دانشگاه لرستان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

عنوان

شبه محمل‌ها و مکان هندسی نقاط ناکوهن مکالی از مدول‌های متناهی مولد

نگارش

میترا ندری

استاد راهنما

دکتر علیرضا نظری

استاد مشاور

دکتر رضا بیرانوند

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی

آبان ماه ۱۳۹۲

همه امتیازات این پایان نامه به دانشگاه لرستان تعلق دارد. در صورت استفاده از تمام یا بخشی از مطالب این پایان نامه در مجلات، کنفرانس‌ها یا سخنرانی‌ها، باید نام دانشگاه لرستان (یا استاد راهنمای پایان نامه) و نام دانشجو با ذکر ماخذ و ضمن کسب مجوز کتبی از دفتر تحصیلات تکمیلی دانشگاه ثبت شود. در غیر این صورت مورد پیگرد قانونی قرار خواهد گرفت.

چکیده

نام خانوادگی: ندری	**نام:** میترا
عنوان پایان نامه: شبه محمل‌ها و مکان هندسی نقاط ناکوهن مکالی از مدول‌های متناهی مولد	
استاد راهنما: دکتر علیرضا نظری	**استاد مشاور:** دکتر رضا بیرانوند
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد	**رشته:** ریاضی محض(گرایش جبر)
محل تحصیل: دانشگاه لرستان	**دانشکده:** علوم پایه
کلید واژه ها: شبه محمل، مکان هندسی نقاط ناکوهن مکالی، زنجیره‌ای بودن، شرایط سر، خالص بودن	

چکیده: در این پایان نامه با استفاده از زنجیره‌ای بودن حلقه ی $\frac{R}{Ann_R(M)}$، برقراری شرایط سر $(Serre)$ روی $R-$مدول M و خالص بودن حلقه موضعی $\frac{R}{p}$ برای ایده‌آل‌های اول خاصی مانند p در $Supp_R(M)$، به مطالعه‌ی شبه محمل‌ها و مکان هندسی نقاط ناکوهن مکالی از مدول‌های متناهی مولد می‌پردازیم.

سپاسگزاری

سر ارادت ما و آستان حضرت دوست   که هرچه بر سر ما می‌رود ارادت اوست

حمد و سپاس ایزد منان را که بر من منت نهاد و توفیق انجام این پژوهش را عطا فرمود. اکنون که با عنایت خداوند سبحان کار تدوین این پایان نامه به اتمام رسیده است، بر خودم لازم می‌دانم که از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر علیرضا نظری که با زحمات و راهنمایی‌های بی‌دریغشان، همراه همیشگی من بودند، تقدیر و تشکر فراوان داشته باشم. بس سزاوار است که از دکتر مرتضی میرافضل که به عنوان داور رنج خواندن و تصحیح و تدبیر در پایان نامه را بر خود هموار کرده‌اند و آقای دکتر رضا بیرانوند که به عنوان مشاور، حقیر را در نگارش این پایان نامه یاری نمودند، تشکر و قدردانی نمایم. امید است که همواره چراغ دانش ایشان فراروی دانشجویان، راهنما و روشنی‌بخش باشد. در پایان نیز از خانواده عزیزم و تمام دوستانی که مرا در انجام این پایان نامه یاری نمودند، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنم و برای ایشان آرزوی توفیق و بهروزی دارم.

با احترام

میترا ندری

آبان ماه ۱۳۹۲

تاریخچه

فرض کنید (R,m) یک حلقه‌ی موضعی نوتری بوده و M یک $R-$مدول متناهی مولد از بعد d باشد. برای عدد صحیح $i \leq ۰$، مشابه آنچه در منبع [۳] بیان شده است، $i-$امین شبه محمل از مدول M با $Psupp_R^i(M)$ نمایش داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$Psupp_R^i(M) = \{p \in Spec(R) \mid H_{pR_p}^{i-dim(\frac{R}{p})}(M_p) \neq ۰\}$$

حال فرض کنید حلقه‌ی موضعی نوتری (R,m)، خارج قسمتی از حلقه‌ی گرنشتاین موضعی (R',m') باشد که در آن $dim(R') = d'$. $R-$مدول $Ext_{R'}^{d'-i}(M,R')$ را با نماد K_M^i نمایش می‌دهیم. در این صورت K_M^i یک $R-$مدول متناهی مولد است و بعلاوه با توجه به قضیه (۶.۲.۱۱) منبع [۲] داریم:

$$H_m^i(M) \cong Hom_R\big(K_M^i, E(\tfrac{R}{m})\big)$$

که در آن $E(\frac{R}{m})$ پوشش انژکتیو $\frac{R}{m}$ است. در نتیجه‌ی (۶) از منبع [۷]، با استفاده از این یکریختی ثابت شده است که $nCM(M)$، مکان هندسی نقاط ناکوهن مکالی M که به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$nCM(M) = \{p \in Spec(R) \mid \text{کوهن مکالی نیست } M_p\}$$

یک مجموعه‌ی بسته است. بعلاوه در این حالت داریم :

$$Psupp_R^i(M) = Var\big(Ann_R(H_m^i(M))\big) = Supp_R(K_M^i)$$

به عبارتی $Psupp^i_R(M)$ نیز یک مجموعه‌ی بسته است. بنابراین پرسش طبیعی که به ذهن می‌رسد این است که آیا ارتباطی بین بسته بودن مجموعه‌های $nCM(M)$ و $Psupp^i_R(M)$ وجود دارد؟ در فصل سوم از این پایان نامه به بررسی این مطلب می‌پردازیم. مشابه آنچه در منبع [۵] بیان شده است $R-$مدول M را خالص گوییم هرگاه برای هر $\hat{p} \in Ass_{\hat{R}}(\hat{M})$ داشته باشیم $dim(\frac{\hat{R}}{\hat{p}}) = d$.

حال فرض کنید p ایده‌آل اولی از حلقه‌ی R باشد. در منبع [۹] پرسشی به این شکل مطرح شده است که اگر R خالص باشد آیا $\frac{R}{p}$ نیز خالص است؟ هرچند این مورد با ارائه‌ی مثال نقضی در منبع [۱] رد شده است اما این پرسش مطرح می‌شود که تحت چه شرایطی $\frac{R}{p}$ خالص است؟

در فصل چهارم نشان خواهیم داد که تحت شرایط خاصی $\frac{R}{p}$ خالص است.

مقدمه

در این پایان نامه، شبه محمل‌ها [1] و مکان هندسی نقاط ناکوهن مکالی $R-$مدول M [2] با توجه به زنجیره‌ای [3] بودن حلقه‌ی $\frac{R}{Ann_R(M)}$، برقراری شرایط سر [4] روی M و خالص [5] بودن حلقه $\frac{R}{p}$ برای ایده‌آل‌های اول بخصوصی مانند p در $Supp_R(M)$، مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج این پایان نامه نشان می‌دهند که حتی بدون در نظر گرفتن هیچ فرضی روی حلقه R و حتی وقتی که $Psupp^i_R(M)$ بسته نباشد، باز هم شبه محمل‌های M اطلاعات مفیدی از مدول M و حلقه R بدست می‌دهند.

در فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند را می‌آوریم. در بخش اول تعریف مدول‌های یکدست و یکدست باوفا و قضایای مربوط به این مدول‌ها را بیان می کنیم. در بخش دوم توپولوژی‌های ایده‌آلی، تعریف حلقه‌ی کامل [6]، توپولوژی زاریسکی و مفهوم بسته بودن یک مجموعه در این توپولوژی را ارائه می‌دهیم.

---

[1] Pseudo Support

[2] nCM(M)

[3] Catenary

[4] Serre conditions

[5] Unmixed

[6] Complete

در بخش سوم برخی حلقه‌های خاص که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند را تعریف می‌کنیم. در بخش چهارم روش ساختن مدول‌های کوهمولوژی موضعی را توضیح خواهیم داد و در بخش پنجم مفهوم نمایش ثانویه [۷] و ایده‌آل‌های اول چسبیده [۸] برای مدول M و قضایای مربوط به این مفاهیم که در فصل‌های دوم و سوم مورد استفاده قرار می‌گیرد، بیان می‌شود.

در فصل دوم برخی از خواص اساسی شبه محمل‌های مدول M که در ادامه مورد استفاه قرار می‌گیرد بیان می‌گردد.

در بخش اول از فصل سوم، توصیفی از عمق و بعد موضعی‌سازی‌های مدول M را ارائه می‌دهیم و فرمولی برای مشخص کردن نقاط ناکوهن مکالی [۹] از M بدست می‌آوریم و در بخش دوم آن نتیجه می‌گیریم که اگر تمام شبه محمل‌های مدول M بسته باشند، آن‌گاه مجموعه‌ی نقاط ناکوهن مکالی آن نیز بسته است. علاوه بر این چندین رابطه بین بسته بودن مجموعه‌ی نقاط ناکوهن مکالی و شبه محمل های مدول M ارائه می‌دهیم.

در فصل چهارم و در بخش اول آن بسیاری از نتایجی که در حالت خارج قسمتی از یک حلقه گرنشتاین [۱۰] بودن حلقه R، برقرار است را به حالتی که حلقه $\frac{R}{Ann_R(M)}$ زنجیره‌ای کلی [۱۱] و تمام فیبرهای صوری [۱۲]

---

[۷] Secondary representation

[۸] Attached prime ideal

[۹] non-Cohen-Macaulay

[۱۰] Gorenstein

[۱۱] Universally Catenary

[۱۲] Formal fiber

آن کوهن مکالی هستند، توسیع می‌دهیم. بخصوص نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی نقاط ناکوهن مکالی M تحت این فرض‌های ضعیف‌تر نیز بسته است. و در بخش آخر نشان می‌دهیم که مجموعه نقاط ناکوهن مکالی M با زنجیره‌ای کلی بودن حلقه‌ی $\frac{R}{Ann_R(M)}$، برقراری شرایط سر روی M و خالص بودن حلقه‌های $\frac{R}{p}$ برای ایده‌آل‌های اول بخصوصی مانند p در $Supp_R(M)$ ارتباط دارد.

مقاله اصلی مورد مطالعه در این پایان نامه، مقاله زیر می‌باشد:

N.T.Cuong,L.T.Nhan,N.T.K.Nga, On pseudo supports and non-Cohen-Macaulay locus of finitely generated modules,323(2010)3029-3038

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش‌نیازها و مقدمات

۱.۱ مدول‌های یکدست و یکدست باوفا

تعریف ۱.۱.۱ : فرض کنیم R یک حلقه و M یک $R-$مدول باشد. در این صورت اگر به ازای هر دنباله‌ی $\varphi: \cdots \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow \cdots$ از $R-$مدول‌ها و $R-$همریختی‌ها دقیق بودن دنباله φ، دقیق بودن دنباله

$$\varphi \otimes_R M: \ \cdots \longrightarrow N' \otimes_R M \longrightarrow N \otimes_R M \longrightarrow N'' \otimes_R M \longrightarrow \cdots$$

را نتیجه دهد، آن‌گاه گوییم M بعنوان $R-$مدول یکدست است. بخصوص اگر به ازای هر دنباله φ از $R-$مدول‌ها و $R-$همریختی‌ها داشته باشیم : دنباله φ دقیق است اگر و فقط اگر دنباله $\varphi \otimes_R M$ دقیق باشد، آن‌گاه گوییم M بعنوان $R-$مدول یکدست باوفاست.

قضیه ۲.۱.۱ : فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ یک همریختی حلقه‌ها بوده و M یک $B-$مدول باشد. در این صورت M بعنوان $A-$مدول یکدست است اگر و تنها اگر به ازای هر ایده‌آل اول p از B، M_p بعنوان A_q-مدول یکدست باشد وقتی که $q = f^{-1}(p)$.

اثبات : به (۱.۷) منبع [۴] مراجعه شود.

قضیه ۳.۱.۱ : فرض کنید R یک حلقه و M یک $R-$مدول باشد. در این صورت شرایط زیر با هم معادل‌اند:

(الف) M بعنوان $R-$مدول یکدست باوفاست.

(ب) M بعنوان $R-$مدول یکدست است و برای هر $R-$مدول غیرصفر مانند N، $N \otimes_R M \neq 0$.

(ج) M بعنوان $R-$مدول یکدست است و برای هر ایده آل ماکسیمال مانند m از R، $mM \neq M$.

اثبات :

(الف) ⇐ (ب) فرض کنیم N یک $R-$مدول باشد به طوری که $N \otimes_R M = 0$. پس دنباله $0 \longrightarrow N \otimes_R M \longrightarrow 0$ یک دنباله دقیق است و درنتیجه بنا به شرط (الف) دنباله $0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$ یک دنباله دقیق خواهد بود و بنابراین خواهیم داشت $N = 0$ و لذا شرط (ب) برقرار می‌باشد.

(ب) ⇐ (ج) فرض کنیم m ایده‌آل ماکسیمالی از حلقه R باشد. $\frac{R}{m}$ یک $R-$مدول غیر صفر است و لذا با توجه به شرط (ب) خواهیم داشت : $\frac{R}{m} \otimes_R M \neq 0$.

از طرفی داریم : $\frac{R}{m} \otimes_R M \cong \frac{M}{mM}$.

بنابراین خواهیم داشت $\frac{M}{mM} \neq 0$ و درنتیجه $mM \neq M$ و لذا شرط (ج) برقرار می باشد.

(ج) ⇐ (ب) فرض کنیم N یک $R-$مدول غیرصفر باشد. عنصر غیرصفر $x \in N$ را در نظر

می‌گیریم. داریم $Ann_R(x) \neq R$ بنابراین ایده‌آل ماکسیمال m از R موجود است به طوری که $Ann_R(x) \subseteq m$ لذا با توجه به شرط (ج) خواهیم داشت $Ann_R(x)M \neq M$ و درنتیجه داریم $\frac{M}{Ann_R(x)M} \neq ۰$. بنابراین با توجه به یکریختی

$$\frac{R}{Ann_R(x)} \otimes_R M \cong \frac{M}{Ann_R(x)M}$$

خواهیم داشت :

$$\frac{R}{Ann_R(x)} \otimes_R M \neq ۰.$$

از طرفی داریم :

$$\frac{R}{Ann_R(x)} \cong Rx.$$

بنابراین خواهیم داشت : $Rx \otimes_R M \neq ۰$.

از طرفی چون M بعنوان $R-$مدول یکدست است، از رشته دقیق $N \longleftarrow Rx \longleftarrow ۰$ رشته دقیق $N \otimes_R M \longleftarrow Rx \otimes_R M \longleftarrow ۰$ حاصل می‌شود و درنتیجه خواهیم داشت $N \otimes_R M \neq ۰$ و لذا شرط (ب) برقرار می‌باشد.

(ب) $\Leftarrow$ (الف) فرض کنیم دنباله $N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ یک دنباله از $R-$مدول‌ها و $R-$همریختی ها بوده به طوری که دنباله‌ی

$$N' \otimes_R M \xrightarrow{f\otimes Id_M} N \otimes_R M \xrightarrow{g\otimes Id_M} N'' \otimes_R M$$

یک دنباله دقیق باشد. در این صورت خواهیم داشت :

$$(g\ o\ f) \otimes_R Id_M = (g \otimes_R Id_M)\ o\ (f \otimes_R Id_M) = 0$$

و بنابراین داریم :

$$Im(g\ o\ f) \otimes_R M = 0$$

لذا با توجه به شرط (ب) خواهیم داشت : $Im(g\ o\ f) = 0$ و درنتیجه $Im(f) \subseteq Ker(g)$.

حال دنباله‌های دقیق زیر را در نظر می‌گیریم :

$$0 \longrightarrow Im(f) \overset{\mu_1}{\hookrightarrow} Ker(g) \xrightarrow{\pi_1} \frac{Ker(g)}{Im(f)} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow Ker(g) \overset{\mu_2}{\hookrightarrow} N \xrightarrow{\pi_2} \frac{N}{Ker(g)} \longrightarrow 0$$

چون M بعنوان $R-$مدول یکدست می‌باشد، دنباله‌های دقیق زیر حاصل می‌شوند :

$$0 \longrightarrow Im(f) \otimes_R M \overset{\mu_1 \otimes Id_M}{\longrightarrow} Ker(g) \otimes_R M \overset{\pi_1 \otimes Id_M}{\longrightarrow} \frac{Ker(g)}{Im(f)} \otimes_R M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow Ker(g) \otimes_R M \overset{\mu_2 \otimes Id_M}{\longrightarrow} N \otimes_R M \overset{\pi_2 \otimes Id_M}{\longrightarrow} \frac{N}{Ker(g)} \otimes_R M \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

فرض کنیم :

$$\widetilde{f} : N' \longrightarrow Im(f) \quad ; \ \widetilde{f}\ (x) = f(x)$$

$$\widetilde{g} : \frac{N}{Ker(g)} \longrightarrow N'' \quad ; \ \widetilde{g}\ (x + Ker(g)) = g(x)$$

$$\lambda : Im(f) \longrightarrow N \quad ; \ \lambda(x) = x$$

حال با توجه به پوشا بودن $\widetilde{f}$ و تساوی $f = \lambda\ o\ \widetilde{f}$ داریم :

$$Im(f \otimes Id_M) = Im\Big((\lambda\ o\ \widetilde{f}) \otimes Id_M\Big) = Im\Big((\lambda \otimes Id_M)\ o\ (\widetilde{f} \otimes Id_M)\Big) = Im(\lambda \otimes Id_M)$$

اما از طرف دیگر با توجه به یک به یک بودن $\widetilde{g}$ و دقیق بودن دنباله $(*)$ خواهیم داشت :

$$Ker(g \otimes Id_M) = Ker\Big((\widetilde{g}\ \ o\, \pi_۲) \otimes Id_M\Big) = Ker\Big((\widetilde{g} \otimes Id_M)\ o\ (\pi_۲ \otimes Id_M)\Big)$$
$$= Ker(\pi_۲ \otimes Id_M) = Im(\mu_۲ \otimes Id_M)$$

بنابراین داریم :

$$(\lambda \otimes Id_M)\Big(Im(f) \otimes_R M\Big) = Im(f \otimes Id_M) = Ker(g \otimes Id_M) = (\mu_۲ \otimes Id_M)\Big(Ker(g) \otimes_R M\Big)$$

پس با توجه به تساوی $\lambda = \mu_۲\ o\ \mu_۱$ و یک به یک بودن $\mu_۲ \otimes Id_M$ نتیجه می‌گیریم :

$$(\mu_۱ \otimes Id_M)\Big(Im(f) \otimes_R M\Big) = Ker(g) \otimes_R M$$

پس داریم : $\frac{Ker(g)}{Im(f)} \otimes_R M = ۰$ لذا بنا به شرط (ب) داریم : $\frac{Ker(g)}{Im(f)} = ۰$.

یعنی $Ker(g) = Im(f)$. $\square$

قضیه ۴.۱.۱ : فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ یک همریختی حلقه‌ها بوده و $f^* : Spec(B) \longrightarrow Spec(A)$ نگاشت القا شده توسط f باشد. در این صورت اگر M یک $B-$مدول بوده و بعنوان $A-$مدول یکدست باوفا باشد، آن‌گاه داریم :

$$f^*\big(Supp_B(M)\big) = Spec(A).$$

اثبات : بدیهی است که $f^*\big(Supp_B(M)\big) \subseteq Spec(A)$.

بنابراین کافیست نشان دهیم : $Spec(A) \subseteq f^*\big(Supp_B(M)\big)$.

فرض کنیم $p \in Spec(A)$ و $S = A - p$. قرار می‌دهیم :

$$K(p) = \frac{A}{p} \otimes_A A_S \qquad \text{و} \qquad C = B \otimes_A K(p)$$

یکریختی‌های حلقه‌ای و $B-$مدولی زیر وجود دارد :

$$\begin{aligned} C = B \otimes_A K(p) &= B \otimes_A (\tfrac{A}{p} \otimes_A A_S) \\ &\cong \tfrac{B}{pB} \otimes_A A_S \\ &\cong S^{-1}(\tfrac{B}{pB}) \\ &\cong \big(f(S)\big)^{-1}(\tfrac{B}{pB}) \\ &\cong \frac{\big(f(S)\big)^{-1}(B)}{\big(f(S)\big)^{-1}(pB)} \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم : $M' = M \otimes_B D$ و $D = \frac{\left(f(S)\right)^{-1}(B)}{\left(f(S)\right)^{-1}(pB)}$.

داریم :

$$M' \cong M \otimes_B C \cong M \otimes_B (B \otimes_A K(p))$$
$$\cong (M \otimes_B B) \otimes_A K(p)$$
$$\cong M \otimes_A K(p).$$

از طرفی $K(p) \neq 0$ و M بعنوان $A-$مدول یکدست باوفاست، لذا بنا به قضیه قبل داریم :

$$M' = M \otimes_A K(p) \neq 0.$$

بنابراین $p^* \in Spec(D)$ موجود است به طوری که $M'_{p^*} \neq 0$. حال همریختی حلقه‌ای طبیعی $g : B \longrightarrow D$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $p' = g^{-1}(p^*)$ در این صورت g همریختی حلقه‌ای $\tilde{g}: B_{p'} \longrightarrow D_{p^*}$ را القا می‌کند و درنتیجه D_{p^*} را می‌توان $B_{p'}-$مدول در نظر گرفت. لذا خواهیم داشت :

$$M'_{p^*} = (M \otimes_B D)_{p^*} = (M \otimes_B D) \otimes_D D_{p^*}$$
$$= M \otimes_B (D \otimes_D D_{p^*}) = M \otimes_B D_{p^*}$$
$$= M \otimes_B (B_{p'} \otimes_{B_{p'}} D_{p^*})$$
$$= (M \otimes_B B_{p'}) \otimes_{B_{p'}} D_{p^*} = M_{p'} \otimes_{B_{p'}} D_{p^*}$$

از طرفی $M'_{p^*} \neq 0$ درنتیجه $M_{p'} \neq 0$ و لذا $p' \in Supp_B(M)$.

با توجه به تعریف g و اینکه $p' = g^{-1}(p^*)$ داریم :

$$pB \subseteq p' \qquad \text{و} \qquad p' \cap f(S) = \emptyset$$

بنابراین داریم :

$$f^{-1}(p') \subseteq p \quad \text{و} \quad p \subseteq f^{-1}(p') \quad \Longrightarrow \quad p = f^{-1}(p')$$

لذا $p \in f^{*}\big(Supp_B(M)\big)$ و بنابراین $Spec(A) \subseteq f^{*}\big(Supp_B(M)\big)$. $\square$

قضیه ۵.۱.۱ :($going\ down$) فرض کنید $\varphi : A \longrightarrow B$ یک همریختی حلقه‌ها بوده و تحت این همریختی B بعنوان $A-$مدول یکدست باشد. هرگاه p, p' ایده‌آل‌های اولی از حلقه A و q' ایده‌آل اولی از حلقه B باشد به طوری که $\varphi^{-1}(q') = p'$ و $p \subseteq p'$، آن‌گاه ایده‌آل اول q از B موجود است به طوری که $q \subseteq q'$ و $\varphi^{-1}(q) = p$.

اثبات : فرض کنیم $p, p' \in Spec(A)$ و $q' \in Spec(B)$ به طوری که $\varphi^{-1}(q') = p'$ و $p \subseteq p'$.

همریختی حلقه‌ای $\widetilde{\varphi}: A_{p'} \longrightarrow B_{q'}$ با ضابطه تعریف $\widetilde{\varphi}\,(\frac{r}{s}) = \frac{\varphi(r)}{\varphi(s)}$ توسط φ القا می‌شود.

B بعنوان $A-$مدول یکدست است و از طرفی داریم : $\varphi^{-1}(q') = p'$ لذا بنا به قضیه (۲.۱.۱)، $B_{q'}$ بعنوان $A_{p'}-$مدول یکدست است. از طرفی داریم : $\widetilde{\varphi}\,(p'A_{p'}) \subseteq q'B_{q'}$.

لذا $(p'A_{p'})B_{q'} \neq B_{q'}$. درنتیجه بنا به قضیه (۳.۱.۱)، $B_{q'}$ بعنوان $A_{p'}-$مدول یکدست باوفاست.

بنابراین با توجه به قضیه (۴.۱.۱)، ایده‌آل اول q'' از $B_{q'}$ موجود است به طوری‌که $\widetilde{\varphi}^{-1}\,(q'') = pA_{p'}$.

ایده‌آل اول q از B موجود است به طوری که $q'' = qB_{q'}$ و $q \subseteq q'$. نشان می‌دهیم $\varphi^{-1}(q) = p$.

فرض کنیم $x \in p$ در این صورت داریم $\frac{x}{1} \in pA_{p'}$ بنابراین $\widetilde{\varphi}\,(\frac{x}{1}) = \frac{\varphi(x)}{1} \in q''$.

در نتیجه $\varphi(x) \in q$ و لذا خواهیم داشت $x \in \varphi^{-1}(q)$ بنابراین $p \subseteq \varphi^{-1}(q)$.

به عکس فرض کنیم $x \in \varphi^{-1}(q)$ باشد بنابراین $\varphi(x) \in q$ درنتیجه $\widetilde{\varphi}\,(\frac{x}{1}) = \frac{\varphi(x)}{1} \in q''$.

لذا خواهیم داشت $\frac{x}{1} \in pA_{p'}$ درنتیجه $x \in p$. لذا $\varphi^{-1}(q) \subseteq p$ درنتیجه داریم $\varphi^{-1}(q) = p$.

بنابراین حکم برقرار می‌باشد. $\square$

قضیه ۶.۱.۱ : فرض کنید $\varphi : A \to B$ یک همریختی بین حلقه‌های نوتری، E یک $A-$مدول و G یک $B-$مدول باشد به طوری که G به عنوان $A-$مدول یکدست باشد. در این صورت اگر $\varphi^* : Spec(B) \longrightarrow Spec(A)$ نگاشت القا شده توسط φ باشد، آن‌گاه شرایط زیر برقرار است :

(الف) اگر $p \in Spec(A)$ و $\frac{G}{pG} \neq 0$ آن‌گاه $\varphi^*\big(Ass_B(\frac{G}{pG})\big) = Ass_A(\frac{G}{pG}) = \{p\}$

(ب) $Ass_B(E \otimes_A G) = \bigcup_{p \in Ass_A(E)} Ass_B(\frac{G}{pG})$

اثبات : به (۲.۲۳) منبع [۴] مراجعه شود.

۲.۱ توپولوژی‌های ایده‌آلی و حلقه‌های کامل

تعریف ۱.۲.۱ : فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت خانواده $F = \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ از ایده‌آل های حلقه R که در شرایط زیر صدق می‌کند،

(الف) به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $I_{n+1} \subseteq I_n$

(ب) به ازای هر $n, k \in \mathbb{N}$، $I_n I_k \subseteq I_{n+k}$

یک فیلتر روی حلقه R نامیده می‌شود. این فیلتر یک توپولوژی روی حلقه R ایجاد می‌کند به طوری که خانواده $B = \{x + I_n\}_{\substack{x \in R \\ n \in \mathbb{N}}}$ پایه این توپولوژی را تشکیل می‌دهد.