دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی

فشردگی ضعیف و خاصیت نقطه ثابت برای نگاشت‌های آفین

توسط

رویا حبیبی

استاد راهنما

دکتر سید مسعود امینی

اسفند ۱۳۹۰

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **خانم رؤیا حبیبی** رشته **ریاضی‌محض** به شماره دانشجویی ۸۸۵۲۶۵۱۱۰۲ تحت عنوان: **«فشردگی ضعیف و خاصیت نقطه ثابت برای نگاشت‌های آفین»** را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمسعود امینی	دانشیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر فرشته سعدی	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر خسرو تاج‌بخش	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر داریوش بهمردی	دانشیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر خسرو تاج‌بخش	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته ریاضی محض است که در سال ۹۵ در دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر مسعود امینی ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر — و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر — از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب رویا حسینی دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: رویا حسینی

تاریخ و امضا: ۹۱/۱/۲۹

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱٥ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب رویا حسینی دانشجوی رشته ریاضی محض ورودی سال تحصیلی ۸۸ مقطع کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:..................

تاریخ: ....

۹۱/۱/۲۹

فشردگی ضعیف و خاصیت نقطه ثابت برای نگاشت‌های آفین

چکیده

در این پایان نامه که مرجع‌های اصلی آن [۲] و [۳] می‌باشد، ابتدا عدم وجود نقطه‌ی ثابت برای نگاشت‌های آفین بر روی یک زیرمجموعه‌ی کراندار محدب و بسته از فضای باناخ که فشرده ضعیف نباشد مورد مطالعه قرار داده می‌شود و سپس ویژگی‌هایی از زیرمجموعه محدب ضعیف فشرده فضای باناخ $L-$نشاننده مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی : فضای باناخ، نگاشت آفین، دنباله اساسی، نقطه ثابت، مجموعه ضعیف فشرده

فهرست مندرجات

مقدمه

لین [۱] و استرنفلد [۲] مشخصات کاملی از فشردگی نرم را برای زیرمجموعه‌های محدب از یک فضای باناخ با استفاده از خصوصیات نقطه ثابت ارئه نمودند. آنها ثابت کردند که اگر یک مجموعه محدب K فشرده نباشد، در این صورت نگاشت لیپ‌شیتز $f : K \to K$ با این خاصیت که $\inf\{\|x - f(x)\|; x \in K\} > 0$ وجود دارد. بنابراین نتیجه می‌شود که یک مجموعه محدب در یک فضای باناخ برای نگاشت‌های لیپ‌شیتز دارای خاصیت نقطه ثابت است اگر و تنها اگر فشرده باشد. در این پایان نامه ما مسائل مشابه در مورد فشردگی ضعیف مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

فرض کنیم X فضایی باناخ باشد می‌گوئیم زیرمجموعه کراندار محدب بسته C از X برای کلاسی از نگاشت‌ها دارای خاصیت نقطه ثابت کلی [۳] است، هرگاه هر نگاشت از زیرمجموعه بسته محدب از C به خودش که به این کلاس تعلق دارد یک نقطه ثابت داشته باشد. ما نشان خواهیم داد که فشردگی ضعیف مجموعه‌های محدب می‌تواند با خاصیت نقطه ثابت کلی برای کلاسهایی از نگاشت‌های آفین مشخص شود. یک خود– نگاشت [۴] آفین پیوسته از یک مجموعه‌ی محدب بسته به طور ضعیف پیوسته است. قضیه شادر–تیخونوف [۵] نشان می‌دهد که خود– نگاشت آفین پیوسته از یک زیرمجموعه‌ی به طور ضعیف فشرده محدب C از یک فضای باناخ X، یک نقطه ثابت دارد. در نهایت

---

[۱] Lin

[۲] Sternfeld

[۳] generic

[۴] self-mapping

[۵] Schauder- Tychonoff

برای یک مجموعه کراندار محدب بسته C که به طور ضعیف فشرده نباشد، یک زیرمجموعه محدب بسته K را می‌سازیم که دارای یک خود− نگاشت آفین پیوسته بدون نقطه ثابت باشد. بنابراین در حالت کلی یک زیرمجموعه‌ی کراندار محدب بسته از یک فضای باناخ به طور ضعیف فشرده است اگر و تنها اگر دارای خاصیت نقطه ثابت کلی برای نگاشت‌های آفین پیوسته باشد.

در این پایان نامه ما ثابت می‌کنیم که یک زیرمجموعه کراندار محدب بسته C از c_0 به طور ضعیف فشرده است اگر و تنها اگر C برای نگاشت‌های آفینی که به طور یکنواخت لیپ‌شیتز هستند، دارای خاصیت نقطه ثابت کلی باشد. در حقیقت ما ثابت می‌کنیم که این نگاشت‌ها می‌توانند با ثابت لیپ‌شیتز به طور دلخواه نزدیک به ۱ انتخاب شوند.

این پایان نامه شامل ۳ فصل می‌باشد که در فصل اول مقدماتی در زمینه آنالیز تابعی بیان می‌شود.در فصل دوم به بررسی عدم وجود نقطه‌ی ثابت در نگاشت‌های آفین بر روی یک زیرمجموعه‌ی کراندار محدب و بسته از فضای باناخ که فشرده ضعیف نباشد مورد می‌پردازیم.در فصل سوم ویژگی‌هایی از زیرمجموعه محدب ضعیف فشرده فضای باناخ $L-$نشاننده مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فصل ۱

پیش نیازها

این فصل شامل مطالب مقدماتی از فضاهای برداری توپولوژیکی و برخی از قضیه‌های آنالیز تابعی است که در فصل های بعدی از آن‌ها استفاده خواهد شد. بیشتر مطالب این فصل از مرجع [۱۰] استفاده شده است.

تعریف ۱.۰.۱ فضای برداری X یک فضای نرمدار است، اگر به هر $x \in X$ عدد حقیقی و نامنفی مانند $||x||$ به نام نرم x چنان باشد که

الف) برای هر x,y در X، $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$،

ب) اگر $x \in X$ و α یک اسکالر باشد، در این صورت $||\alpha x|| = |\alpha| \, ||x||$،

ج) اگر $x \neq ۰$ در این صورت $||x|| > ۰$.

تعریف ۲.۰.۱ فضای برداری نرمدار که نسبت به متر نرم کامل باشد را فضای باناخ می‌گوییم.

تعریف ۳.۰.۱ فرض کنیم τ یک توپولوژی بر فضای برداری X باشد به طوری که

الف) هر نقطه X یک مجموعه بسته باشد،

ب) اعمال فضای برداری نسبت به τ پیوسته باشد.

در این شرایط می‌گوییم τ یک توپولوژی برداری بر X است و X یک فضای برداری توپولوژیک می‌باشد.

تعریف ۴.۰.۱ زیر مجموعه E از فضای برداری توپولوژیک را کراندارمی‌گوییم، اگر برای هر همسایگی V از صفر، عددی مانند $s > 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $t > s$ داشته باشیم $E \subset tV$.

تعریف ۵.۰.۱ فضای دوگان فضای برداری توپولوژیک X، فضای برداری X^* است که عناصر آن تابعک‌های خطی پیوسته روی X هستند. جمع و ضرب اسکالر در X^* به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2)x = \Lambda_1 x + \Lambda_2 x$$
$$(\alpha\Lambda)x = \alpha.\Lambda x$$

این اعمال X^* را به یک فضای برداری تبدیل می‌کند.

تعریف ۶.۰.۱ فرض کنیم X یک مجموعه باشد و $\mathcal{F}$ خانواده‌ای غیر تهی از نگاشت‌های $f : X \longrightarrow Y_f$ باشد که هر Y_f یک فضای توپولوژیکی است. همچنین فرض کنیم τ خانواده تمام اجتماع‌های اشتراک‌های متناهی از مجموعه‌های $f^{-1}(V)$ باشد که $f \in \mathcal{F}$ و $V \subset Y_f$ باز باشد. در این صورت τ یک توپولوژی روی X است. در حقیقت ضعیف‌ترین توپولوژی روی X است که تحت آن هر $f \in \mathcal{F}$ پیوسته می‌شود. اگر τ' توپولوژی دیگری با این خاصیت باشد، در این صورت $\tau \subset \tau'$. این τ توپولوژی ضعیف روی X القا شده توسط $\mathcal{F}$ یا $\mathcal{F}-$توپولوژی X نامیده می‌شود.

تعریف ۷.۰.۱ فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک باشد که دوگانش نقاط X را جدا می‌کند. X^* توپولوژی X را توپولوژی ضعیف X می‌نامیم.

تعریف ۸.۰.۱ مجموعه $E \subset X$ به طور ضعیف کراندار است اگر و فقط اگر هر $\Lambda \in X^*$ یک تابع کراندار بر E باشد.

تعریف ۹.۰.۱ فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک و دوگانش X^* باشد. فضای دوگان X^* را با X^{**} نشان می‌دهیم. توپولوژی تولید شده توسط X به عنوان زیر فضایی از X^{**} را توپولوژی ضعیف ستاره روی X^{**} می‌نامیم. X^{**} فضایی مرکب از توابع روی X است و به طور خلاصه ضعیف ستاره توپولوژی، همگرایی نقطه به نقطه است.

تعریف ۱۰.۰.۱ فرض کنید X و Y فضای باناخ باشند و U گوی یکه باز در X باشد. نگاشت خطی $T : X \to Y$ فشرده است، اگر $\overline{T(U)}$ در Y فشرده باشد.

تعریف ۱۱.۰.۱ فرض کنید (x_n) دنباله ای در فضای باناخ X باشد. پیمایش خطی بسته[۱] این دنباله را با $[x_n]$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۰.۱ یک دنباله (x_n) در فضای باناخ X پایه شادر[۲] X نامیده می‌شود اگر به ازای هر $x \in X$ دنباله یکتا از اسکالرهای (a_n) موجود باشد به طوری که $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. یک دنباله (x_n) که یک پایه شادر برای بستار فضای خطی تولید شده توسط (x_n) است را یک دنباله اساسی می‌نامیم. به بیان دیگر (x_n) را دنباله اساسی گوییم هر گاه به ازای هر $x \in [x_n]$، اسکالرهای $t_1, t_2, \dots$ موجود باشند به طوری که x دارای بسط منحصر به فردی به صورت $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ باشد.

تعریف ۱۳.۰.۱ فرض کنیم X فضای برداری باشد، $C \subset X$ را محدب می گوییم هرگاه به ازای هر $\lambda \in [0, 1]$ و هر $x, y \in C$ داشته باشیم

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in C$$

تعریف ۱۴.۰.۱ غلاف محدب[۳] یک مجموعه A در یک فضای برداری X مجموعه تمام ترکیبات محدب اعضای A است. یعنی، مجموعه تمام جمع‌های $t_1 x_1 + \dots + t_n x_n$ که در آن n

---

[۱] closed linear span

[۲] Schauder

[۳] convex hull

دلخواه و به ازای هر $i \in \{1, ..., n\}$، $x_i \in A$ و $t_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$. غلاف محدب A خود محدب است و برابر است با اشتراک تمام مجموعه‌های محدب شامل A که آن را با CoA نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۰.۱ (قضیه باناخ آلوگلو) هرگاه V یک همسایگی صفر در فضای برداری توپولوژیک X باشد و

$$K = \{\Lambda \in X^*; |\Lambda x| \leq 1 \text{ ، به ازای هر } x \in V\}$$

آنگاه K ضعیف ستاره فشرده می‌باشد.

فصل ۲

توصیف مجموعه های محدب و ضعیف فشرده

در این فصل، پس از ارائه‌ی چند تعریف و قضیه، عدم وجود نقطه‌ی ثابت در نگاشت‌های آفین بر یک زیرمجموعه‌ی کراندار محدب و بسته از فضای باناخ که فشرده ضعیف نباشد را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۰.۲ خود نگاشت T از مجموعه محدب C را آفینی می‌گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in C$ و $\lambda \in [۰, ۱]$ داشته باشیم

$$T(\lambda x + (۱ - \lambda)y) = \lambda Tx + (۱ - \lambda)Ty$$

تعریف ۱۶.۰.۲ فرض کنیم X یک فضای نرمدار و $C \subseteq X$ محدب باشد، نگاشت $T : C \to C$ را غیرگسترده[۱] می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in C$ داشته باشیم

$$||Tx - Ty|| \leq ||x - y||$$

[۱] nonexpansive

تعریف ۱۷.۰.۲ T را نگاشت لیپ شیتز یکنواخت با ثابت M می گوییم هرگاه برای هر $x, y \in C$ و $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم

$$||T^n x - T^n y|| \leq M||x - y||.$$

تعریف ۱۸.۰.۲ فرض کنیم (x_n) دنباله‌ای اساسی در فضای باناخ X باشد، در این صورت به ازای هر n، تصویر کانونی [۲] P_n روی $[x_n]$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} t_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i$$

قضیه ۲.۰.۲ [قضیه ۴.۵.٦ (باناخ)]. فرض کنیم $\{e_i\}$ پایه شادر در فضای باناخ X باشد. تصویرهای کانونی P_n متناظر با $\{e_i\}$ به طور یکنواخت کراندارند، یعنی $\sup\{||P_n|| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$.

تعریف ۱۹.۰.۲ ثابت اساسی [۳] دنباله اساسی (x_n) را با $S = \sup\{||P_n|| : n \in \mathbb{N}\}$ تعریف می‌کنیم. واضح است که

$$\inf\{||x - y|| : x \in [x_i]_{i=1}^{n}, ||x|| \geq a, y \in [x_i]_{i=n+1}^{\infty}, n \in \mathbb{N}\} \geq \frac{a}{S}$$

زیرا اگر $z \in [x_i]_{i=1}^{\infty}$ در این صورت $||P_n z|| \leq ||P_n|| \, ||z||$. تعریف می‌کنیم $z := x - y$ که $x \in [x_i]_{i=1}^{n}$ و $y \in [x_i]_{i=n+1}^{\infty}$. بنابراین

$$||\sum_{i=1}^{n} t_i x_i|| \leq ||P_n|| \, ||x - y||.$$

---

[۲] canonical

[۳] basis constant

که t_i ها دنباله اسکالرها هستند. حال از طرفین روی تمام ترکیبات خطی n تایی x_i ها سوپریمم می‌گیریم و چون $||x|| \geq a$ بنابرین

$$\sup || \sum_{i=1}^{n} t_i x_i || \geq a.$$

حال داریم $a \leq \sup || \sum_{i=1}^{n} t_i x_i || \leq S||x-y||$. با اینفیمم گرفتن از دو طرف نامساوی داریم

$$\frac{a}{S} \leq \inf\{||x-y|| : x \in [x_i]_{i=1}^{n}, ||x|| \geq a, y \in [x_i]_{i=n+1}^{\infty}, n \in \mathbb{N}\}.$$

به‌علاوه، قرار می‌دهیم $R_n = Id_{[x_n]} - P_n$ و

$$S^{+}(\{x_n\}) = \{x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n : t_n \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1\}.$$

قضیه ۳.۰.۲ فرض کنیم (x_n) دنباله‌ای کراندار در فضای باناخ X باشد که شامل هیچ زیردنباله به طور ضعیف همگرایی نباشد، در این صورت

(۱) زیردنباله (x_{n_k}) و تابعک $f \in X^*$ موجود است به طوری که (x_{n_k}) یک دنباله اساسی است و $a = \inf\{f(x_{n_k}) : k \in \mathbb{N}\} > 0$، $g = (\frac{1}{a})f$ و $y_k = (\frac{a}{f(x_{n_k})})x_{n_k}$ آنگاه به ازای هر $k \in \mathbb{N}$، $g(y_k) = 1$.

(۲) $\overline{Co}(y_k) = S^{+}(\{y_k\})$.

برهان. به مرجع [۵] مراجعه کنید.

تعریف ۲۰.۰.۲ دنباله (y_k) از بردارهای غیر صفر X را یک دنباله اساسی قطعه‌ای برای دنباله اساسی (x_n) می‌گوییم هر گاه دنباله (α_n) از اسکالرها و دنباله صعودی از اعداد صحیح $0 \leq p_1 < p_2 < \dots$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $k \in \mathbb{N}$،

$$y_k = \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} \alpha_i x_i$$

نشان می‌دهیم که (y_k) نیز دنباله‌ای اساسی است و ثابت اساسی آن از ثابت اساسی (x_n) بیشتر نیست. بدین منظور نشان می‌دهیم اگر $y \in [y_k]$، آنگاه $y = \sum_{k=1}^{\infty} t_k y_k$ که t_iها منحصربه فردند. زیرا

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=1}^{\infty} t_k y_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} t_k \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} \alpha_i x_i \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} t_k \alpha_i x_i \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} t_k \alpha_{p_k+1} x_{p_k+1} + \dots + t_k \alpha_{p_{k+1}} x_{p_{k+1}} \end{aligned}$$

چون p_iها اکیدا صعودی‌اند لذا تساوی آخر ترکیباتی از x_kها هستند. چون دنباله (x_n) اساسی است لذا به ازای هر i، $t_i\alpha_i$ یکتاست و در نتیجه t_iها نیز یکتا می‌شوند بنابراین (y_k) دنباله‌ای اساسی است. با توجه به مطالب بالا واضح است که $[y_k] \subset [x_n]$ در نتیجه ثابت اساسی (y_k) از ثابت اساسی (x_n) بیشتر نیست.

مثال ۱.۰.۲ هر زیر دنباله از یک دنباله اساسی (x_n) خود یک دنباله اساسی است.

برهان . فرض کنید (x_{n_k}) زیر دنباله ای از (x_n) باشد. دنباله (α_n) از اسکالرها را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $\alpha_{n_k} = 1$ و بقیه عناصر برابر صفر باشند. هم چنین با قراردادن دنباله صعودی (p_n) که $p_1 = 0$ و $p_{n_k+1} = n_k$ خواهیم داشت

$$x_{n_k} = \sum_{i=p_{n_k}+1}^{p_{n_{k+1}}} a_i x_i$$

یعنی (x_{n_k}) یک پایه قطعه ای است و بنابراین یک دنباله اساسی است.

تعریف ۲۱.۰.۲ فرض کنید (x_n) و (y_n) دنباله های اساسی باشند. گوئیم (x_n) با (y_n) هم ارز است اگر و فقط اگر ثابت های $M_2, M_1 \in (0,\infty)$ وجود داشته باشند به طوری که برای هر دنباله (t_n) از اسکالرها که سری‌های زیر همگرا باشند داشته باشیم،

$$M_1 \|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\| \le \|\sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n\| \le M_2 \|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\| \qquad (1)$$

گوئیم دنباله (x_n)، $\lambda-$ هم ارز با (y_n) است اگر $\lambda \leq \frac{M_۲}{M_۱}$. توجه داشته باشیم که رابطه $\lambda-$هم‌ارزی متقارن است زیرا از رابطه (۱) در بالا نتیجه می‌شود که

$$\frac{۱}{M_۲}||\sum_{n=۱}^{\infty} t_n y_n|| \leq ||\sum_{n=۱}^{\infty} t_n x_n|| \leq \frac{۱}{M_۱}||\sum_{n=۱}^{\infty} t_n y_n||$$

بنابراین $\lambda \leq \frac{M_۲}{M_۱} = \frac{\frac{۱}{M_۱}}{\frac{۱}{M_۲}}$.

قضیه ۴.۰.۲ فرض کنید (x_n) دنباله اساسی با ثابت اساسی K در فضای باناخ X باشد و فرض کنید $M = \inf\{||x_n|| \ : \ n \in \mathbb{N}\} > ۰$. اگر (y_n) دنباله ای در X باشد به طوری که $s = \sum_{n=۱}^{\infty} ||x_n - y_n|| < \frac{M}{۲K}$. در این صورت رابطه (۱) برقرار است که $M_۱ = ۱ - \frac{۲Ks}{M}$ و $M_۲ = ۱ + \frac{۲Ks}{M}$. بنابراین (y_n) نیز یک دنباله اساسی است که $(۱ + \frac{۲Ks}{M})(۱ - \frac{۲Ks}{M})^{-۱}-$هم ارز (x_n) است.

برهان. فرض کنیم $x = \sum_{k=۱}^{\infty} t_k x_k$ در این صورت به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $P_n(x) = \sum_{k=۱}^{n} t_k x_k$ بنابراین

$$||\sum_{k=۱}^{n} t_k x_k|| = ||P_n(x)|| \leq ||P_n||||x|| \leq K||x||$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
|t_n|||x_n|| &\leq ||\sum_{k=۱}^{n-۱} t_k x_k|| + K||x|| \\
&= ||P_{n-۱}(x)|| + K||x|| \\
&\leq ||P_{n-۱}||||x|| + K||x|| \\
&\leq ۲K||x|| \\
|t_n|||x_n|| &\leq ۲K||x|| \\
M|t_n| \leq |t_n|||x_n|| &\leq ۲K||x||
\end{aligned}$$

بنابراین به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $|t_n| \leq \frac{۲K}{M}||x||$. در نتیجه داریم

$$\max_{n \in \mathbb{N}} |t_n| \leq \frac{۲K}{M}||x||$$

و چون داریم $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n - y_n|| < \infty$ لذا $\sum_{n=1}^{\infty} |t_n|||x_n - y_n|| < \infty$. بنابراین سری $\sum_{n=1}^{\infty} t_nx_n - t_ny_n$ همگراست و در نتیجه سری $y = \sum_{n=1}^{\infty} t_ny_n$ همگراست. حال در ادامه اثبات داریم

$$\begin{aligned} ||x-y|| &= ||\sum_{n=1}^{\infty} t_n(x_n - y_n)|| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|||x_n - y_n|| \\ &\leq \frac{2K}{M}||x|| \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n - y_n|| \\ &= \frac{2Ks}{M}||x|| \end{aligned}$$

با توجه به این که $||y|| - ||x|| \leq ||x-y||$ و $||x|| - ||y|| \leq ||x-y||$ حکم برقرار است. ■

نتیجه ۱.۰.۲ اگر دنباله های اساسی (x_n) و (w_n) معادل باشند، آنگاه هر دنباله قطعه ای آنها نیز با هم، هم ارز هستند.

برهان . فرض کنید $y_k = \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} a_ix_i$ و $z'_k = \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} a_iw_i$ دنباله های قطعه ای (x_n) و (w_n) باشند. چون (x_n) و (w_n) معادل هستند، اعداد صحیح و مثبت M_1 و M_2 وجود دارند به طوری که

$$M_1||\sum_{n=1}^{\infty} t_nw_n|| \leq ||\sum_{n=1}^{\infty} t_nx_n|| \leq M_2||\sum_{n=1}^{\infty} t_nw_n||$$

به ازای اسکالرهای (t_n) که سری‌های فوق همگرا باشد. حال برای دنباله (s_k) از اسکالرها داریم

$$\begin{aligned} M_1||\sum_{k=1}^{\infty} s_kz'_k|| &= M_1||\sum_{k=1}^{\infty} s_k \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} a_iw_i|| \\ &= M_1||\sum_{l=1}^{\infty} t_lw_l|| \\ &\leq ||\sum_{l=1}^{\infty} t_lx_l|| \\ &\leq M_2||\sum_{l=1}^{\infty} t_lw_l|| \\ &= M_2||\sum_{k=1}^{\infty} s_k \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} a_iw_i|| \\ &= M_2||\sum_{k=1}^{\infty} s_kz'_k|| \end{aligned}$$

که در آن $t_l = s_k a_l$ برای هر $p_k + ۱ \leq l \leq p_{k+۱}$ و برای بقیه t_l ها برابر صفر باشد. ■

تعریف ۲۲.۰.۲ فرض کنید $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ پایه استاندارد برای $c_\circ$ باشد. دنباله بردارهای $\sigma_n = \sum_{k=۱}^{n} e_k = (۱, ۱, ..., ۱, \circ, \circ, ...)$ را پایه‌ی جمعی می‌نامیم.

به راحتی دیده می‌شود که برای هر دنباله (t_n) از اسکالرها که سری $\sum_{k=\circ}^{\infty} t_n$ همگرا باشد داریم

$$\begin{aligned}\sum_{n=۱}^{\infty} t_n\sigma_n &= (t_۱, \circ, \circ, ...) + (t_۲, t_۲, \circ, ...) + ... + (t_k, t_k, .., t_k, \circ, ..) + ...\\ &= (\sum_{n=۱}^{\infty} t_n, \sum_{n=۲}^{\infty} t_n, ..., \sum_{n=k}^{\infty} t_n, ...) = \sigma\end{aligned}$$

و در نتیجه $\sum_{n=۱}^{\infty} t_n\sigma_n \in c_\circ$ و بنا بر تعریف نرم فضای $c_\circ$ داریم:

$$||\sum_{n=۱}^{\infty} t_n\sigma_n|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\sum_{k=n}^{\infty} t_k|.$$

فرض کنید $۱ < p < \infty$. فرض کنیم J_p فضای تمام دنباله‌های حقیقی $x = (x(n))$ را نشان دهد که $\lim_{n\to\infty} x(n) = \circ$ و

$$||x|| = \sup\ (\sum_{k=۱}^{m-۱} |x(q_k) - x(q_{k+۱})|^p)^{\frac{۱}{p}} < \infty,$$

که سوپریمم روی تمام دنباله‌های متناهی از اعداد صحیح مثبت $q_۱ < ... < q_m$ گرفته می‌شود. در حالتی که $p = ۲$ فضای J_p همان فضای جیمز[۴] است.

فرض کنید P_n تصویر پایه‌ی استاندارد (e_n) در فضای J_p باشد. در این صورت از آن‌جا که به ازای هر $x \in J_p$ داریم $x = \sum_{i=۱}^{\infty} x(i)e_i$. بنابراین

$$\begin{aligned}P_n x &= P_n(\sum_{i=۱}^{\infty} x(i)e_i)\\ &= \sum_{i=۱}^{n} x(i)e_i\\ &= (x(۱), ..., x(n), \circ, \circ, ...).\end{aligned}$$

[۴] James

بنابه گزاره (۲.b.۱) در مرجع[٦] $J_p{}^{**}$ فضای تمام دنباله‌های همگرای xاست که نرم زیر متناهی باشد

$$||x||_{J_p{}^{**}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} ||P_n x||_{J_p}$$

بنابراین J_p به طور ایزومتری شامل c_0 و l_1 نیست. همانطور که در مورد c_0 نشان دادیم، می‌توان نشان داد که بردارهای $\sigma_n = (1,...,1,0,0,...)$ تشکیل یک پایه شادر برای فضای J_p می‌دهد. اگر (t_k) دنباله‌ای از اسکالرها باشد به طوری که سری $\sum_{k=1}^{\infty} t_k\sigma_k$ در J_p همگرا باشد، آنگاه

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k\sigma_k = (\sum_{k=1}^{\infty} t_k, \sum_{k=2}^{\infty} t_k, ..., \sum_{k=n}^{\infty} t_k, ...)$$

بنابراین برای $x = \sum_{k=1}^{\infty} t_i\sigma_k$ و برای هر دنباله متناهی $q_1 < q_2 < \cdots, < q_m$، $\sum_{i=q_k}^{q_{k+1}-1} t_i$ $x(q_k) - x(q_{k+1}) =$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} ||\sum_{k=1}^{\infty} t_k\sigma_k|| &= \sup\left(\sum_{k=1}^{m-1} |x(q_k) - x(q_{k+1})|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup\left(\sum_{k=1}^{m-1} |\sum_{i=q_k}^{q_{k+1}-1} t_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

که سوپریمم روی تمام دنباله‌های متناهی $q_1 < ... < q_m$ از اعداد صحیح مثبت گرفته شده است.

قضیه ۵.۰.۲ . فرض کنید $(X, \|.\|)$ فضای موضعاً کراندار و $\|.\|$ $-p$، همگن ($\|\lambda x\| = |\lambda|^p\|x\|$) باشد. دنباله‌ی $\{e_n\}$ از اعضای مستقل خطی، پایه در X است اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

۱) ترکیب خطی $\{e_n\}$ در X چگال است،

۲) ثابت $k > 0$ وجود دارد به قسمی که $\|\sum_{i=1}^{n} t_i e_i\| \le k\|\sum_{i=1}^{m+1} t_i e_i\|$ برای هر عدد صحیح مثبت m و n.

به مرجع [۹] مراجعه شود.

حال نشان می‌دهیم که برای $p = 2$ فضای J_p انعکاسی نیست. فرض کنید $x = \{x_1, x_2, \cdots\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. فرض کنید

$$\|x\| = \sup\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_{p_{2i-1}} - x_{p_{2i}}\right)^2 + (x_{p_{2n+1}})^2\right]^{1/2},$$