بسم الله الرحمن الرحيم

١٥٣٨٩٨

دانشگاه پیام نورمشهد

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

QA
۲۳۴
۸۴/۸/۲۱

عنوان پایان نامه :

بررسی ایده آلهای B(H) و برد عملگر *- اشتقاق جردن

نام مؤلف :

۱۳۸۷ /۲/ ۱۱

تقی دانش پژوه

استاد راهنما :

سرکار خانم دکتر ثریا طالبی

استاد مشاور :

آقای دکتر علی جلیلیان عطار

تیرماه ۸۴

۱۰۳۸۹۸

جمهوری اسلامی ایران

شماره: ....

پیوست: ......

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب نامه پایان نامه

۸۳/۱۲/۱۱

پایان نامه تحت عنوان: بررسی ایده آلهای B(H)

که توسط آقای تقی داش پژوه تهیه و به هیئت داوران ارائه گردیده است مورد تائید می باشد

تاریخ دفاع: ۸۳/۴/۱۳ نمره: ۱۷/۵ هفده و نیم درجه ارزشیابی: خوب

اعضای هیئت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیئت داوران	مرتبه علمی	امضاء
خانم دکتر ثریا طالبی	استاد راهنما	استادیار	
آقای دکتر علی جبلیان عطار	استاد راهنمای همکار یا مشاور	استادیار	
دکتر شیرین حجازیان	استاد ممتحن	استادیار	
خانم دکتر عقیله حیدری	نماینده گروه آموزشی	استادیار	

فهرست مطالب

چکیده :

نام خانوادگی دانشجو : **دانش پژوه** نام : **تقی**

عنوان پایان نامه (رسانه) : **بررسی ایده آلهای B(H) و عملگر * - اشتقاق جردن**

استاد راهنما : **سرکار خانم ثریا طالبی**

استاد (اساتید) مشاور : **دکتر علی جلیلیان عطار**

مقطع تحصیلی: **کارشناسی ارشد** رشته :**ریاضی** گرایش : **محض** دانشگاه : **پیام نور مشهد**

دانشکده : **ریاضی** تاریخ فارغ التحصیلی : **تیرماه ۸۴** تعداد صفحه : **۷۰ صفحه**

کلید واژه ها : **ایده آل - عملگر * - اشتقاق جردن - فضای هیلبرت ، فضای B (H)**

در این پایان نامه سعی شده است که رفتار برد عملگر *- اشتقاق جردن روی فضای $B(H)$ بطور اجمال مورد نقد و بررسی قرار گیرد .

در فصل اول کوشیده ام که مفاهیم اصلی و اساسی نظریه عملگرها را که برای بحث اصلی لازم بوده است را به طوز خلاصه و مفید جمع آوری کنم اغلب مطالب به صورت تعریف یا قضیه بدون اثبات بیان شده اند چرا که اثبات این قضایا را می توان در هر کتاب مقدماتی جبر عملگرها یافت اما برخی از قضایا را که در فصلهای سوم و چهارم برای اثبات قضایای اصلی پایان نامه بدان ها استناد شده است به طور تفصیل اثبات شده اند یقینا" برای قضایای اثبات شده اثباتهای دیگری نیز می توان یافت ولی سعی شده اثباتی ارائه شود که بیشتر جنبه جبر عملگری داشته باشد که در این بین اثبات اغلب قضایا به کمک کتاب مفید « جبر عملگرها » ترجمه خانم دکتر ثریا طالبی بوده است ; در انتهای فصل اول انواع توپولوژی قابل بیان بر روی یک فضا معرفی و بررسی شده است که بیشتر مطالب از کتاب کادیسون است .

در فصل دوم خواص عمومی * اشتقاق جردن و ساختار این عملگر به تفضیل مورد نقد قرار گرفته است . خصوصا" قضیه ۲- ۱- ۵ و ۲- ۱- ۶ که ساختار عملگر و وجود چنین عملگری را بیان می کند . و در قسمت دوم این فصل رابطه بین عملگر *- اشتقاق جردن و توابع شبه درجه دو و درجه دو به تفضیل مورد بحث قرار گرفته است مطالب این فصل تماما" از روی مقالات جمع آوری و نتیجه گیری شده است .

در فصل سوم رابطه بین عملگر *- اشتقاق جردن و ایده آل های $B(H)$ مورد بررسی قرار گرفته است که در این بین ایده اصلی از مقاله دکتر تقوی است و قضیه ۳- ۱- ۱ و ۳- ۱- ۶ تمام شرایط لازم برای ایده آل بودن یک زیرفضای $B(H)$ را در اختیار ما می گذارد .

در فصل چهارم که موضوع اصلی پایان نامه است خواص برد عملگر *- اشتقاق جردن از لحاظ چگال بودن و بسته بودن با توجه به توپولوژی القائی از نرم و توپولوژی ضعیف (قوی) عملگرها مورد بررسی قرار گرفته است (قضایای ۴- ۱- ۷ و ۴- ۲- ۱۳ و ۴- ۳- ۸).

همچنین در این فصل رابطه بین برد عملگر J_A و ایده آل های $B(H)$ مورد بررسی قرار گرفته است . در قسمت دوم این فصل به این سؤال طبیعی جواب داده ایم که برد عملگر J_A ، در $B(H)$ با توجه به توپولوژی القا شده توسط نرم بسته است ؟ جواب سؤال با توجه به خاصیت طیف عملگر A در قضیه ۴- ۲- ۱۳ داده شده است .

فصل اول

تعاریف و قضایای کلی

تعریف ۱-۱-۱. فضای برداری مختلط H را یک فضای ضرب داخلی[1] گوییم اگر به هر جفت مرتب از بردارهای x و y در H یک عدد مختلط مانند $\langle x,y\rangle$ بنام حاصل ضرب داخلی (یا حاصل ضرب اسکالر) x و y چنان مربوط شده باشد که قواعد زیر برقرار باشند :

۱) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$

۲) اگر $x,y,z\in H$ $\quad\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$

۳) اگر $x,y\in H$, و α اسکالر باشد $\langle \alpha x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$

۴) به ازای هر $x\in H$ ، $\langle x,x\rangle\geq 0$

۵) $\langle x,x\rangle=0$ فقط اگر $x=0$

با استفاده از بند « ۴ » می توان نرم برای $x\in H$ تعریف کرد و آنرا ریشه دوم نامنفی $\langle x,x\rangle$ در نظر گرفت لذا :

$$\|x\|^2=\langle x,x\rangle$$

اگر فاصله بین x,y در H را بصورت $\|x-y\|$ تعریف کنیم می توان به راحتی نشان داد که تمام اصول یک فضای متری در H برقرار است .

تعریف ۱-۱-۲. هرگاه H یک فضای ضرب داخلی باشد که با متر القاء شده توسط نرمش تام باشد گوییم H یک فضای هیلبرت[2] است .

مثال ۱-۱-۳. اگر $H=L^2(\mu)$ و $\langle f,g\rangle=\int f\bar{g}d\mu$ و نرم را تعریف کنیم :

$$\|f\|=\left[\int|f|^2\,d\mu\right]^{1/2}$$

تمام اصول یک فضای هیلبرت برقرار است .

H را یک فضای هیلبرت حقیقی یا مختلط می گوییم هرگاه میدان F در تعریف فضای برداری ، فضای ضرب داخلی حقیقی یا مختلط باشد .

H را از بعد متناهی می گوییم هرگاه فضای برداری فضای ضرب داخلی از بعد متناهی باشد .

1- Product inner

2- Hilbert

تعریف ۱-۱-۴. یک فضای متریک را جدا شونده[3] گوییم هرگاه دارای زیر مجموعه چگال شمارش پذیر باشد .

تعریف ۱-۱-۵. در فضای هیلبرت H گوییم x بر y عمود است هرگاه $\langle x,y\rangle = 0$ و با علامت $x \perp y$ نمایش می دهیم .

$S \subset H$ را یک مجموعه متعامد یکه گوییم هرگاه :

۱) $\|x\| = 1$ به ازای هر $x \in H$

۲) $\langle x,y\rangle = 0$ اگر به ازای هر $x,y \in S$ ، $x \neq y$

یک دنباله متعامد یکه ماکزیمال پایه متعامد یکه نامیده می شود .

یک فضای هیلبرت را جدا شونده گوییم هرگاه شامل یک پایه متعامد شمارش پذیر باشد .

تعریف ۱-۱-۶. فضای برداری مختلط X را یک فضای خطی نرم دار[4] گوییم اگر به هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم x چنان مربوط شده باشد که :

۱) به ازای هر x,y در X ، $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

۲) به ازای هر α در F و به ازای هر $x \in X$ ، $\|\alpha x\| \le |\alpha|\|x\|$

۳) $\|x\| = 0$ تساوی $x = 0$ را ایجاب کند .

هرگاه فاصله بین x,y را برابر $\|x-y\|$ در نظر بگیریم می توان نشان داد که یک فضای خطی نرم دار یک فضای متری است .

تعریف ۱-۱-۷. یک فضای خطی نرمدار که با متر تعریف شده توسط نرمش تام باشد یک فضای باناخ[5] است .

هر فضای هیلبرت یک فضای باناخ است .

تعریف ۱-۱-۸ . فرض کنیم X,Y دو فضای خطی نرمدار باشد گردایه تمام نگاشت های خطی و کراندار از $X \to Y$ را با $B(X,Y)$ نمایش می دهیم .

فرض کنید $\Lambda : X \to Y$ یک نگاشت باشد گوییم Λ خطی[6] است هرگاه :

$$\Lambda(\alpha x, \beta y) = \alpha\Lambda x + \beta\Lambda y \quad \forall x,y \in X \quad و \quad \forall \alpha,\beta \in F$$

3- Separable
4- Normd spaces
5- Banach
6- Linear

گوییم نگاشت Λ کراندار است هرگاه وجود داشته $k \in F$ بطوریکه :

$$\|\Lambda x\| \le k\|x\| \qquad \forall x \in X$$

می توان نشان داد که $B(X,Y)$ یک فضای برداری است .

اگر $X = Y$ باشد آنگاه $B(X,X)$ را بصورت $B(X)$ نمایش می دهیم .

هرگاه H یک فضای هیلبرت باشد $B(H)$ گردایه تمام عملگرهای خطی ، کراندار و پیوسته از H در H است .

نرم در $B(H)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \qquad \forall T \in B(H)$$

اگر $Y = C$ باشد آنگاه $B(X, C)$ بصورت X^* نمایش داده می شود و آنرا دوگان[7] X گوییم . هر عنصر X^* را یک تابعک خطی[8] گوییم .

تعریف ۱-۱-۹. فرض کنیم F یک میدان باشد جبر A روی F ، یک فضای برداری است همراه با عمل اضافی بنام ضرب برداری که به هر جفت بردار α و β از A بردار $\alpha\beta$ از A بنام حاصل ضرب α و β را چنان وابسته می سازد بطوریکه :

۱) ضرب برداری شرکت پذیر است $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$

۲) ضرب برداری نسبت به جمع بخش پذیر است $(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \qquad \alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

۳) به ازای هر اسکالر $c \in F$ داریم $c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta$

اگر عضوی چون e در A موجود باشد به قسمی که به ازای هر α از A داشته باشیم :

$\alpha e = e\alpha = \alpha$ آنگاه A را یک جبر با عضو همانی گوییم .

اگر $\alpha\beta = \beta\alpha$ آنگاه جبر A را تعویض پذیر[9] گوییم .

تعریف ۱-۱-۱۰. جبر یکدار A همراه نرم تام $\|.\|$ که در شرایط زیر صدق می کند :

۱) $\|e\| = 1$

7- dual
8- Functinoal Linear
9- Commutant

۲) $\|xy\| \le \|x\|\|y\|$ به ازای تمام y, x ها در A.

یک جبر باناخ گوییم .

مثال ۱-۱-۱۱. اگر K یک فضای هاسدروف باشد آنگاه $C(K)$ یک جبر باناخ با نرم سوپریمم و اعمال نقطه وار است .

اگر H یک فضای هیلبرت باشد $B(H)$ یک جبر باناخ با نرم عملگر و ضرب عملگر (ترکیب) است عملگر همانی I ، یکه ضربی است .

اگر A یک جبر باناخ و I ایده آل بسته دو طرفه A باشد آنگاه جبر خارج قسمت های A/I یک جبر باناخ با نرم (خارج قسمتی) زیر است :

$$\|[x]\| = \inf\{\|x-y\| : y \in I\} \quad \text{و} \quad [x] \in A/I$$

تعریف ۱-۱-۱۲. یک عملگر $K \in B(H)$ فشرده[10] است هرگاه به ازای هر مجموعه کراندار S از بردارهای H مجموعه $\{ks, s \in S\}$ فشرده باشد .

در $B(H)$ مجموعه تمام عملگرهای فشرده را با $K(H)$ نمایش می دهیم .

یک عملگر $K \in B(H)$ فشرده است اگر برای هر دنباله کراندار مانند $\{x_n\}$ از بردارهای H ، دنباله $\{Kx_n\}$ دارای زیر دنباله ای همگرا باشد .

رتبه یک عملگر بعد برد آن تعریف می شود .

با استفاده از قضیه وایراشتراس – بولتزانو[11] که بیان می کند هر دنباله کراندار در c^n دارای زیر دنباله ای همگراست به آسانی می توان دید که هر عملگر از رتبه متناهی فشرده است .

هر عملگر روی فضای هیلبرت فشرده است اگر و تنها اگر H از بعد متناهی باشد .

قضیه : ۱-۱-۱۳. $K(H)$ یک ایده آل در $B(H)$ است .

10 - Compact
11 - Boltzano - Weirstrass

اثبات : کافی است ما نشان دهیم که اگر $A,B \in K(H)$ و $T \in B(H)$ ، آنگاه $AT, TA, A+B, \alpha A$ همگی در $K(H)$ هستند .

کافی است نشان دهیم که به ازای هر دنباله کراندار $\{x_n\}$ دنباله های $(ATx_n), (TAx_n), ([A+B]x_n), (\alpha Ax_n)$ دارای زیر دنباله های همگرا هستند .

چون A فشرده است پس زیر دنباله (Ax_{n_i}) از (Ax_n) همگراست . و همچنین (αAx_{n_i}) دارای زیر دنباله ای همگرا از (αAx_n) است و این نشان می دهد که αA فشرده است همچنین (x_{n_i}) یک دنباله کراندار است و همچنین (Bx_{n_i}) دارای زیر دنباله ای همگرا مانند $(Bx_{n_{i_j}})$ است زیرا B فشرده است پس $[A+B]x_{n_{ij}}$ زیر دنباله ای همگرا از $[A+B]x_n$ است و این نشان می دهد که $A+B$ فشرده است .

همچنین $T \in B(H)$ و T پیوسته است و (TAx_{n_i}) یک زیر دنباله همگرا از (TAx_n) است و این نشان می دهد که TA فشرده است .

چون (x_n) کراندار است و $\|Tx_n\| \le \|T\|.\|x_n\|$ پس (Tx_n) کراندار است و چون A فشرده است پس (ATx_n) دارای زیر دنباله ای همگرا است و این نشان می دهد که TA فشرده است .□

نتیجه ۱-۱-۱۴. $K(H)$ بسته است .

جبر خارج قسمتهای $Q(H) = \dfrac{B(H)}{K(H)}$ یک جبر باناخ است . $Q(H)$ را جبر کالکین[12] بر H گوییم .

تعریف ۱-۱-۱۵. یک برگشت[13] روی جبر مختلط باناخ A نگاشتی مانند $* : A \to A^*$ است بطوریکه :

۱) $(T^*)^* = T$

۲) $(aS+bT)^* = \bar{a}S^* + \bar{b}T^*$

۳) $(ST)^* = T^*S^*$

هرگاه $S,T \in A$ و $a,b \in C$ و $\bar{b},\bar{a}$ مزدوجهای مختلط b,a هستند .

یک * - جبر یک جبر مختلط باناخ است همراه با یک برگشت که در شرط: $\|TT^*\| = \|T\|^2$ به ازای هر $T \in A$ صدق می کند.

---

12 - Calkin algebra

13 - Involution

یک * - حلقه: یک برگشت مانند * بر روی یک حلقه است که دارای خاصیت ضد- خود ریختی[14] است و مجذورش، همانی است.

تعریف ۱-۱-۱۶. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد یک فرم دوخطی[15] نگاشتی است مانند φ بطوریکه:

$$\varphi : H \times H \to C$$

$$\varphi(\alpha x + \beta x', y) = \alpha\varphi(x, y) + \beta\varphi(x', y)$$

$$\varphi(x, \alpha y + \beta y') = \overline{\alpha}\varphi(x, y) + \overline{\beta}\varphi(x, y')$$

یک تابع دوخطی کراندار است هرگاه مقدار ثابتی مانند K موجود باشد بطوریکه:

$$|\varphi(x, y)| < K\|x\|.\|y\| \quad \forall x, y \in H$$

K را یک کران برای φ گوییم.

قضیه ۱-۱-۱۷. (نمایش ریس[16]) اگر $f : H \to C$ یک تابعک خطی کراندار باشد آنگاه برداری مانند h در H وجود داردبطوریکه $f(x) = \langle x, h\rangle$ برای هر x در H. بعلاوه $\|f\| = \|h\|$.

اثبات: اگر $f = 0$ باشد کافی است $h = 0$ را در نظر بگیریم. برای $f \neq 0$ قرار می دهیم $N = f^{-1}(0) = \{x : f(x) = 0\} \neq H$. همچنین چون f پیوسته است پس N بسته است. پس $\{0\} \neq N^{\perp}$.

قرار می دهیم $y \perp N$. آنگاه $f(y) \neq 0$ فرض کنیم $z = \dfrac{y}{f(y)}$ بنابراین داریم:

$$f(z) = f(\frac{y}{f(y)}) = \frac{1}{f(y)}.f(y) = 1$$

پس به ازای هر $x \in H$ داریم:

$$f(x - f(x)z) = f(x) - f(x)f(z) = 0$$

پس $x - f(x)z \in N$. و چون $z \perp N$ پس

$$\langle x - f(x)z, z\rangle = \langle x, z\rangle - \langle f(x)z, z\rangle = \langle x, z\rangle - f(x)\|z\|^2 = 0$$

قرار می دهیم $h = \dfrac{z}{\|z\|^2}$ پس داریم $f(x) = \langle x, h\rangle$.

برای اثبات $\|f\| = \|h\|$ داریم:

---

14 - anti-automorphi

15 - sesquilinear

16 - Riesz repersentation

$$|f(x)|=|\langle x,h\rangle|\le\|x\|.\|h\|\Rightarrow\|f\|\le\|h\|$$

$$\|f\|=\sup_{x\neq0}\frac{|f(x)|}{\|h\|}\ge\frac{|f(h)|}{\|h\|}=\|h\|$$

پس داریم $\|f\|=\|h\|$. □

قضیه ۱-۱-۱۸. اگر $\varphi:H\times H\to C$ یک تابع دوخطی کراندار با کران K باشد آنگاه عملگرهای منحصر بفردی مانند $B،A$ در $B(H)$ موجودند بطوریکه :

$$\varphi(x,y)=\langle Ax,y\rangle=\langle x,By\rangle$$

اثبات : فرض می کنیم x ثابت باشد . چون مزدوج $\varphi(x,y)$ در y خطی است پس $\varphi\overline{(x,y)}$ در y خطی است . با استفاده از قضیه نمایش ریس یک بردار منحصر بفرد مانند $h\in H$ وجود دارد بطوریکه

$$\varphi\overline{(x,y)}=\langle y,h\rangle \quad \text{و} \quad \varphi(x,y)=\langle h,y\rangle$$

تعریف می کنیم یک تابع $H\to H$ مانند A بطوریکه $Ax=h$ پس A خطی است زیرا :

$$\langle A(x+x'),y\rangle=\varphi((x+x'),y)=\varphi(x,y)+\varphi(x',y)=\langle Ax,y\rangle+\langle Ax',y\rangle$$

بنابراین $A(x+x')=Ax+Ax'$.

و همچنین داریم : $A(\alpha x)=\alpha Ax$ و

$$\|Ax\|=\sup_{y\neq0}\frac{\langle Ax,y\rangle}{\|y\|}=\sup_{y\neq0}\frac{|\varphi(x,y)|}{\|y\|}\le K\|x\|$$

بنابراین A پیوسته است . □

تعریف ۱-۱-۱۹. عملگر B در قضیه ۱-۱-۱۸ را الحاق[17] گوییم و بصورت $B=A^*$ نمایش می دهیم .

قضیه ۱-۱-۲۰. اگر A,B در $B(H)$ باشند و $\alpha\in C$ آنگاه :

۱) $(\alpha A+B)^*=\overline{\alpha}A^*+B^*$

۲) $(AB)^*=B^*A^*$

۳) $A^{**}=(A^*)^*=A$

۴) $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$

اثبات [5]

---

[17] - adjoint

قضیه ۱-۱-۲۱. اگر $A \in B(H)$ باشد آنگاه

$$\|A\| = \|A^*\| = \|AA^*\|^{1/2}$$

اثبات : فرض می کنیم $h \in H$ و $\|h\| < 1$ پس داریم :

$$\|Ah\|^2 = \langle Ah, Ah \rangle = \langle A^*Ah, h \rangle \le \|A^*Ah\|.\|h\| \le \|A^*A\| \le \|A^*\|.\|A\|$$

پس

$$\|A\|^2 \le \|A^*A\| \le \|A^*\|.\|A\|$$

و در نتیجه

$$\|A\|^2 \le \|A^*\|.\|A\| \Rightarrow \|A\| \le \|A^*\|$$

اما داریم که $A = A^{**}$ پس اگر A^* رابه جای A قرار دهیم خواهیم داشت :

$$\|A^*\| \le \|A^{**}\| \Rightarrow \|A^*\| \le \|A\|$$

از اینجا داریم : $\|A\| = \|A^*\|$ □

تعریف ۱-۱-۲۲ . فرض کنیم $A \in B(H)$ باشد :

۱) اگر $A = A^*$ آنگاه A را خودالحاق[۱۸] گوییم .

۲) اگر $AA^* = A^*A$ آنگاه A را نرمال[۱۹] گوییم .

۳) اگر $AA^* = A^*A = I$ آنگاه A را یکانی[۲۰] گوییم .

۴) اگر $A = A^2 = A^*$ آنگاه A را تصویر[۲۱] گوییم .

۵) اگر $A = BB^*$ برای عضوی مانند B در $B(H)$ آنگاه A را مثبت[۲۲] گوییم .

قضیه ۱-۱-۲۳. اگر $T \in B(H)$ باشد آنگاه عضوهای منحصر بفرد مانند A و B که خود الحاقی هستند وجود دارند بطوریکه :

$$T = A + iB \quad \text{و} \quad B = \frac{1}{2i}(T - T^*) \quad \text{و} \quad A = \frac{1}{2}(T + T^*)$$

اثبات [8]

---

[18] - self - adjoint
[19] - normal
[20] - unitary
[21] - projection
[22] - positive

طیف[23]

تعریف ۱-۲-۱. فرض کنیم A یک جبر باناخ و x در A باشد طیف x ، که با $\sigma_A(x)$ یا ساده تر با $\sigma(x)$ نمایش داده می شود ، مجموعه تمام اعداد مختلطی مانند λ است که $\lambda 1 - x$ در A وارون پذیر نباشد . مکمل $\sigma(x)$ در C را مجموعه حلال[24] x نامیم .

مثال ۱-۲-۲. فرض کنیم $A = B(H)$ که H یک فضای هیلبرت با بعد نامتناهی است فرض کنید $T \in A$. $\sigma(T)$ شامل تمام مقادیر ویژه عملگر T است .

قضیه ۱-۲-۳. فرض کنیم A یک جبر باناخ و x در A باشد آنگاه $\sigma(x)$ در C ناتهی است .

اثبات : اگر x وارون پذیر نباشد آنگاه طیفش شامل 0 است پس فرض کنیم x وارون پذیر است فرض کنیم $\sigma(x)$ تهی باشد فرض کنیم F یک تابع خطی و کراندار در A باشد و تابع $f : C \to C$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$f(z) = F((z1 - x)^{-1}) \qquad z \in C$$

در این صورت f روی تمام صفحه مختلط تعریف می شود زیرا $\sigma(x)$ تهی است . $z_0 \in C$ را ثابت در نظر می گیریم . از پیوستگی F داریم :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = F(\lim_{z \to z_0} \frac{(z1 - x)^{-1} - (z_0 1 - x)^{-1}}{z - z_0})$$

چون :

$$(z1 - x)^{-1} - (z_0 1 - x)^{-1} = (z1 - x)^{-1}(z_0 - z)(z_0 1 - x)^{-1}$$

و انعکاس نیز پیوسته است داریم :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{(z1 - x)^{-1} - (z_0 1 - x)^{-1}}{z - z_0} = -(z_0 1 - x)^{-2}$$

پس

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = -F((z_0 1 - x)^{-2})$$

پس f یک تابع تام است . بعلاوه هرگاه $\|x\| < |z|$ داریم :

$$|f(z)| \le \|F\| \|(z - 1x)^{-1}\| = \frac{\|F\|}{|z|} \|(1 - \frac{x}{z})^{-1}\|$$

---

23 - spectrum
24 - resolvent

$$\leq \frac{\|F\|}{|z|}\cdot\frac{1}{1-\frac{\|x\|}{|z|}}=\frac{\|F\|}{|z|-\|x\|}$$

پس f تابع تام کراندار است که هرگاه $|z| \to +\infty$ ، همگرا به صفر است و بنا به قضیه لیوویل ، f باید متحد با صفر باشد . چون F دلخواه است بنا به قضیه هان باناخ نتیجه می شود که $(z1-x)^{-1}=0$ که غیر ممکن است زیرا صفر در جبر با ناخ وارون پذیر نیست پس $\sigma(x)$ مخالف تهی است . □

قضیه ۱-۲-۴. فرض کنید A یک جبر باناخ و x در A باشد آنگاه $\sigma(x)$ در C فشرده است و در قرص بسته $\{z\in C:|z|\leq\|x\|\}$ قرار دارد .

اثبات [۲۵]

تعریف ۱-۲-۵. فرض کنیم A یک جبر باناخ و x در A باشد عدد $r(x)=\sup\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(x)\}$ را شعاع طیفی[25] x نامیم .

تعریف ۱-۲-۶. یک تابع خطی φ بر یک جبر باناخ A ضربی[26] است اگر φ غیر بدیهی باشد و $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$ برای تمام y,x ها در A .

می توان با راحتی نشان داد که $\varphi(e)=1$ زیرا :

$$\varphi(e)=\varphi(e.e)=\varphi(e).\varphi(e)=1$$

قضیه ۱-۲-۷. فرض کنید φ یک تابع خطی ضربی بر جبر باناخ A باشد آنگاه $\|\varphi\|=1$.

اثبات : فرض کنید $\|\varphi\|>1$ پس یک بردار واحد مانند x در A موجود است بقسمی که $|\varphi(x)|>1$. فرض می کنیم : $x_0=x-\varphi(x)1$ داریم:

$$\varphi(x_0)=\varphi(x-\varphi(x)1)=\varphi(x)-\varphi(x)\varphi(1)=\varphi(x)-\varphi(x)=0$$

پس $\varphi(x_0)=0$ از طرف دیگر از نامساوی

$$\left\|1+\frac{x_0}{\varphi(x)}\right\|=\left\|\frac{\varphi(x)+x_0}{\varphi(x)}\right\|=\frac{\|x\|}{|\varphi(x)|}<1 \qquad \|x\|=1$$

---

25 - spectral radius
26 - multiplication

و اینکه اگر در جبر باناخ A ، $\|x\|<1$ باشد آنگاه $1-x$ وارون پذیر است و $\|(1-x)^{-1}\| \le (1-\|x\|)^{-1}$. نتیجه می شود که $\frac{x_0}{\varphi(X)}$ وارون پذیر است پس x_0 وارون پذیر است .

و چون φ ضربی است داریم: $\varphi(x_0)\varphi(x_0^{-1})=1$ و این با $\varphi(x_0)=0$ در تناقض است . □

تعریف ۱-۲-۸. در جبر باناخ A فرض کنیم M_A مجموعه تمام تابع های خطی ضربی A باشد . M_A را فضای ایده آل ماکسیمال A نامیم .

قضیه ۱-۲-۹. اگر A یک جبر باناخ جابجایی باشد آنگاه M_A با مجموعه ایده آلهای ماکسیمال (سره) در A یک تناظر یک به یک دارد .

اثبات [۲۵]

قضیه ۱-۲-۱۰. فرض کنیم $f(z)$ یک تابع تام در C باشد اگر $f(0)=1$ و $f'(0)=0$ و $0<|f(z)|\le e^{|z|}$ برای تمام z ها در $\mathbb{C}$ آنگاه $f(z)\equiv 1$.

اثبات [۲۵]

قضیه ۱-۲-۱۱. (گلیسون ، کاهانه ، زلاسکو)

تابع خطی φ بر جبر باناخ A ضربی است اگر و تنها اگر $\varphi(1)=1$ و $\varphi(x)\neq 0$ هرگاه x در A وارون پذیر باشد .

اثبات : اثبات کفایت با استفاده از قضیه۱-۲-۷ و توضیح قبل از آن بدیهی است . برای اثبات لزوم فرض کنیم که $\varphi(1)=1$ و $\varphi(x)\neq 0$ نشان می دهیم که φ خطی ضربی است .

فرض کنیم N هسته φ باشد بنابه فرض N شامل هیچ عنصر وارون پذیر A نیست . پس $\|1-x\|\ge 1$ برای تمام $x\in N$. از این به آسانی نتیجه می شود که φ پیوسته با نرم۱ است در واقع برای هر $x\in A$ که $\varphi(x)\neq 0$ می توان نوشت : $x=\varphi(x)\left[1-(1-\frac{x}{\varphi(x)})\right]$

یا

$$1-\frac{x}{\varphi(x)}\in N$$

بنابراین :

$$\|x\|=|\varphi(x)|\left\|1-(1-\frac{x}{\varphi(X)})\right\|\ge|\varphi(x)|$$

$x \in N$ را که $\|x\| = 1$ ثابت فرض می کنیم و عبارت زیر را در نظر می گیریم :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(x^n)}{n!} z^n \qquad z \in C$$

چون :

$$|\varphi(x^n)| \le \|x^n\| \le 1 \qquad n \ge 0$$

تابع f تام است با

$$|f(z)| \le e^{|z|} \text{ و } f'(0) = 0 \text{ و } f(0) = 1 .$$

برای تمام $z \in C$. با توجه به پیوستگی φ داریم :

$$f(z) = \varphi(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zx)^n}{n!}) \qquad z \in C$$

به آسانی امتحان می شود که عنصر $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zx)^n}{n!}$ وارون پذیر است و وارون آن $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-zx)^n}{n!}$ است .

چون N شامل هیچ عنصر وارون پذیری نیست نتیجه می شود که f در C صفر نمی شود . با توجه به قضیه ۱-۲-۱۰

داریم $f(z) \equiv 1$ مخصوصا $\varphi(x^2) = 0$. بنابراین نشان داده ایم که $x^2 \in N$. برای هر $x \in N$.

به ازای y،x در A فرض $\varphi(1) = 1$ نشان می دهد که : $x = x_1 + \varphi(x)1, \quad y = y_1 + \varphi(y)1$

هر گاه $x_1, y_1 \in N$

در نتیجه $\varphi(xy) = \varphi(x_1 y_1) + \varphi(x).\varphi(y)$

با جایگذاری y_1،x_1 در رابطه بالا به آسانی می توان دید که $\varphi(xy) = \varphi(x).\varphi(y)$

حال کافی است نشان دهیم که N بسته است .

فرض کنیم $x = y$ پس داریم $\varphi(x^2) = \varphi(x)^2 \quad , x \in A$

بجای x ، $x + y$ قرار می دهیم خواهیم داشت :

$$\varphi(xy + yx) = 2\varphi(x).\varphi(y) \qquad x, y \in A$$

و این نشان می دهد که $xy + yx$ در N است اگر یکی از دو عنصر y,x در N باشد این نتیجه می دهد که عناصر

$x(yxy) + (yxy)x$ ، $(xy + yx)^2$ در N هستند . اگر x در N باشد . چون :

$$(xy - yx)^2 + (xy + yx)^2 = 2[x(yxy) + (yxy)x]$$

و

$$(\varphi(xy - yx))^2 = \varphi((xy - yx)^2)$$

پس داریم که : $yx - xy$ برای تمام $x \in N$ و $y \in A$ در N است . حال اگر $xy - yx$ و $xy + yx$ را با هم جمع کنیم نتیجه می گیریم xy برای تمام x های در N و y های در A در N خواهد بود . پس N تحت ضرب بسته است.□

قضیه ۱-۲-۱۲. اگر A یک جبر باناخ مختلط تعویض پذیر با عضو یکه باشد . آنگاه تابعی $f \in A^*$ یک تابعک خطی ضربی است اگر و تنها اگر $f(x) \in \sigma(x)$.

اثبات : اگر f یک تابعی خطی ضربی غیر صفر باشد آنگاه $f(x) \in \sigma(x)$ زیرا اگر $\lambda \in \sigma(\chi)$ آنگاه $(\lambda 1 - x)$ معکوس ناپذیر است یعنی این که :

$f(\lambda 1 - x) = 0$

چون f خطی و ضربی است پس داریم : $f(\lambda 1) - f(x) = 0$ یعنی اینکه : $\lambda f(1) = f(x)$ یا $f(x) = \lambda$ و $f(x) \in \sigma(x)$.

برعکس فرض کنیم $f(x) \in \sigma(x)$. واضح است که $f(e) = 1$. فرض کنیم $x \in A$ ، عضو $\exp(\lambda x)$ را که λ یک عدد مختلط است در نظر می گیریم قرار می دهیم $\varphi(\lambda) = f[\exp(\lambda x)]$ ،

به آسانی می توان تابع $\varphi(\lambda)$ را به یک تابع صحیح تغییر داد چون $f(x) \in \sigma(x)$ و $\varphi(\lambda) \neq 0$. پس داریم $\varphi(\lambda) = \exp[\psi(\lambda)]$ برای بعضی تابع های صحیح مانند $\psi(\lambda)$. همچنین می توان نوشت .

$|\varphi(\lambda)| \leq \|f\| \exp(|\lambda| \|x\|)$

و این نتیجه می دهد که $\psi(\lambda) = \alpha\lambda + \beta$ برای بعضی مقادیر مختلط β, α .

چون $f(e) = 1$ پس $\varphi(0) = f(\exp 0) = 1$ پس داریم که $\psi(\lambda) = \alpha\lambda$ و

$$\varphi(\lambda) = \exp(\alpha\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \lambda^n$$

و از طرفی دیگر می توان نوشت :

$$\varphi(\lambda) = f\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(x^n)}{n!} \lambda^n$$

حال با استفاده از دو رابطه بالا داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(x^n)}{n!} \lambda^n \Rightarrow f(x^n) = a^n = f(x)^n$$