق نکو، صبر و دلسوزی و روحیه دانش پژوهی ایشان بهره فراوان برده‌ام صمیمانه تشکر و قدر دانی می‌نمایم واز خداوند برای ایشان توفیق روز افزون خواستارم.

چکیده

در این رساله، ابتدا مفهوم ایده‌ال ۰-اول در یک PMV-جبر را معرفی می‌کنیم. سپس به بررسی ارتباط بین ایده‌ال‌های ۰-اول و MVf-جبرها می‌پردازیم. در ادامه ایده‌ال‌های تولید شده توسط یک زیر مجموعه ناتهی N از یک MV-مدول M را مورد بررسی قرار داده و پوچساز یک A-ایده‌ال از یک MV-مدول را روی یک PMV-جبر معرفی کرده و رابطه آنها را با A-ایده‌ال‌های اول بررسی می‌کنیم.

همچنین، به معرفی ایده‌ال‌های سرسخت یک MV-جبر پرداخته و با توجه به اینکه ایده‌ال‌های سرسخت دارای ویژگی‌های جالبی هستند لذا در ادامه به بیان پاره‌ای از این ویژگی‌ها خواهیم پرداخت. سپس به بررسی ارتباط بین ایده‌ال‌های سرسخت و ایده‌ال‌های دیگر یک MV-جبر می‌پردازیم.

در ادامه، نشان می‌دهیم خارج قسمت یک MV-جبر بر یک ایده‌ال سرسخت، یک جبر بولی است.

مفهوم رادیکال یک ایده‌ال در یک MV-جبر را معرفی کرده و پاره‌ای از خصوصیات آن را مطالعه خواهیم کرد. رادیکال یک ایده‌ال را با استفاده از عضوهای MV-جبر مشخص می‌کنیم. مفهوم یک ایده‌ال نیمه‌ماکسیمال در یک MV-جبر معرفی شده است و رابطه آن را با سایر ایده‌ال‌های خاص دیگر بررسی می‌کنیم.

در ادامه، نشان خواهیم داد A/I یک MV-جبر نیمه‌ساده است اگر و تنها اگر I یک ایده‌ال نیمه‌ماکسیمال از یک MV-جبر A باشد. در پایان، مفهوم رادیکال یک A-ایده‌ال و A-ایده‌ال نیمه‌ماکسیمال را در یک MV-مدول معرفی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: *MV-جبر، MV-مدول، PMV-جبر، A-ایده‌ال، ایده‌ال سرسخت، رادیکال*

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات و پیشنیازها

اولین بار MV-جبرها، بوسیله چانگ[۱] در سال ۱۹۵۸ معرفی شدند [۶]. در واقع آنها یک ساختار جبری از منطقهای چندارزشی لوکاسویچ[۲] هستند که به صورت زیر توصیف می‌شوند:

MV-جبر A مفروض است. یک A-ارزیابی، یک همریختی از جبر فرمول‌های گزاره‌ای (با زبانی شامل $\oplus$ و $*$ و 0) به A می‌باشد. فرمول‌هایی را که برای همه A-ارزیاب‌ها، به ۱ نگاشته می‌شوند، A-راستگو گویند. حال اگر MV-جبر استاندارد روی $[0, 1]$ بکار برده شود، مجموعه همه $[0, 1]$-راستگوها، همان منطق بینهایت ارزشی لوکاسویچ را تعیین می‌کند.

همچنین چانگ، یک برهان جبری برای قضیه تمامیت حساب گزاره‌های بینهایت ارزشی لوکاسویچ ارائه کرد [۷] که بیان می‌کند هر معادله MV-جبری که در MV-جبر استاندارد روی بازه $[0, 1]$ صادق باشد، آنگاه در هر MV-جبری صادق است.

بطور معادل، قضیه تمامیت چانگ می‌گوید، MV-جبرها، منطق بینهایت ارزشی لوکاسویچ را مشخص می‌کنند که به عنوان مجموعه $[0, 1]$-راستگوها تعریف شده‌اند.

---

[۱] C. C. Chang

[۲] Łukasiewicz

بعد از آن ریاضیدانان متعددی به این شاخه از ساختارهای جبری علاقمند شده و مقالات زیادی در این زمینه به چاپ رسیده است.

در سال ۲۰۰۱، دوارنسکی[۱] و دی نولا[۲]، مفهوم PMV-جبرها و ۰-ایده‌ال‌ها در PMV-جبرها را معرفی کردند [۱۱]. PMV-جبرها در واقع MV-جبرهایی هستند که به ضرب · مجهز هستند به قسمی که اعضای آن، نسبت به این ضرب شرکتپذیرند و خاصیت توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع جزئی از چپ و راست در آنها برقرار است. علاوه آنها نشان دادند که رسته PMV-جبرها، معادل رسته‌ای با رسته l-حلقه‌های شرکت‌پذیر یکانی است.

در ادامه، تحقیقات جدی در زمینه MV-مدول ها روی یک PMV-جبر A، از سال ۲۰۰۳ توسط دی نولا و همکارانش با ارائه مقاله [۱۲] آغاز شد.

همان طور که می دانیم ایده ال‌های اول نقش اساسی در نظریه MV-جبرها دارند. A-ایده‌ال‌های اول به عنوان تعمیمی از مفهوم ایده ال‌های اول به MV-مدول‌ها مطرح می‌شوند.

این رساله شامل ۴ فصل است. در فصل اول، پاره‌ای از مفاهیم اساسی و قضایای مربوطه، به اختصار آورده شده است.

در فصل دوم، ابتدا به معرفی ایده‌ال‌های ۰-اول در یک PMV-جبر پرداخته و نشان خواهیم داد که اگر A یک PMV-جبر یکانی و P یک ایده‌ال ۰-اول از A باشد، آنگاه A/P یک PMV-جبر خطی مرتب است و لذا یک MVf-جبر است [۱۱]. همچنین نشان می‌دهیم که عکس این قضیه درست نیست.

سپس ایده ال‌های تولید شده توسط یک زیر مجموعه ناتهی N از یک MV-مدول M را مورد بررسی قرار داده و بعضی از قضایای مربوطه و نتایج آنها را بیان و اثبات می‌کنیم. در ادامه پوچساز یک A-ایده‌ال از یک MV-مدول M روی یک PMV-جبر A را معرفی کرده و نشان می‌دهیم پوچساز یک A-ایده‌ال، یک ۰-ایده‌ال از PMV-جبر A است. همچنین یک

[۱] A. Dvurecenskij

[۲] Di Nola

A-ایده‌ال تابدار را تعریف کرده و نشان می‌دهیم یک A-ایده‌الی از MV-مدول M است.
در ادامه A-ایده ال‌های اول در یک MV-مدول را معرفی کرده و به بررسی ارتباط آنها با پوچساز های یک MV-مدول می‌پردازیم. سپس نشان خواهیم داد که اگر $h : M \longrightarrow M'$ یک همریختی A-مدولی باشد، آنگاه یک تناظر یک به یک بین A-ایده ال‌های M' و A-ایده‌ال‌های M که شامل $\ker h$ هستند، برقرار است.

در فصل سوم، ابتدا به معرفی ایده‌ال‌های سرسخت از یک MV-جبر پرداخته و پاره‌ای از خصوصیات مهم آنها را مطالعه می‌کنیم. سپس ارتباط بین ایده‌ال‌های سرسخت و سایر ایده‌ال‌های یک MV-جبر را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در ادامه، نشان می‌دهیم که خارج قسمت یک MV-جبر بر یک ایده‌ال سرسخت، یک جبر بولی خواهد بود.

در فصل چهارم، یکی از مباحث اساسی در MV-جبرها، یعنی رادیکال یک ایده‌ال در MV- جبر را مطالعه می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم که اگر I یک ایده‌ال از MV-جبر A باشد، آنگاه اشتراک تمام ایده‌ال‌های ماکسیمال شامل I به صورت زیر است:

$$Rad(I) = \{a \in A : \forall n \in \mathbb{N}, \quad na \odot a \in I\}.$$

سپس پاره‌ای از خواص و ویژگی‌های رادیکال‌های ایده‌ال‌های یک MV-جبر را مورد بررسی قرار می‌دهیم و ثابت می‌کنیم خارج قسمت یک MV-جبر بر رادیکال یک ایده‌ال، یک MV-جبر نیمه‌ساده است.

در ادامه، مفهوم یک ایده‌ال نیمه‌ماکسیمال را بیان کرده و ارتباط آن را با سایر ایده‌ال‌های MV-جبر بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که I یک ایده‌ال نیمه‌ماکسیمال از MV-جبر A است اگر و تنها اگر A/I یک MV-جبر نیمه‌ساده باشد.

در پایان، رادیکال یک MV-مدول و رادیکال یک A-ایده‌ال در یک MV-مدول را معرفی کرده و پاره‌ای از ویژگی‌های رادیکال‌های A-ایده ال‌ها و مفهوم A-ایده‌ال نیمه ماکسیمال در یک MV-مدول را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱.۱ MV-جبرها

MV-جبرها یک ساختار جبری چندارزشی از منطق گزاره‌ای لوکاسویچ هستند.

همچنین ماندیسی[1]، نشان داد یک هم‌ارزی رسته‌ای بین رسته MV-جبرها و رسته l-گروه‌های آبلی با یکه قوی وجود دارد [۲۴]. بعد از آن ریاضیدانان متعددی به این ساختارهای جبری علاقمند شدند و مقالات زیادی در این زمینه به چاپ رسیده است. برای کسب اطلاعات بیشتر راجع به MV-جبرها می‌توان به مراجع [۲۵ − ۲۴ ,۱۳ ,۹ − ۶ ,۳] مراجعه کرد.

تعریف ۱.۱.۱. [۵] یک جبر $L = (L, \wedge, \vee)$ از نوع (۲,۲) یک مشبکه است، اگر برای $x, y, z \in L$ دارای خواص زیر باشد:

(۱) $x \wedge x = x$ و $x \vee x = x$.

(۲) $x \wedge y = y \wedge x$ و $x \vee y = y \vee x$.

(۳) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ و $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.

(۴) $x \wedge (x \vee y) = x$ و $x \vee (x \wedge y) = x$.

رابطه $\leq$ را روی L به صورت زیر تعریف می کنیم:

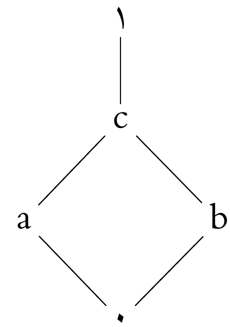
$x \leq y$ اگر و تنها اگر $x \wedge y = x$

به آسانی دیده می شود که $(L, \leq)$ یک مجموعه جزئاً مرتب است.

مثال ۲.۱.۱. فرض کنید $L = \{0, a, b, c, 1\}$ با $0 < a, b < c < 1$ باشد به قسمی که a, b

[1] D. Mundici

غیر قابل مقایسه هستند. در این صورت L یک مشبکه به صورت زیر می باشد:



تعریف ۳.۱.۱. [۵] اگر $(L, \wedge, \vee, ۰, ۱)$ یک مشبکه کراندار باشد، یک عضو $a \in L$ را متمم‌دار گوییم، اگر یک $b \in L$ موجود باشد بطوریکه دو شرط $a \vee b = ۱$ و $a \wedge b = ۰$ برقرار باشد. مجموعه همه عضوهای متمم دار L را با $B(L)$ نشان می دهند.

تعریف ۴.۱.۱. [۵] جبر $L = (L, \wedge, \vee, *, ۰, ۱)$ از نوع $(۲, ۲, ۱, ۰, ۰)$ یک جبر بولی است، اگر $(L, \wedge, \vee)$ یک مشبکه باشد و ۰ کمترین و ۱ بزرگترین عضو L باشد به قسمی که برای هر $x, y, z \in L$ دارای خواص زیر باشد:

(i) $x \wedge ۰ = ۰$ و $x \vee ۱ = ۱$.

(ii) $x \vee x^* = ۱$ و $x \wedge x^* = ۰$.

(iii) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ و $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

مثال ۵.۱.۱. فرض کنید $\Omega = \{۱, ۲\}$ یک مجموعه ناتهی و $\mathcal{A} = P(\Omega)$ باشد. در این صورت جبر $(\mathcal{A}, \cap, \cup, \emptyset, \{۱, ۲\}, ')$ یک جبر بولی است.

تعریف ۶.۱.۱. [۱۰] یک مشبکه مانده، یک جبر $(A, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, ۰, ۱)$ از نوع $(۲, ۲, ۲, ۲, ۰, ۰)$ است که مجهز به رابطه $\leq$ و دارای ویژگی های زیر می باشد:

۱. $(A, \wedge, \vee, ۰, ۱)$ یک مشبکه کراندار است.

۲. $(A, \odot, ۱)$ یک نیم گروه آبلی است.

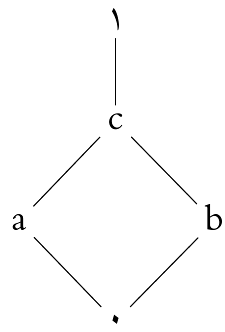
۳. $\odot$ و $\rightarrow$ یک جفت الحاقی هستند. یعنی $c \leq a \rightarrow b$ اگر و تنها اگر $a \odot c \leq b$ ، برای

هر $a,b,c \in A$.

مثال ۷.۱.۱. فرض کنید $L=\{0,a,b,c,1\}$ با $0<a,b<c<1$ باشد به قسمی که a,b غیر قابل مقایسه هستند. در این صورت $(L,\odot,\wedge,\vee,\to,0,1)$ یک مشبکه مانده با عمل‌های زیر است:

$\odot$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	a	a
b	0	0	b	b	b
c	0	a	b	c	c
1	0	a	b	c	1

$\to$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	b	1	b	1	1
b	a	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1



تعریف ۸.۱.۱. [۶] جبر $(A,\oplus,*,0)$ از نوع $(2,1,0)$، یک MV-جبر است، اگر در شرایط زیر صدق کند:

($MV1$) $(A,\oplus,0)$ یک تکواره آبلی است.

($MV2$) $(a^*)^*=a$.

($MV3$) $0^*\oplus a=0^*$.

($MV4$) $(a^*\oplus b)^*\oplus b=(b^*\oplus a)^*\oplus a$.

نکته. ثابت ۱ و عملهای کمکی $\odot$ و $\ominus$ را به صورتهای زیر تعریف می کنیم:

(i) $a \odot b = (a^* \oplus b^*)^*$.

(ii) $a \ominus b = a \odot b^*)$.

(iii) $1 = 0^*$.

نتیجه ۹.۱.۱. [۶] *برای هر* a, b *در یک* MV*-جبر شرایط زیر برقرار است:*

$$a \vee b = a \oplus (b \odot a^*) \quad \text{و} \quad a \wedge b = a \odot (b \oplus a^*)$$

لذا نتیجه می شود $(A, \odot, 1)$ *یک نیم گروه آبلی است و جبر* $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ *یک مشبکه توزیع پذیر کراندار است.*

تعریف ۱۰.۱.۱. [۹] فرض کنید M و N دو MV-جبر باشند. $f : M \to N$ را همریختی MV-جبری گویند، اگر برای $x, y \in M$ شرایط زیر برقرار باشند:

(i) $f(0) = 0$.

(ii) $f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y)$.

(iii) $f(x^*) = (f(x))^*$.

مثال ۱۱.۱.۱. [۹] مجموعه اعداد حقیقی در بازه $[0, 1]$، با عملهای زیر

$$x \oplus y = min(1, x + y), \quad x \odot y = max(0, x + y - 1), \quad x^* = 1 - x.$$

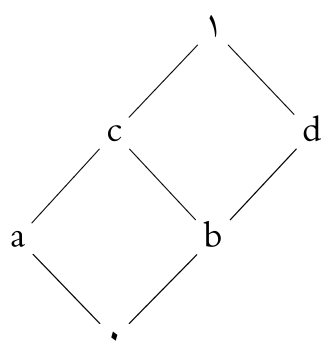
یک MV-جبر است.

مثال ۱۲.۱.۱. [۲۳] فرض کنید $A = \{0, a, b, c, d, 1\}$ با $0 < a, b < c < 1$ و $1 > b < d < 0$ باشد بطوریکه a, b و همچنین c, d غیرقابل مقایسه اند. عملهای $\oplus$ و

$*$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$\oplus$	۰	a	b	c	d	۱
۰	۰	a	b	c	d	۱
a	a	a	c	c	۱	۱
b	b	c	d	۱	d	۱
c	c	c	۱	۱	۱	۱
d	d	۱	d	۱	d	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

$*$	۰	a	b	c	d	۱
	۱	d	c	b	a	۰



آنگاه $(A,\oplus,*,0)$ یک MV-جبر متناهی است.

تعریف ۱.۱.۱۳. [۴] جبر $(G,+,-,0,\vee,\wedge,u)$ را یک l-گروه گویند، اگر در شرایط زیر صدق کند:

(i) $(G,+,-,0)$ یک گروه باشد.

(ii) $(G,\vee,\wedge)$ یک مشبکه باشد.

(iii) اگر $x \leq y$، آنگاه برای هر $a,b \in G$، $a+x+b \leq a+y+b$.

یک l-گروه را یک lu-گروه گویند اگر $u > 0$ یک عنصر یکه قوی برای G باشد (یعنی، برای هر $x \in G$ یک عدد طبیعی $n \geq 1$ وجود داشته باشد بطوریکه $-nu \leq x \leq nu$).

مثال ۱.۱.۱۴. [۲۵] فرض کنید $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ضرب دکارتی مجموعه اعداد صحیح باشد

که دارای ترتیب قاموسی به صورت زیر است:

$$(n_۱, n_۲) \leq (m_۱, m_۲) \quad \text{اگر وتنها اگر} \quad n_۱ < m_۱ \quad \text{یا} \quad n_۱ = m_۱ \text{ و } n_۲ \leq m_۲.$$

لذا G یک l-گروه آبلی است که $u = (۱, ۰)$ عنصر یکه قوی آن است.

lu-گروه $(G, +, ۰, \leq)$ و یک عضو مثبت $u > ۰$ از G مفروض است. بازه $[۰, u]$ را می توان یک MV-جبر $[۰, u]_G = ([۰, u], \oplus, *, ۰)$ با عملهای

$$x^* = u - x \quad \text{و} \quad x \oplus y := (x + y) \wedge u,$$

برای هر $x, y \in [۰, u]$، در نظر گرفت. حال $\mathcal{UG}$ را رسته همه lu-گروهها در نظر می گیریم که عضوهای آن (G, u) هستند بطوریکه G یک l-گروه آبلی با یکه قوی u از G است و ریختهایش، همریختی‌های l-گروهی هستند که عنصر یکه قوی را حفظ می کنند.
همچنین $\mathcal{MV}$ را رسته ای در نظر می‌گیریم که اشیاء آن همه MV-جبرها و ریختهای آن، همریختی‌های MV-جبری است. نتیجه مهم زیر منجر برقرار است، رسته MV-جبرها معادل رسته‌ای l-گروههای آبلی با عنصر یکه قوی است [۲۴].

تابعگونی که هم ارزی رسته ای بین رسته های $\mathcal{UG}$ و $\mathcal{MV}$ را تعریف می کند به صورت زیر است:

$$\Gamma : \mathcal{UG} \longrightarrow \mathcal{MV},$$

بطوریکه $\Gamma(G, u) := [۰, u]_G$ برای هر lu-گروه (G, u) و $\Gamma(h) := h \mid_{[۰,u]}$ ، برای هر همریختی lu-گروهی h است. بنابراین، برخی از تعاریف و ویژگی‌ها از l-گروه ها به MV-جبرها منتقل می‌شوند. برای مثال، یک جمع گروهی به یک عمل جزئی که تحدید به یک بازه است، تبدیل می‌شود که یک جمع جزئی در یک MV-جبر A به صورت زیر تعریف می شود:

$x + y$ تعریف شده است اگر و تنها اگر $x \leq y^*$ ، برای هر $x, y \in A$.

به این معنی، $x + y := x \oplus y$، جایی که $+$ یک جمع جزئی روی A است [۱۵]. همچنین،

قانون حذف نیز صادق است یعنی اگر $z+x \leq z+y$، آنگاه $x \leq y$.

در ادامه این بخش، A یک MV-جبر دلخواه است.

لم ۱.۱.۱۵. [۹] *برای هر $x,y \in A$ شرایط زیر معادلند:*

(۱) $x^* \oplus y = 1$.

(۲) $x \odot y^* = 0$.

(۳) یک عضو $z \in A$ *وجود دارد بطوریکه* $x \oplus z = y$.

(۴) $y = x \oplus (y \ominus x)$.

برای هر $x,y \in A$، $x \leq y$ اگر و تنها اگر x و y در شرایط معادل (۱)-(۴) *در لم بالا صدق کنند.*

لم ۱.۱.۱۶. [۹] *برای $x,y,z \in A$ خواص زیر برقرار است:*

(۱) $x \leq y$ *اگر و تنها اگر* $y^* \leq x^*$.

(۲) *اگر* $x \leq y$*، آنگاه* $x \oplus z \leq y \oplus z$ *و* $x \odot z \leq y \odot z$.

(۳) $(x \vee y)^* = x^* \wedge y^*$ *و* $(y \wedge x)^* = y^* \vee x^*$.

(۴) *اگر* $x \leq y$ *و* $z \leq t$*، آنگاه* $x \oplus z \leq y \oplus t$.

(۵) $x \odot (y \vee z) = (x \odot y) \vee (x \odot z)$.

(۶) $x,y \leq x \oplus y$ *و* $x \odot y \leq x,y$ *در نتیجه،* $x \leq nx = x \oplus \ldots \oplus x$ *و* $x^n = x \odot \ldots \odot x \leq x$.

(۷) $x \oplus x^* = 1$ *و* $x \odot x^* = 0$.

قضیه ۱.۱.۱۷. [۹] *اگر* $x \in B(A)$*، برای هر $y \in A$ شرایط زیر برقرار است:*

(۱) $x \wedge y = x \odot y$.

(۲) $x \odot x = x$ *و* $x \oplus x = x$.

(۳) $x \vee y = x \oplus y$.

تعریف ۱.۱.۱۸. [۹] برای هر $x, y \in A$ تابع فاصله چانگ، در یک MV-جبر A به صورت زیر است:

$$d : A \times A \to A, \quad d(x,y) = (x \odot y^*) \oplus (y \odot x^*).$$

لم ۱.۱.۱۹. [۹] *برای* $x, y, z \in A$*، شرایط زیر برقرار است:*

(i) $d(x,y) = ۰$ *اگر و تنها اگر* $x = y$.

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$.

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) \oplus d(y,z)$.

(iv) $d(x^*, y^*) = d(x,y)$.

تعریف ۱.۱.۲۰. [۹] فرض کنید I یک زیر مجموعه A باشد. I را یک ایده ال از A گوییم اگر و تنها اگر در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $۰ \in I$.

(۲) اگر $x, y \in I$، آنگاه $x \oplus y \in I$.

(۳) اگر $x \in I$ و $y \leq x$، آنگاه $y \in I$.

مجموعه تمام ایده ال‌های یک MV-جبر را با $Id(A)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱.۱.۲۱. [۹] یک ایده ال سره P از یک MV-جبر A را اول گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in A$،

$$x \odot y^* \in P \quad \text{یا} \quad y \odot x^* \in P$$

یا اگر $x \wedge y \in P$، آنگاه $x \in P$ یا $y \in P$ نتیجه شود. یا معادل آن اگر $I, J \in Id(A)$ بطوریکه $I \cap J \subseteq P$، آنگاه $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$.

قرارداد: مجموعه تمام ایده ال‌های اول A را با $Spec(A)$ نشان می‌دهیم می دهیم.

تعریف ۲۲.۱.۱. [۹] یک ایده ال I از A را ماکسیمال گوییم اگر و تنها اگر در شرایط زیر صدق کند:

(۱) I سره باشد،

(۲) برای ایده ال دیگری چون J به قسمی که $I \subseteq J$، نتیجه شود $I = J$ یا $J = A$.

تعریف ۲۳.۱.۱. [۹] یک عضو $x \in A$ دارای مرتبه n است، اگر n کوچکترین عدد طبیعی (در صورت وجود) باشد به قسمی که $nx = ۱$ و آن را به صورت $\text{ord}(x) = n$ نشان می‌دهیم. در این حالت گوییم x دارای مرتبه متناهی است و می نویسیم $ord(x) < \infty$.
یک MV-جبر A را موضعاً متناهی گوییم، هرگاه هر عضو ناصفرش دارای مرتبه متناهی باشد.

قضیه ۲۴.۱.۱. [۹] *اگر A یک MV-جبر موضعاً متناهی باشد، آنگاه A یک MV-جبر خطی مرتب (زنجیر) است.*

لم ۲۵.۱.۱. [۹]

(۱) *هر ایده‌ال اول A، زیر مجموعه یک ایده‌ال ماکسیمال منحصربفرد از A است.*

اگر I یک ایده ال سره از A باشد، آنگاه

(۲) *اگر $a \in A - I$، آنگاه یک ایده ال اول P از A وجود دارد به قسمی که $I \subseteq P$ و $a \notin P$.*

در حالت خاص، برای هر عضو ناصفر $a \in A$، یک ایده ال اول P وجود دارد بطوریکه $a \notin P$.

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض کنید I یک ایده‌ال از A باشد.

- [۲۱] I یک ایده‌ال استلزامی A است، اگربرای هر $x, y, z \in A$ بطوریکه $z \odot (y^* \odot x^*) \in I$ و $y \odot x^* \in I$ باشند، آنگاه نتیجه شود $z \odot x^* \in I$.