چکیده

در این پایان‌نامه به معرفی مجموعه‌های γ −همبند و فضاهای دنباله‌ای می‌پردازیم. نشـان می‌دهیم که فضاهای دنباله‌ای خارج قسمت فضاهای متریک هستند. سپس به بیان مفهوم دو نوع همبندی مـی‌پـردازیم. همبنـدی دنبالـه‌ای و s- همبنـدی. نشـان مـی‌دهـیم کـه حاصلضرب شمارا از فضاهای همبند دنباله‌ای، همبند دنباله‌ای است. در ادامـه بـه بررسـی رابطه میان این دو نوع همبندی می‌پردازیم و فضاهایی را معرفی می‌کنـیم کـه s- همبنـد هستند ولی همبند دنباله‌ای نیستند.

این پایان‌نامه بر اساس مقاله زیر نوشته شده است:

Q. Huang and S.Lin , " Notes on sequentially connected spaces",
Acta Math. Hungar, Volumes 110 , 2006 , 159-164.

مقدمه

"فدلی" و" لی دن" در سال ۲۰۰۲، فضاهای همبند دنباله‌ای را با استفاده از مفهوم مجموعه های باز دنباله‌ای تعریف کردند و ارتباط میان این فضاها با فضاهای همبند متریک را مورد بررسی قرار دادند. "کازازور" در همان سال مجموعه‌های γ −باز را به کمک یک رده از توابع مجموعه- مقدار، معرفی کرده و با استفاده از این مفهوم، مجموعه‌های γ −همبند را تعریف کرد.

در این پایان‌نامه به بررسی رابطه میان دو نوع همبندی می‌پردازیم. همبندی دنباله‌ای و s- همبندی. نشان می‌دهیم که مجموعه s- همبند، ممکن است همبند دنباله‌ای نباشد.

در فصل اول به بیان آن دسته از تعاریف، لم‌ها و قضایایی می‌پردازیم که خواننده می‌تواند در طول فصول بعدی، در قسمت‌های مختلف آن، بر حسب ضرورت به این فصل مراجعه کند.

در فصل دوم با مفهوم مجموعه‌های γ −همبند آشنا می‌شویم. قضایای بیان شده در این فصل نشان می‌دهند که مجموعه‌های γ −همبند دارای خواصی مشابه فضاهای همبند هستند.

در فصل سوم به معرفی فضاهای دنباله‌ای می‌پردازیم . نشان می‌دهیم که فضاهای دنباله ای خارج قسمت فضاهای متریک هستند . سپس با مفهوم فضاهای فرشه که نمونه‌ای از فضاهای دنباله‌ای هستند آشنا می‌شویم.

در فصل چهارم با فضاهای همبند دنباله‌ای و مجموعه‌های s- همبند آشنا می‌شویم . نشان می‌دهیم که حاصلضرب شمارا از فضاهای همبند دنباله‌ای ، همبند دنباله‌ای است.

در فصل پنجم نمونه‌هایی از فضاهای همبند را معرفی می‌کنیم به طوری که این فضاها همبند دنباله‌ای نیستند .

فصل اول

مفاهیم اولیه

در این فصل به مفاهیم اولیه‌ای می‌پردازیم که برای درک مطالب نیاز داریم.

در ۱-۱ از اثبات بعضی قضایا خودداری نموده‌ایم. برای اثبات این قضایا به مرجع [۵] مراجعه شود.

۱-۱: توپولوژی

تعریف ۱-۱-۱: فضای توپولوژیک X کاملاً منظم است اگر به ازای هر زیرمجموعه بسته A از X و هر $x \in X$ که عضو A نباشد، نگاشت پیوسته $f : X \to [0,1]$ موجود باشد به طوری که $f[A] = \{0\}$ و $f(x) = 1$.

تعریف ۱-۱-۲: هر فضای کاملاً منظم و هاسدورف فضای تیخونف نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱-۳: زوج (X, ρ) را که در آن X یک مجموعه و ρ تابع تعریف شده روی مجموعه $X \times X$ باشد یک فضای متری نامیم، هرگاه دارای شرایط زیر باشد.

۱- $\rho(x, y) \geq 0$

۲- $\rho(x, y) = 0$ اگر و تنها اگر $x = y$

۳- $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in X$

۴- $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z) \quad \forall x, y, z \in X$

قضیه ۱-۱-۴: هر فضای متریکی کاملاً منظم است.

تعریف ۱-۱-۵: فضای (X, τ) را شمارش پذیر از نوع دوم گوییم، هرگاه دارای یک پایه شمارا باشد.

قضیه ۱-۱-۶: هر فضای فشرده متری‌پذیر است اگر و تنها اگر شمارای نوع دوم باشد.

تعریف ۱-۱-۷: فرض کنیم (X,τ) یک فضای توپولوژیک، Y یک مجموعه و g یک نگاشت پوشا از X به Y باشد. روی Y توپولوژی τ_g را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\tau_g = \{G \subset Y : g^{-1}(G) \in \tau\}$$

در این صورت نگاشت g از (X,τ) به (Y,τ_g) یک نگاشت پیوسته است. τ_g بزرگترین توپولوژی روی Y است که با این توپولوژی، نگاشت g پیوسته می‌شود. به این توپولوژی، توپولوژی خارج قسمت روی Y تولید شده توسط g می‌گوییم.

قضیه ۱-۱-۸: فرض کنید f نگاشتی از فضای توپولوژیک X به توی فضای توپولوژیک Y باشد شرایط زیر معادلند:

۱- نگاشت f خارج قسمتی است.

۲- مجموعه $\overset{-1}{f}(U)$ در X باز است اگر و تنها اگر $U \subseteq Y$ در Y باز باشد.

۳- مجموعه $\overset{-1}{f}(F)$ در X بسته است اگر و تنها اگر F در Y بسته باشد.

قضیه ۱-۱-۹: فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک باشند و τ',τ به ترتیب توپولوژی روی X و Y باشند. اگر $g : X \to Y$ پیوسته و باز یا پیوسته و بسته باشد، آن‌گاه τ' با توپولوژی خارج قسمتی τ_g منطبق است.

برهان: فرض کنیم g پیوسته و باز است. از آن‌جا که τ_g بزرگترین توپولوژی روی Y است که به ازای آن g پیوسته می‌شود بنابراین $\tau' \subset \tau_g$.

فرض کنیم $G \in \tau_g$. پس $g^{-1}(G)$ در X باز است. بنابراین $gg^{-1}(G) = G$ در Y باز است. از این رو $G \in \tau'$ و $\tau' = \tau_g$.

تعریف ۱-۱-۱۰: می‌گوییم β' یک پایه برای مجموعه‌های بسته X است، هرگاه هر مجموعه بسته در X اشتراک عناصر β' باشد. به عبارت دیگر برای هر مجموعه بسته F و هر $x \notin F$، $B' \in \beta'$ وجود دارد به طوری‌که $x \notin B', F \subset B'$.

قضیه ۱-۱-۱۱: مجموعه F از زیر مجموعه‌های بسته X یک پایه برای مجموعه‌های بسته X است اگر و تنها اگر دارای شرایط زیر باشد:

۱- $\phi\in F$.

۲- برای $A,B\in F$، $A\cup B$ برابر با اشتراک اعضایی از F باشد.

تعریف: ۱-۱ -۱۲: فضای (X,τ) را شمارش پذیر از نوع اول گوییم، هرگاه درهر نقطه $x\in X$ یک پایه موضعی شمارش پذیر وجود داشته باشد.

قضیه ۱-۱-۱۳: اگر فضای X شمارای نوع اول باشد و $E\subset X$، آن‌گاه $x\in \overline{E}$ اگر و تنها اگر دنباله $\{x_n\}$ در E موجود باشد به طوری‌که دنباله $\{x_n\}$ همگرا به x باشد.

نتیجه ۱-۱-۱۴: فرض کنیم فضای X شمارای نوع اول باشد آن‌گاه شرایط زیر برقرارند.

۱- $U\subset X$ باز است اگر و تنها اگر برای هر دنباله $\{x_n\}$ که همگرا به $x\in U$ باشد، $\{x_n\}$ نهایتا در U قرارگیرد.

۲- $F\subset X$ بسته است اگر و تنها اگر $\{x_n\}\subset F$ و $\{x_n\}$ به $x\in F$ همگرا باشد، آن‌گاه $\{x_n\}$ نهایتا در F قرارگیرد.

قضیه ۱-۱-۱۵: هرگاه E در X همبند باشد و $E\subset A\subset \overline{E}$، آن‌گاه A در X همبند است.

تعریف ۱-۱-۱۶: فضای X را شمارا فشرده نامیم، هرگاه هر پوشش شمارا و باز برای X دارای یک زیر پوشش متناهی باشد.

تعریف ۱-۱-۱۷: فضای X فشرده دنباله‌ای است اگر و تنها اگر هر دنباله در X دارای یک زیردنباله همگرا باشد.

تعریف ۱-۱-۱۸: فضای (X,τ) را T_1 نامیم، هرگاه برای هر $x,y\in X$ و $x\neq y$، دو مجموعه باز G و H موجود باشد به طوری‌که $y\in H,x\notin H$ و $y\notin G,x\in G$.

۱-۲: حلقه توابع پیوسته

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک دلخواه و R مجموعه اعداد حقیقی باشد.

مجموعه تمام نگاشت‌ها از X به R را با R^X نشان می‌دهیم. اگر X ناتهی باشد آن‌گاه R^X با جمع و ضرب زیر، یک حلقه جابه‌جایی و یکداراست.

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$(f.g)(x)=f(x)g(x)$$

مجموعه تمام نگاشت‌های پیوسته از X به R را با $C(X)$ و یا برای اختصار با C نشان می‌دهیم.

$C(X)$ زیر حلقه R^X است.

مجموعه تمام نگاشت‌های کراندار $C(X)$ را با $C^*=C^*(X)$ نشان می‌دهیم. C^* زیر حلقه C است.

تعریف ۱-۲-۱: برای $f\in C(X)$، $f^{-1}(0)$ را صفر – مجموعه f می‌نامیم. این مجموعه را با $Z_X(f)$ و یا برای فضای مشخص X با $Z(f)$ نشان می‌دهیم. بنابراین $Z(f)=Z_X(f)=\{x\in X: f(x)=0\}$.

هر مجموعه که صفر- مجموعه یک نگاشت $C(X)$ باشد، یک صفر-مجموعه در X نامیده می‌شود. بنابراین مجموعه تمام صفر-مجموعه های X را با $Z(X)$ نشان می‌دهیم.

رابطه‌های زیر برقرار است:

$$Z(f)\bigcup Z(g)=Z(fg)$$

و

$$Z(f)\bigcap Z(g)=Z(f^2+g^2)=Z(|f|+|g|)$$

نکته ۱-۲-۲: اگر (X,d) یک فضای متریک باشد، آن‌گاه هر مجموعه بسته در X یک صفر- مجموعه است.

اثبات : فرض کنیم $A\subset X$ بسته باشد و $f(x)=d(x,A)=\inf\{d(a,x)|a\in A\}$. واضح است که f پیوسته است و. $Z(f)=\{x\in X: d(x,A)=0\}=A$

تعریف ۱-۲-۳: می‌گوییم صفر- مجموعه Z، یک صفر- مجموعه همسایگی برای مجموعه A است، هر گاه $A\subset \operatorname{int} Z$.

تعریف۱-۲-۴: می‌گوییم زیرمجموعه‌های A و B از X در X کاملاً مجزا هستند اگر و تنها اگر $f\in C^*$ موجود باشد به طوری که $f(A)=\{0\}$ و $f(B)=\{1\}$

تعریف ۱-۲-۵: زیر فضای S از X در X، C- نشانده است اگر بتوان هر نگاشت $f\in C(S)$، را به نگاشتی در $C(X)$ توسیع داد. به همین صورت می‌گوییم S در X، C^*-نشانده است اگر بتوان هر نگاشت در $C^*(S)$را به نگاشتی در $C^*(X)$ توسیع داد.

تعریف ۱-۲-۶: زیر گردایه ناتهی $\Im$ از $Z(X)$ یک $z-$ پالایه در X نامیده می‌شود هرگاه

الف) $\phi\notin\Im$.

ب) اگر $Z_1\in\Im, Z_2\in\Im$، آن‌گاه $Z_1\bigcap Z_2\in\Im$.

ج) اگر $Z\in\Im$ و $Z'\in Z(X)$ و $Z\subset Z'$، آن‌گاه $Z'\in\Im$.

تعریف ۱-۲-۷: می‌گوییم $P\in X$ نقطه حدی $z-$پالایه $\Im$ است، هرگاه هر همسایگی p، هر عضو $\Im$ را قطع کند. چون اعضای $\Im$ درX بسته هستند، p نقطه حدی $\Im$ است اگر وتنها اگر $P\in\bigcap_{F\in\Im}F$.

تعریف ۱-۲-۸: گوییم $z-$ پالایه $\Im$ به p همگراست، هرگاه هر همسایگی p شامل عضوی از $\Im$ باشد.

هرگاه $\Im$ به p همگرا باشد، آن‌گاه p نقطه حدی $\Im$ است.

فصل دوم

مجموعه‌های γ-همبند

در این فصل با مفهوم مجموعه های $\gamma-$ همبند آشنا می شویم. نشان می‌دهیم شماری از قضایا که برای فضاهای همبند برقرار می‌باشند، در مورد مجموعه های $\gamma-$همبند نیز برقرارند. سپس توابع (γ,γ') پیوسته را معرفی کرده و نشان می‌دهیم بخشی از خواص توابع پیوسته درمورد توابع (γ,γ') پیوسته نیز برقرار می‌باشد. درادامه، مجموعه های $\gamma-$همبند را به عنوان زیرفضاهای، فضاهای $\gamma-$همبند در نظر گرفته و خواصی از این فضاها را بیان می‌کنیم.

۲-۱: مجموعه‌های $\gamma-$همبند

تعریف ۲-۱-۱: فرض کنیم X یک مجموعه باشد. مجموعه همه نگاشت‌های یکنوا ($\gamma: P(X) \to P(X)$) را با $\Gamma(X)$ نمایش می‌دهیم. در حقیقت اگر $\gamma \in \Gamma(X)$ **و** $A \subset B \subset X$ آن‌گاه $\gamma(A) \subset \gamma(B)$.

تعریف ۲-۱-۲: مجموعه $A \subset X$، γ- باز نامیده می شود اگر $A \subset \gamma(A)$ باشد. مجموعه همه مجموعه های γ- باز را با O_γ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲-۱-۳: فرض کنیم X یک مجموعه باشد. مجموعه ی $g \subseteq P(X)$ توپولوژی تعمیم یافته روی X نامیده می‌شود، اگردارای شرایط زیر باشد:

۱- $\phi \in g$.

۲- اگر برای هر $\mathrm{i} \in \mathrm{I} \neq \phi$ ، $G_i \in g$، آن‌گاه $G = \bigcup_{i \in I} G_i \in g$.

مجموعه O_γ توپولوژی تعمیم یافته روی X می‌باشد زیرا:

۱- $\phi \in O_\gamma$.

۲- فرض کنیم برای هر α ، $A_\alpha \in O_\gamma$ ، از آن‌جا که $A_\alpha \subseteq \bigcup A_\alpha$ داریم $\gamma(A_\alpha) \subseteq \gamma(\bigcup_\alpha A_\alpha)$. از طرفی بنابر فرض، $A_\alpha \subset \gamma(A_\alpha) \subset \gamma(\bigcup_\alpha A_\alpha)$. ازاین رو $\bigcup A_\alpha \subset \bigcup \gamma(\bigcup_\alpha A_\alpha)$.

بنابراین $\bigcup A_\alpha \subset \gamma(\bigcup_\alpha A_\alpha)$ و داریم $\bigcup A_\alpha \in O_\gamma$.

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و $A \subset X$ باشد. درون و بستار A در X را به ترتیب با علامت $i(A) = \text{int}(A)$ و $c(A) = cl(A)$ نمایش می‌دهیم. همین ترتیب قرار می‌دهیم:

$\beta(A) = cic(A), \alpha(A) = ici(A), P(A) = ic(A), S(A) = ci(A)$. بنابراین، $\beta, \alpha, P, S, i, c$ همه عناصری از $\Gamma(X)$، هستند.

تعریف ۲-۱-۴: فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و $S \subset X$.گوییم S، β- باز است، اگر $S \subset cl(\text{int}(cl(S)))$. همچنین می‌گوییم S، α- باز است، هرگاه $S \subset \text{int}(cl(\text{int}(S)))$.

مجموعه نگاشت‌های $\gamma \in \Gamma(X)$ که در شرط $\gamma(\phi) = \phi$ صدق می کند با Γ_0 نمایش می دهیم. به همین ترتیب قرار می‌دهیم:

$$(\Gamma_1) \qquad \gamma(X) = X$$

$$(\Gamma_2) \qquad \gamma^2(A) = \gamma(A) \qquad (A \subset X)$$

$$(\Gamma_+) \qquad A \subset \gamma(A) \qquad (A \subset X)$$

$$(\Gamma_-) \qquad A \supset \gamma(A) \qquad (A \subset X)$$

نکته ۲-۱-۵: اگر $\gamma \in \Gamma_2$، آن‌گاه هر مجموعه به فرم $\gamma(A)$، γ-باز می باشد. X، γ-باز است هرگاه $\gamma \in \Gamma_1$.

هرگاه $\gamma \in \Gamma_+$، هر زیرمجموعه X، γ-باز است و در صورتی‌که $\gamma \in \Gamma_-$، $A \subset X$ باز است، اگر $A = \gamma(A)$.

تعریف ۲-۱-۶: می‌گوییم زیر مجموعه $A \subset X$، γ- بسته است اگر $X-A$، γ-باز باشد.

مجموعه X و ϕ، γ-بسته می باشند هرگاه $\gamma \in \Gamma_1$.

تعریف ۲-۱-۷: فرض کنیم $A \subset X$، اشتراک همه مجموعه‌های γ-بسته شامل A، γ-بستار A نامیده می‌شود و با $c_{\gamma}(A)$ نمایش داده می شود. واضح است که ، $c_{\gamma}(A)$ کوچکترین مجموعه γ- بسته شامل A می‌باشد.

تعریف ۲-۱-۸: فرض کنیم X یک مجموعه دلخواه و $U,V \subset X$. گوییم U,V، γ-مجزا در X هستند، اگر $c_{\gamma}U \bigcap V = c_{\gamma}V \bigcap U = \phi$.

تعریف ۲-۱-۹: زیرمجموعه $S \subset X$، γ-همبند نامیده می شود، هرگاه نتوان S را به صورت اجتماع دو مجموعه γ- مجزای ناتهی از X بیان کرد.

واضح است که دو مجموعه γ-مجزا، دارای اشتراک تهی می‌باشند.

۲-۱-۱۰: اگر $U,V \subset X$، آن‌گاه شرایط زیر معادلند:

۱- V,U، γ- مجزا هستند.

۲- مجموعه های γ-بسته F_u و F_v وجود دارند به طوری که $U \subset F_u \subset X-V$ و $V \subset F_v \subset X-U$.

۳- مجموعه های γ-باز G_u و G_v وجود دارند به طوری‌که روابط زیر برقرارند:

$U \subset G_u \subset X-V$ و $V \subseteq G_v \subset X-U$.

برهان :

۱ $\Leftarrow$ ۲: قرار می‌دهیم $F_u = c_{\gamma}(U)$ و $F_v = c_{\gamma}(V)$.

۲ $\Leftarrow$ ۳: قرار می‌دهیم $G_u = X-F_v$ و $G_v = X-F_u$.

۳ $\Leftarrow$ ۲: قرار می‌دهیم $F_u = X-G_v$ و $F_v = X-G_u$.

۲ $\Leftarrow$ ۱ : واضح است که $c_{\gamma}(U) \subset F_u$ و $c_{\gamma}(V) \subset F_v$.

فضای X، γ-همبند نامیده می‌شود هرگاه به عنوان زیرمجموعه ای از خودش، γ-همبند باشد.

قضیه ۲-۱-۱۱: شرایط زیر معادلند:

۱- فضای X، γ −همبند است.

۲- اگر $X = G \bigcup G'$ و $G \bigcap G' = \phi$ به‌طوری که G و G'، γ −باز هستند، آن‌گاه $G = \phi$ یا $G' = \phi$.

۳- اگر $X = F \bigcup F'$ و $F \bigcap F' = \phi$ به‌طوری که F و F' زیر مجموعه های γ −بسته از X باشند، آن گاه $F' = \phi$ یا $F = \phi$.

۴- اگر $H \subseteq X$، γ − باز و γ - بسته باشد، آن‌گاه $H = \phi$ یا $H = X$.

برهان:

۱ ⇐ ۲: با توجه به لم قبل، واضح است که G', G، γ −مجزا هستند.

۲ ⇐ ۳: قرار می‌دهیم $G = X - F$ و $G' = X - F'$. طبق۲، $X = F$ یا $X = F'$. در نتیجه $F = \phi$ یا $F' = \phi$.

۳ ⇐ ۴: قرار می‌دهیم $F = H$ و $F' = X - H$.

۴ ⇐ ۲: فرض کنیم $X = G \bigcup G'$ و $G \bigcap G' = \phi$. G و G' زیرمجموعه‌های γ −باز X هستند. قرار می دهیم $H = G$. طبق فرض داریم $H = X - G'$. پس H، γ − باز و γ −بسته در X می باشد در نتیجه $G = \phi$ یا $X - G' = X$. بنابراین $G' = \phi$.

۲ ⇐۱: فرض کنیم $X = U \bigcup V$، U و V زیرمجموعه های γ −مجزا در X هستند. قرار می‌دهیم $G = X - c_\gamma U$ و $G' = X - c_\gamma V$. بنابراین G و G'، γ − باز می‌باشند. از آن‌جا که $V \subset G$ و $U \subset G'$ نتیجه می‌شود که $X = G \bigcup G'$.چون

$G \bigcap G' = (X - c_\gamma U) \bigcap (X - c_\gamma V) = X - (c_\gamma U \bigcup c_\gamma V) \subset X - (U \bigcup V) = X - X = \phi$. پس $G = \phi$ یا $G' = \phi$. در نتیجه $V = \phi$ یا $U = \phi$.

لم ۲-۱-۱۲: اگر S، γ −همبند باشد و $S \subset U \bigcup V$. V و U، γ − مجزا باشند، آن‌گاه $S \subset U$ یا $S \subset V$.

برهان : واضح است کـه $S=(S\bigcap U)\bigcup(S\bigcap V)$، $S\bigcap V$ و $S\bigcap U$، $\gamma-$مجـزا هسـتند. بنـابراین $S\bigcap U=\phi$ یا $S\bigcap V=\phi$. از این رو $S\subset U$ یا $S\subset V$.

قضیه ۲-۱-۱۳: اگر S، $\gamma-$ همبند باشد و $S\subset T\subset c_\gamma S$، آن گاه T، $\gamma-$ همبند می باشد.

برهان: فرض کنیم $T=\mathrm{U}\bigcup\mathrm{V}$، به طوری که V,U، $\gamma-$ مجزا باشند. بـا اسـتفاده از لـم ۲-۱-۱۲ داریم $S\subset U$ یا $S\subset V$. چون $T\subset \underset{r}{C}S\subset \underset{r}{C}U\subset X-V$ و مشابهاً داریم $T\subset X-U$ $V=\phi$ یا $U=\phi$.

نتیجه ۲-۱-۱۴: اگر S، γ- همبند باشد آن گاه $c_\gamma S$، $\gamma-$ همبند است.

لم ۲-۱-۱۵: اگر $S=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}S_\lambda$ و بـرای هـر $\lambda\in\Lambda$، S_λ، $\gamma-$همبنـد باشـد و بـرای هـر $\lambda\neq\lambda'$، S_λ و $S_{\lambda'}$، $\gamma-$مجزا نباشند، آن گاه S، $\gamma-$همبند است.

برهان: فرض کنیم، $S=U\bigcup V$، U و V، $\gamma-$ مجزا، هستند. با استفاده از لم ۲-۱-۱۲، بـرای هـر $\lambda\in\Lambda$، $S_\lambda\subset U$ یا برای هر $\lambda\in\Lambda$، $S_\lambda\subset V$. اگر $S_\lambda\subset U$، آن گاه $S\subset U$ و اگـر $S_\lambda\subset V$، آن گاه $S\subset V$. بنابراین $V=\phi$ یا $U=\phi$.

نتیجـــه ۲-۱-۱۶: اگـر $S=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}S_\lambda$ و بـرای هـر $\lambda\in\Lambda$، S_λ، $\gamma-$همبنـد باشـد و بـرای هـر $\lambda,\lambda'\in\Lambda$، $S_\lambda\bigcap S_{\lambda'}\neq\phi$، آن گاه S، $\gamma-$همبند است.

نتیجه ۲-۱-۱۷: اگر $\mathrm{S}=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}S_\lambda$ و برای هر $\lambda\in\Lambda$، S_λ، $\gamma-$ همبند باشد و $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}S_\lambda\neq\phi$، آن گاه S، $\gamma-$همبند است.

تعریف۲-۱-۱۸: فرض کنیم X یک مجموعه باشد. اگر $A\subset X$ و $x\in A$، مجموعه

$$A_x=\bigcup\{S\subset A \mid x\in S,\quad S\text{ ، }\gamma-\text{همبنـد اسـت}\}$$

$\gamma-$مولفه A، وابسته به x نامیده می شود.

قضیه ۲-۱-۱۹: فرض کنیم X یک مجموعه باشد شرایط زیر برقرارند:

۱- هر زیرمجموعه $A \subset X$، اجتماع همه γ-مولفه‌هایش است.

۲- هر γ-مولفه، زیرمجموعه γ-همبند ماکزیمال A می‌باشد و دو γ-مولفه متفاوت، مجزا می‌باشند.

۳- γ-مولفه های یک مجموعه γ-بسته، γ-بسته می‌باشند.

برهان۱: از آن جا که هر مجموعه تک عضوی γ-همبند می‌باشد، اگر $x \in A$ آن‌گاه مجموعه A_x وجود دارد به طوری که $x \in A_x$ و $A = \bigcup\limits_{x\in A} A_x$.

۲: طبق نتیجه ۲-۱-۱۷، برای هر x متعلق به A، A_x، γ-همبند است.

فرض کنیم $x, y \in A$ و $A_x \bigcap A_y \neq \phi$ ، طبق نتیجه ۲-۱-۱۷، $A_x \bigcup A_y$، γ-همبند است. از طرفی چون A_y و A_x زیرمجموعه‌های γ-همبند ماکزیمال A می‌باشند داریم $A_x \bigcup A_y \subset A_x \bigcap A_y$، بنابر این $A_x = A_y$.

۳- فرض کنیم A، γ-بسته وشامل x باشد. بنابراین $c_\gamma A_x \subset A$، طبق نتیجه ۲-۱-۱۴، $c_\gamma A_x$ زیر مجموعه ی γ-همبند A و شامل x می‌باشد. بنابراین طبق شرط (۲) قضیه، $c_\gamma A_x \subset A_x$ و بنابر تعریف $c_\gamma A_x$، داریم $c_\gamma A_x = A_x$. پس A_x، γ-بسته می‌باشد.

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و $\gamma = i$ باشد. در این حالت مجموعه های γ-باز همان مجموعه های باز در این فضا می‌باشند بنابراین $c_\gamma = c$ و این نتیجه می‌دهد که در حالت $\gamma = i$، γ-همبندی و همبندی معادلند.

۲-۲: تصویر و پیش تصویر مجموعه‌های γ −همبند:

تعریف: ۲-۲-۱: فرض کنیم X و X' دو مجموعه و $f : X \to X'$ یک تابع و $\gamma \in \Gamma(X)$ و $\gamma' \in \Gamma(X')$ باشند. می‌گوییم f، (γ,γ')- پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر مجموعه γ'− باز A' در X'، $f^{-1}(A')$ در X، γ−باز باشد.

لم ۲-۲-۲: اگر $f : X \to X'$، (γ,γ')- پیوسته باشد و $U',V' \subset X'$ ، γ'−مجزا باشند آن‌گاه $f^{-1}(U'), f^{-1}(V')$، γ−مجزا می‌باشند.

برهان: طبق لم ۲-۱-۱۰، مجموعه‌های γ'−باز $G_{u'}, G_{v'}$ وجود دارند به طوری که $V' \subset G_{v'} \subset X' - U', U' \subset G_{u'} \subset X' - V'$. بنابراین

$$f^{-1}(V') \subset f^{-1}(G_{v'}) \subset X - f^{-1}(U'), f^{-1}(U') \subset f^{-1}(G_{u'}) \subset X - f^{-1}(V')$$

چون f، (γ,γ')-پیوسته می‌باشد، $f^{-1}(G_{v'}), f^{-1}(G_{u'})$، γ−باز می‌باشند و طبق لم ۲-۱-۱۰، $f^{-1}(V'), f^{-1}(U')$، γ−مجزا می‌باشند.

قضیه ۲-۲-۳: اگر $S \subset X$، γ−همبند باشد و $f : X \to X'$ ، (γ,γ')−پیوسته باشد، آن‌گاه $f(S)$، γ'−همبند است.

برهان: فرض کنید $f(S) = U' \cup V'$ به طوری که V',U' مجموعه های γ'−مجزا باشند. بنابراین داریم $S \subset f^{-1}(U') \cup f^{-1}(V')$ و طبق لم ۲-۲-۲، $f^{-1}(U')$ و $f^{-1}(V')$، γ−مجزا هستند. از طرفی طبق لم ۲-۱-۱۲، داریم $S \subset f^{-1}(U')$ یا $S \subset f^{-1}(V')$. بنابراین $f(S) \subset U'$ یا $f(S) \subset V'$ و از این رو $U' = \phi$ یا $V' = \phi$.

تعریف ۲-۲-۴: می‌گوییم نگاشت $f : X \to X'$ ، (γ,γ')−باز است، هرگاه برای هر زیرمجموعه γ−باز S در X، $f(S)$، γ'− باز باشد.

لم ۲-۲-۵: فرض کنیم $f : X \to X'$، (γ,γ')− باز و یک به یک باشد و U و V، زیرمجموعه های γ−مجزای X، باشند آن‌گاه $f(V)$ و $f(U)$، γ'−مجزا هستند.

برهــــان: طبــق لــم ۲-۱-۱۰، مجموعــه هــای γ −بــاز G_u, G_v وجــود دارنــد بــه طــوری کــه $V \subset G_v \subset X - U, U \subset G_u \subset X - V$. بنابراین

$f(V) \subset f(G_v) \subset f(X - U)$ و $f(U) \subset f(G_u) \subset f(X - V)$.

چون G_v, G_u مجموعه های γ − باز می باشند بنابر فرض، $f(G_v), f(G_u)$ ، γ −باز می باشـند. از آن جاکه نگاشت f، یک به یک می باشـد، $f(X - U) \subset X' - f(U)$ و $f(X - V) \subset X' - f(V)$.

بنابراین طبق لم ۲-۱-۱۰، $f(U), f(V)$ ، γ − مجزا هستند.

قضیه۲-۲-۶: فرض کنید نگاشت $f : X \to X'$ ، (γ, γ') −باز و یک به یک باشد. اگـر بـرای هـر زیرمجموعه $S \subset X$ ، $f(S)$ ، γ' −همبند باشد آن گاه S ، γ −همبند است.

برهان: فرض کنیـد U, V دو مجموعـه γ − مجـزا هسـتند بـه طـوری کـه $S = U \cup V$. بنـابراین $f(S) = f(U) \cup f(V)$. طبق لم ۲-۲-۵، $f(U)$ و $f(V)$ ، مجموعه های γ' −مجزا هستند. پس $f(U) = \phi$ یا $f(V) = \phi$. بنابراین $U = \phi$ یا $V = \phi$.

فرض کنیم X و X' فضاهای توپولوژیک هستند $\gamma = i$ و $\gamma' = i'$،در این حالت قضایای بیان شده در این قسمت، به قضایای مهمی در مورد مجموعه های همبند، تبدیل می شوند .

۲-۳: مجموعه های γ-همبند به عنوان زیرفضاهای، فضاهای γ-همبند

فرض کنید $A \subset X_\circ \subset X$. قرار می‌دهیم:

$\gamma_\circ(A) = \gamma(A) \bigcap X_\circ$. واضح است که $\gamma_\circ \in \Gamma(X_\circ)$.

لم ۲-۳-۱: $A \subset X_\circ$، γ-باز است اگر و تنها اگر $\gamma_\circ$، -باز باشد.

برهان: چون A، γ- باز است، $(A) \subset \gamma A$. از طرفی طبق فرض، $A \subset X_\circ$. بنابراین $A \subset \gamma(A) \bigcap X_\circ$، در نتیجه $A \subset \gamma_\circ(A)$.

هر نشانده از $X_\circ$ به X را با $e_\circ$ نمایش می‌دهیم.

نتیجه ۲-۳-۲: نشاننده $e_\circ$، $(\gamma_\circ,\gamma)$-باز است.

نتیجه ۲-۳-۳: اگر $S \subset X_\circ$، γ-همبند باشد، آن‌گاه $\gamma_\circ$-همبند است.

برهان: طبق نتیجه ۲-۳-۲ و قضیه ۲-۲-۶ اثبات واضح است.

تعریف ۲-۳-۴: می‌گوییم $X_\circ \subset X$، γ- پایستار است هرگاه برای هر زیر مجموعه γ-باز $A \subset X$، $A \bigcap X_\circ$، γ-باز باشد.

نکته ۲-۳-۵: فرض می‌کنیم X یک فضای توپولوژیک و G یک زیرمجموعه باز X باشد و $A \subset X$، γ-باز باشد. اگر G در شرط $G \bigcap \gamma(A) \subset \gamma(G \bigcap A)$ صدق کند، آن‌گاه $G \bigcap A$، γ-باز می‌باشد.

با توجه به نکته بالا، در فضای توپولوژیک X، هر زیرمجموعه باز $X_\circ \subset X$ که در شرط $G \bigcap \gamma(A) \subset \gamma(G \bigcap A)$ صدق کند، γ-پایستار است.

مجموعه همه نگاشت‌های $\gamma \in \Gamma(X)$ را که در شرط $\gamma(A) \bigcap G \subset \gamma(A \bigcap G)$ صدق کنند با $\Gamma_۲$ نمایش می‌دهیم.

لم ۲-۳-۶: فرض کنید k=۱و۲و۳ و $\gamma_k \in \Gamma_۲$، و A، $i\gamma_۱ i$-باز و B، $\gamma_۲ i \gamma_۳$-باز باشند و برای هر $C \subset X$ داشته باشیم $\gamma_۱\gamma_۲(C) \subset \gamma_۳(C)$، آن‌گاه $A \bigcap B$، $\gamma_۲ i \gamma_۳$-باز است.

برهـان: بنـابر فـرض $A \subset i\gamma_1 i(A)$ و $B \subset \gamma_2 i\gamma_2(B)$. بنـابراین $A \bigcap B \subset i\gamma_1 i(A) \bigcap \gamma_2 i\gamma_2(B)$. از طرفی با توجه به فرض مسئله رابطه زیر را داریم:

$$A \bigcap B \subset i\gamma_1 i(A) \bigcap \gamma_2 i\gamma_2(B) \subset r_2(i\gamma_1 i(A) \bigcap i\gamma_2(B)) =$$
$$\gamma_2 i(\gamma_1 i(A) \bigcap i\gamma_2(B)) \subset \gamma_2 i r_1(iA \bigcap i\gamma_2 B) \subset \gamma_2 i\gamma_1(iA \bigcap \gamma_2 B) \subset \gamma_2 i\gamma_1\gamma_2(iA \bigcap B) \subset$$
$$\gamma_2 i\gamma_2(iA \bigcap B) \subset \gamma_2 i\gamma_2(A \bigcap B)$$

لم ۲-۳-۷: فرض کنید $k = $ ۱و۲و۳ و $\gamma_k \in \Gamma_2$ و A، $i\gamma_1 i$- باز و B، $\gamma_2 i$- بـاز باشـند و بـرای هـر $C \subset X$، رابطه $\gamma_2\gamma_1(C) \subset \gamma_2(C)$ برقرار باشد، آن‌گاه $A \bigcap B$ ، $\gamma_2 i$ -باز است.

برهان:

$$A \bigcap B \subset i\gamma_1 iA \bigcap \gamma_2 iB \subset \gamma_2(i\gamma_1 iA \bigcap iB) \subset$$
$$\gamma_2(\gamma_1 iA \bigcap iB) \subset \gamma_2\gamma_1(iA \bigcap iB) \subset \gamma_2 i(A \bigcap B)$$

قضیه ۲-۳-۸: فرض کنـیم $\gamma \in \Gamma_2$ و γ $\gamma(A) \subset \gamma(A)$ و $A \subset X$ باشـد. اگـر A، $ii\gamma$ بـاز و B، γ' -باز باشد و $r' = i\gamma, \gamma i, i\gamma i, \gamma i\gamma$، آن‌گاه $\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B}$ ،γ' -باز است.

برهـان: در حالـت $\gamma' = i\gamma$ بـا اسـتفاده از لـم۲-۳-۶ و قـرار دادن $\gamma_2 = \gamma$ و $\gamma_2 = \mathrm{id} \in \Gamma_2, \gamma_1 = \gamma$ نتیجه مطلوب به دست می‌آید.

در حالت $\gamma' = \gamma i$ با قراردادن $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ در لم ۲-۳-۷، نتیجه مورد نظر بدست می‌آید.

$\gamma' = i\gamma i$ بـا قـراردادن $\gamma_2 = i\gamma$ و $\gamma_1 = \gamma$ در لـم ۲-۳-۷ و حالـت $\gamma' = \gamma i\gamma$ بـا قـرار دادن $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$ در لم ۲-۳-۶ نتیجه مورد نظر به دست می آید.

با توجه به قضیه بالا اگر $\gamma \in \Gamma_2$ و γ $\gamma(A) \subset \gamma(A)$، آن‌گاه با قـرار دادن $\gamma' = i\gamma, \gamma\ i, i\gamma\ i, \gamma\ i\gamma$، هر زیر مجموعه $i - i\gamma$باز X_0، γ' -پایستار می‌باشد

لم ۲-۳-۹: اگر X_0، γ - پایستار باشد، آن‌گاه e_0، (γ_0, γ) -پیوسته است.

برهان: فـرض کنـیم $A \subset X$، γ -بـاز اسـت. چـون $e_0^{-1}(A) = A \bigcap X_0$، طبـق فـرض $\mathrm{A} \bigcap \mathrm{X}_0$، γ -باز است و طبق لم ۲-۳-۱، $A \bigcap X_0$، γ_0 -باز است.

نتیجه ۲-۳-۱۰: اگر $X_\circ$، γ-پایستار باشد، آن‌گاه هر زیرمجموعه $\gamma_\circ$-همبند $X_\circ$، γ-همبند است.

برهان: با استفاده از لم ۲-۳-۹ و قضیه ۲-۲-۳، نتیجه مورد نظر بدست می‌آید.

فرض کنیم توپولوژی Γ روی X باشد و γ یکی از α, p, s یا β باشد. اگر $X_o \subset X$، توپولوژی زیرفضایی Γ' روی $X_\circ$ با عملیات $i' = i_{\Gamma'}$ و $c' = c_\Gamma$ را در نظر می‌گیریم و به جز عملیاتی که در بالا روی $X_\circ$ از جمله $\beta_o, \alpha_o, p_o, s_o$ تعریف شد، عملیات $\mathrm{s}' = \mathrm{c}'\mathrm{i}'$ ، $\mathrm{p}' = \mathrm{i}'\mathrm{c}'$ ، $\alpha' = i'c'i'$, $\beta' = c'i'c'$ را تعریف می‌کنیم.

می خواهیم فضایی را معرفی کنیم که β'-باز باشد ولی $\beta_\circ$-باز نباشد:

فرض کنیم $X=R$ و Γ توپولوژی معمولی روی X باشد و $X_\circ$، مجموعه کانتور باشد آن‌گاه $X_\circ$، β'-باز می باشد.

$X_\circ$، β-باز نمی‌باشد زیرا $cicX_\circ = \phi$. (مجموعه کانتور در R بسته می باشد و درونش تهی است)

$X_\circ$، $\beta_\circ$-باز نیز نمی‌باشد زیرا $\beta_\circ A = \beta A \cap X_\circ = cicX_\circ \cap X_\circ = \phi$. در حالی که مجموعه کانتور تهی نمی باشد.

لم ۲-۳-۱۱: فرض کنیم $\gamma = s, p, \alpha, \beta$ و $A \subset X_\circ$، γ- باز باشد آن‌گاه A، γ'-باز است.

برهان: فرض کنیم $A \subset ciA$، چون iA در $X_\circ$ باز است،

$$iA \subset i'A \qquad\qquad A \subset X_\circ \qquad (۱)$$

از طرفی $ciA \cap X_\circ = c'iA \subset c'i'A$. پس $A \subset c'i'A$.

اگر $A \subset icA$، آن‌گاه $icA \cap X_\circ$ در $X_\circ$ باز است و $icA \cap X_\circ \subset cA \cap X_\circ = c'A$. بنابراین

$$icA \cap X_\circ \subset i'c'A \qquad\qquad A \subset X_\circ \qquad (۲)$$

پس $A \subset icA \cap X_\circ \subset i'c'A$.

اگر $A \subset iciA$، آن‌گاه در رابطه ۲ به جای A، iA، قرار می‌دهیم. بنابراین $iciA \bigcap X_o \subset i'c'iA$. از طرفی از رابطه (۱) ، نتیجه می‌شود $A \subset i'c'i'A$. اگر $A \subset cicA$، آن‌گاه

$$cicA \bigcap X_o \subset c(icA \bigcap X_o) \qquad (۳)$$

اثبات رابطه (۳): فرض کنیم $x \in cicA \bigcap X_\circ$ و V همسایگی باز حول x باشد. بنابراین $V \bigcap icA \neq \phi$ و این اشتراک باز می‌باشد. از طرفی $V \bigcap icA \subset cA$. بنابراین

$$V \bigcap icA = V \bigcap icA \bigcap cA \subset c(V \bigcap icA \bigcap A) \subset c(icA \bigcap X_\circ)$$

پس $x \in c(icA \bigcap X_\circ)$ و طبق رابطه (۲) داریم:

$$A \subset cicA \bigcap X_\circ \subset c(icA \bigcap X_\circ) \subset c(i'c'A)$$

و

$$A \subset ci'c'A \bigcap X_\circ = c'i'c'A$$

قضیه ۲-۳-۱۲: اگر $\gamma = s, p, \alpha, \beta$ باشد و $X_\circ$، $\alpha-$باز باشد، آن‌گاه $e_\circ$، (γ', γ) پیوسته است.

برهان: طبق لم ۲-۳-۸، اگر A، $\gamma-$باز باشد آن‌گاه $A \bigcap X_\circ$، $\gamma-$بازاست و طبق قضیه ۲-۳-۱۱ $A \bigcap X_\circ$، $\gamma'-$باز است.

نتیجه ۲-۳-۱۳: اگر $X_\circ$، α-باز باشد و $S \subset X_\circ$، $\gamma'-$همبند باشد و β یا $\gamma = s, p, \alpha$، آن‌گاه S، $\gamma-$همبند است.

برهان: طبق قضیه ۲-۳-۱۲، $e_\circ$، $(\gamma', \gamma)-$پیوسته است. بنابراین طبق قضیه ۲-۲-۳، S، $\gamma-$همبند می باشد.

در قضایای زیر فرض می کنیم X، یک فضای توپولوژیک و $X_\circ \subset X$ است. اگر τ، توپولوژی روی X باشد $\tau_\circ$را توپولوژی زیرفضایی روی $X_\circ$ در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم :

$$i_\circ = i_{\tau_\circ}, c_\circ = c_{\tau_\circ}$$

اگر $A \subset X_\circ$، واضح است که $c_\circ A = cA \bigcap X_\circ$. برای زیرمجموعه $A \subset X_\circ$، $\widehat{\gamma}(A)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\widehat{\gamma}(A) = \gamma(A) \bigcap X_\circ$$

بنابراین $\hat{c} = c_\circ$ و به طور کلی $\hat{i} \neq i_\circ$. می‌توان فرض کرد که $A = X_\circ$ و $X_\circ$، در X باز نیست.

واضح است که دراین حالت $\hat{i} = X_\circ^\circ$ درصورتی که $i_\circ = X_\circ$.

می‌گوییم $\gamma \in \Gamma_{-23}$، هرگاه $\gamma \in \Gamma_2$ و $\gamma\gamma(A) \subset \gamma(A)$.

قضیه ۲-۳-۱۴: فرض کنیم $\gamma \in \Gamma_{-23}$ و $\gamma\ i$ یا $\gamma' = \gamma$ و $X_\circ$، $i\gamma'$–باز و $A \subset X_\circ$، $i_\circ\hat{\gamma}$–باز و یا $i_\circ - i_\circ\hat{\gamma}$باز باشد. در این صورت A، $i\gamma'$–باز است.

برهان: ابتدا حالت $\gamma' = \gamma$را در نظر می‌گیریم طبق فرض، $A \subset i_\circ\hat{\gamma}(A)$. از طرفی $i_\circ\hat{\gamma}(A) = U \bigcap X_\circ$، به طوری که U، مجموعه‌ای باز در X می‌باشد. چون $X_\circ$، $i\gamma'$–باز است، $U \bigcap X_\circ \subset U \bigcap i\gamma(X_\circ)$. از طرفی طبق فرض $i\gamma \in \Gamma_2$. بنابراین $U \bigcap i\gamma(X_\circ) \subset i\gamma(U \bigcap X_\circ)$.

بنابراین $A \subset i\gamma$ $i_\circ\hat{\gamma}(A)$.

چون $\hat{\gamma}(A) = \gamma(A) \bigcap X_\circ \subset \gamma(A)$، می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$i_\circ\hat{\gamma}(A) \subset i\gamma\gamma(A)\ \gamma i$$

و از آن‌جا که $\gamma\gamma(A) \subset \gamma(A)$، نتیجه می‌شود که $A \subset i\gamma(A)$.

حالت $\gamma' = i\gamma$رادر نظر می‌گیریم.