بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

(گرایش محض)

اتومورفیسم های برخی از رده های گروه های متناهی

از:

مریم محمدی قصاب پور گفشه

استاد راهنما:

دکتر منصور هاشمی

شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به

همه فرزندان این مرز و بوم که

برای خدمت به بشریت

در تلاشند

تقدیر و تشکر:

حمد و سپاس خداوندی را که زبان از عنایت شکرش قاصر است و خرد در ژرفای معرفتش عاجز. اکنون که با لطف او مرحله دیگری از تحصیلاتم را به پایان می رسانم، بر خود لازم می دانم تا مراتب سپاس و امتنان قلبی خویش را از خانواده و اساتید علمی و اخلاقی خود خواستار باشم.

ابتدا از پدر و مادر، تکیه گاهان زندگی ام، آنان که یاریم کردند تا بیاموزم، سپاسگزارم. همچنین خواهر و برادر نازنینم که همواره مشوقم بوده و هستند.

از اساتید عزیز و گرانقدر گروه ریاضی بخصوص جناب آقای دکتر منصور هاشمی صمیمانه تقدیر و تشکر می نمایم که همواره با سعه صدر، دانش خود را در اختیارم قرار دادند و برایشان آرزوی سلامتی، موفقیت و سر بلندی دارم.

بعلاوه از اساتید بزرگوار جناب آقایان دکتر حبیب اله انصاری و دکتر فرهاد درستکار که قبول زحمت کردند و داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند کمال سپاسگزاری را دارم.

فهرست

عنوان **صفحه**

علایم اختصاری:

n بر m قابل قسمت است .... $m|n$

A زیرگروه B است .... $A \leq B$

A زیرگروه سره B است .... $A < B$

A با B یکریخت است .... $A \cong B$

A زیرگروه نرمال B است .... $A \trianglelefteq B$

مرتبه g .... $|g|$

مرکز G .... $Z(G)$

زیر گروه مشتق G .... G'

مرکز ساز H در G .... $C_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$

بستار نرمال مجموعه R .... $\bar{R}$

گروه آزاد بر مجموعه X .... $F(X)$

زیرگروه تولید شده با مجموعه X .... $\langle X \rangle$

نمایش گروه با مجموعه مولد X و مجموعه روابط R .... $\langle X|R \rangle$

حلقه اعداد صحیح به پیمانه n .... $\mathbb{Z}_{\mathrm{n}}$

بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b .... (a, b)

کوچکترین مضرب مشترک a و b .... $[a, b]$

جابجاگر x_1، x_2، ...، x_n .... $[x_1, \dots, x_n]$

گروه خودریختی های کامل G .... $Aut(G)$

گروه خودریختی های داخلی G .... $Inn(G)$

گروه خودریختی های بیرونی G .... $Out(G)$

گروه خودریختی های مرکزی G .... $Cen(G)$

تابع فی- اویلر .... $\varphi(m)$

گروه دوری از مرتبه n .... C_n

گروه دو وجهی از مرتبه $2m$ .... D_{2m}

گروه خارج قسمتی G بر N .... G/N

نمای گروه G .... $exp(G)$

حاصلضرب نیم مستقیم A به وسیله B .... $[A]B$

....

$r^k \equiv 1 \pmod p$ و برای $i < k$ داریم $r^i \not\equiv 1 \pmod p$ .... $\delta_p(r) = k$

چکیده :

اتومورفیسم های برخی از رده های گروه های متناهی

مریم محمدی قصاب پورگفشه

در این پایان نامه، خودریختی گروه ها را مورد بررسی قرار می دهیم. ابتدا نمایشی برای گروه خودریختی یک رده از گروه های فوق آبلی ۲- مولدی ارائه می دهیم.سپس برخی از گروه های متناهی G را که $|Aut(G)| = ۲pq^۲$ $(p > q > ۲)$ معرفی می کنیم.

کلید واژه ها:

گروه ، گروه خودریختی ، نمایش گروه

Abstract:

On the automorphisms of some classes of finite groups

Maryam mohammadi ghasab pour ghafshe

In this dissertation,we study the automorphism of groups. First we exhibit a presentation for automorphism group of a class of 2-generator metabelian groups. Then we introduce some finite groups G for which $|Aut(G)| = 2pq^2\ (p > q > 2)$.

Key words :

Groups , Automorphism groups, Group Presentation.

مقدمه:

تاکنون افراد زیادی گروه های خودریختی را مورد مطالعه قرار دادند که البته بیشتر آنها علاقه مند به $p-$ گروه ها بوده اند.در [۲] بیدول و کاران[۱]، گروه خودریختی $p-$ گروه های فوق دوری را مورد بررسی قرار داده اند. در [٦] جمالی برخی از گروه های ناآبلی با گروه خودریختی آبلی را ارائه می کند. در سال ۱۹۸۳ مک هال[۲] شروع به بررسی گروه های متناهی کرد که می توانند گروه خودریختی از یک گروه متناهی باشند و نتایج او، تمام گروه های متناهی G را با $|Aut(G)| = ۲^{n}$ که $n \leq ٤$ تعیین می کند ([۱۲]). بررسی های او، علاقه مندان زیادی را جذب کرد و هم اکنون مقالات زیادی قابل دسترسی می باشند که با آن مسئله در حالت های خاص مرتبط اند.

مقاله هایی که در این پایان نامه مورد بررسی قرار گرفته اند، تحت عنوان خودریختی یک رده از گروه ها و گروه های متناهی با گروه خودریختی از مرتبه $۲pq^{۲}$ که $p > q > ۲$ می باشند ([٥] و [۱۱]).

این بررسی مشتمل بر سه فصل است :

فصل اول به تعاریف و قضایایی در نظریه گروه ها از جمله گروه جابجاگر، گروه پوچتوان، حاصلضرب نیم مستقیم و نمایش گروه اختصاص دارد.

در فصل دوم به مطالعه گروه $H_m = \langle x, y | x^{m^{۲}} = y^{m} = ۱ , y^{-۱}xy = x^{۱+m} \rangle$ به ازای $m \geq ۲$ می پردازیم که شامل دو بخش می باشد .در بخش اول برخی از خواص H_m را بررسی می کنیم و نشان می دهیم که H_m گروهی فوق خاص است. بخش دوم به مشخص سازی گروه خودریختی H_m اختصاص داده شده است.

در فصل سوم برخی از گروه های متناهی با گروه خودریختی از مرتبه $۲pq^{۲}$ که p و q اعداد اول متمایز و $p > q > ۲$ می باشند را معرفی می نماییم.

[۱] Bidwell and Curran
[۲] MacHale

فصل اول

تعاریف و مطالب پیشنیاز

در این فصل برخی از مفاهیم و نتایج بنیادی را که در فصل های آتی مورد نیاز خواهد بود، می آوریم. برهان قضایا و لم های این فصل را در مرجع [۱] می توان یافت.

۱-۱. مفاهیم مقدماتی

۱-۱-۱ تعریف . فرض کنید H یک زیرمجموعه ناتهی از گروه G باشد. در این صورت مرکزساز H در G عبارت است از:

$$C_G(H) = \{g \in G \mid gx = xg \ ; \ \forall x \in H\}$$

و اگر $H = G$، در این صورت $C_G(G)$ را مرکز گروه G نامیم و با $Z(G)$ نشان می دهیم.

۱-۱-۲ قضیه (قضیه کوشی) . فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد، به طوری که p عدد اول و $p \mid |G|$ آنگاه G دارای عضوی از مرتبه p است.

۱-۱-۳ قضیه . هرگاه G یک گروه آبلی متناهی باشد و m عدد صحیح مثبت که $m \mid |G|$، آنگاه G دارای زیرگروهی از مرتبه m است. بخصوص اگر G دوری باشد، چنین زیر گروهی منحصربفرد است.

۱-۱-٤ تعریف . فرض کنیم p یک عدد اول باشد. گروه G را یک p – گروه می نامیم هرگاه مرتبه هر عضو G توانی از p باشد. زیرگروه H از گروه G را یک p – زیرگروه می نامیم هرگاه H یک p – گروه باشد. همچنین مرکز هر p – گروه، غیر بدیهی است .

تبصره . گروه متناهی G یک p – گروه است اگر و تنها اگر $|G|$ توانی از عدد اول p باشد .

۱-۱-۵ تعریف . فرض کنیم G یک گروه و $T,S \subseteq G$. در این صورت T و S را مزدوج یکدیگر گوییم هرگاه $x \in G$ موجود باشد به قسمی که :

$$xSx^{-۱} = \{xyx^{-۱} \mid y \in S\} = T.$$

۱-۱- ٦ تعریف . فرض کنیم m یک عدد طبیعی بزرگتر از یک باشد. در این صورت مجموعه همه اعداد طبیعی مانند n که $n < m$ و m و n متباین اند را $U(m)$ می نامیم. مجموعه $U(m)$ با عمل ضرب اعداد طبیعی به پیمانه m یک گروه آبلی تشکیل می دهد. این گروه را با همان علامت $U(m)$ نشان می دهیم. بنابراین $|U(m)| = \varphi(m)$ که در آن φ تابع ضربی اویلر است.

۱-۱-۷ تعریف . فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت $\mathrm{H} \leq \mathrm{G}$ را یک $p-$ زیرگروه سیلوی G می نامیم هرگاه :

i. H یک $p-$ زیرگروه G باشد .

ii. اگر K یک $p-$ زیرگروه G باشد به قسمی که $H \leq K$ آنگاه $H = K$.

۱-۱-۸ قضیه (قضایای سیلو) . اگر p یک عدد اول باشد به طوری که $|G| = p^m r$، $m \geq ۱$ و $(p\,,r) = ۱$ آنگاه:

الف) به ازای هر $۱ \leq i \leq m$، گروه G دارای زیرگروهی از مرتبه p^i است.

ب) هر دو $p-$ زیرگروه سیلوی G مزدوجند.

ج) اگر n_{p} تعداد $p -$ زیر گروه های سیلوی G باشد، آنگاه :

i . $n_{\mathrm{p}} = ۱ + kp$ که k یک عدد صحیح نامنفی است.

ii. $n_p \mid |G|$.

به سادگی می توان نشان داد که S تنها p – زیر گروه سیلوی گروه متناهی G است اگر وتنها اگر $S \trianglelefteq G$.

۱-۱-۹ تعریف . فرض کنیم G یک گروه باشد، در این صورت کوچکترین عددی که توسط مرتبه هر یک از اعضای G عاد می شود را نمای گروه G نامیم و با $exp(G)$ نمایش می دهیم. اگر G گروهی دوری و متناهی باشد، آنگاه $exp(G) = |G|$.

۱-۱-۱۰ تعریف . فرض کنیم $\{(G_i, *_i)\}_{i=۱}^{n}$ خانواده ای از گروه ها باشد.($*_i$ عمل دو تایی مربوط به گروه G_i) حاصلضرب دکارتی آن ها یعنی :

$$G = G_۱ \times G_۲ \times \cdots \times G_n = \{(g_۱, g_۲, \dots, g_n) \mid g_i \in G_i, ۱ \leq i \leq n\}$$

را همراه با عمل دوتایی ❋ که به صورت زیر تعریف می شود ، در نظر می گیریم :

$$\forall\, (g_۱, \dots, g_n), (h_۱, \dots, h_n) \in G\,; (g_۱, \dots, g_n) * (h_۱, \dots, h_n) = (g_۱ *_۱ h_۱, \dots, g_n *_n h_n)$$

می توان دید که $(G, *)$ یک گروه است که $e = (e_۱, \dots, e_n)$ عضو خنثی آن و برای هر $(g_۱, g_۲, \dots, g_n) \in G$ داریم :

$$(g_۱, \dots, g_n)^{-۱} = (g_۱^{-۱}, \dots, g_n^{-۱})$$

$(G, *)$ را حاصلضرب مستقیم خانواده گروه های $\{G_i\}_{i=۱}^{n}$ می نامیم .

همچنین داریم:

i. G آبلی است اگروتنها اگر G_i آبلی باشد.

ii. اگر G_i ها گروه های متناهی باشند آنگاه $|G| = |G_۱||G_۲| \cdots |G_n|$.

iii. $Z(G) = Z(G_۱ \times G_۲ \times \cdots \times G_n) = Z(G_۱) \times Z(G_۲) \times \cdots \times Z(G_n)$.

۱-۱-۱۱ تعریف . فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد، در این صورت هر تابع یک به یک و پوشا از X به X را یک جایگشت می نامیم، مجموعه همه جایگشت های X با عمل ترکیب توابع تشکیل یک گروه می دهد، این گروه را گروه متقارن بر X می خوانیم و آن را با S_X نشان می دهیم. هرگاه $X = \{۱, \dots, n\}$ آنگاه S_X را با S_n نشان می دهیم و آن را گروه متقارن از درجه n می نامیم و داریم $|S_n| = n!$.

۱-۱-۱۲ قضیه . فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی باشد. در این صورت G به حاصلضرب مستقیم زیر گروه های سیلویش تجزیه می شود. به عبارت دیگر، اگر $\{p_۱, \dots, p_\mathrm{n}\}$ مجموعه همه اعداد اولی باشد که در تجزیه $|G|$ ظاهر می شوند آنگاه $G = G_۱ \times G_۲ \times \cdots \times G_n$ که در آن $G_\mathrm{i} \in syl_{p_i}(\mathrm{G})$.

برهان . به قضیه ۱.۱.٦ منبع [۱] مراجعه شود. ■

۱-۱-۱۳ تعریف . فرض کنیم G یک p - گروه آبلی متناهی غیر بدیهی باشد. در این صورت زیر گروه های $H_۱$،$H_۲$،...،H_n وجود دارند به قسمی که $H_i = \langle x_i \mid x_i^{p^{e_i}} = ۱ \rangle$ ، $(۱ \leq i \leq n)$ و $G = H_۱ \times H_۲ \times \cdots \times H_n$ در این حالت G را از نوع $(p^{e_۱}, p^{e_۲}, \dots, p^{e_n})$ گوییم. اگر گروه G از نوع $(p, \dots, p)$ باشد، آنگاه G را p - گروه آبلی مقدماتی می نامیم.

بعنوان مثال $G = C_۲ \times C_۲ \times C_۲$ ، یک ۲- گروه آبلی مقدماتی است.

۱-۱-۱٤ تعریف . فرض کنیم F یک میدان باشد. در این صورت:

$$GL(n,F) = \left\{A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n} \middle| a_{ij} \in F, \det A \neq ۰\right\}$$

با عمل ضرب ماتریس ها تشکیل یک گروه می دهد که آن را گروه خطی عام (از درجه n بر F) می نامیم.

۱-۱-۱۵ قضیه . فرض کنیم n یک عدد طبیعی مفروض و $|F| = \mathrm{q}$ که q توان مثبتی از یک عدد اول است در این صورت:

$$|GL(n,\mathrm{q})| = (q^{\mathrm{n}} - ۱)(q^{\mathrm{n}} - \mathrm{q}) \cdots (q^{\mathrm{n}} - q^{\mathrm{n}-۱}).$$

۱-۱-۱۶ قضیه . فرض کنیم G یک $p-$ گروه آبلی مقدماتی از مرتبه p^{n} باشد، که p عددی اول اســت و $n \in \mathbb{N}$. در این صورت $Aut(G) \cong GL(n,p)$ و داریم $|Aut(G)| = (p^{\mathrm{n}} - p^{\mathrm{n}-۱})(p^{\mathrm{n}} - p^{\mathrm{n}-۲}) \cdots (p^{\mathrm{n}} - ۱)$.

برهان . به قضیه ۲.۲.۳ منبع [۱] مراجعه شود. ■

۱-۱-۱۷ قضیه . فرض کنیم $G = H \times K$ تجزیه ای از G به حاصلضرب مستقیم دو زیر گروه نرمالش باشد، در این صورت اگر G متناهی باشد و $(|H|\,,|K|) = ۱$ آنگاه $Aut(G) \cong Aut(H) \times Aut(K)$.

برهان . به قضیه ۲.٤.٦ منبع [۱] مراجعه شود. ■

۱-۱-۱۸ تعریف . گروه نا آبلی G را کاملاً نا آبلی گوییم، در صورتی که G عامل مستقیم آبلی نا بدیهی نداشته باشد. بعنوان مثال $S_۳$ یک گروه کاملاً نا آبلی است.

۱-۱-۱۹ تعریف . فرض کنیم G یک گروه دلخواه و H یک گروه آبلی باشد. در این صورت مجموعه همه همریختی ها از G به H را با $Hom(G\,,H)$ نمایش می دهیم. بعلاوه $Hom(G\,,H)$ با عمل ضرب نقطه ای یک گروه آبلی است. (برای هر f و g در $Hom(G\,,H)$ و هر x در G ، $(\mathrm{f.g})(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x})\,\mathrm{g}(\mathrm{x})$). همچنین همریختی همانی G را با علامت ε و همریختی صفر را با علامت $\circ$ نمایش می دهیم.

۱-۱-۲۰ تعریف . فرض کنیم G یک گروه باشد و $x \in G$، در این صورت نگاشت f_x از G به G با ضابطه $y \longmapsto x^{-1}yx$ یک خودریختی G است که آن را خودریختی داخلی G می نامیم. مجموعه همه خودریختی های داخلی G ، زیر گروهی از $Aut(G)$ می باشد که آن را گروه خودریختی های داخلی G می نامیم و با $Inn(G)$ نمایش می دهیم.

۱-۱-۲۱ لم . $Inn(G) \lhd Aut(G)$ و $\frac{G}{Z(G)} \cong Inn(G)$. بعلاوه اگر G/N دوری و $N \leq Z(G)$ باشد آنگاه G آبلی است.

۱-۱-۲۲ تعریف . فرض کنیم G یک گروه باشد، در این صورت گروه خودریختی مرکزی G را با نماد $Cen\ (G)$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathrm{Cen}\ (G) = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(G) | g^{-1}\alpha\ (g) \in Z(G)\ ;\ \forall g \in G\}.$$

۱-۲. گروه جابجاگر

۱-۲-۱ تعریف . هرگاه G یک گروه و $x , y \in G$ باشد، آنگاه $[x , y] = x^{-۱} y^{-۱} x y$ را " جابجاگر y, x " می نامیم. زیر گروه تولید شده توسط همه جابجاگرهای گروه G را با G' نمایش می دهیم و آن را زیر گروه مشتق (زیر گروه جابجاگر) G می نامیم. در واقع G' بصورت زیر خواهد بود:

$$G' = \langle [x , y] \mid x , y \in G \rangle.$$

تبصره . $x^y = y^{-۱} xy$ را مزدوج x بوسیله y می نامیم.

بطور کلی فرض می کنیم $x_۱, x_۲, \dots, x_n$ عناصر گروه G باشند. یک جابجاگر ساده از وزن n $(n > ۲)$ بطور بازگشتی با قاعده زیر تعریف می شود:

$$[x_۱ , x_۲ , \dots , x_n] = \left[[x_۱ , \dots , x_{n-۱}] , x_n \right].$$

بطور مشابه می توان جابجاگرها را برای زیر گروه های گروه G تعریف کرد.

۱-۲-۲ تعریف . فرض می کنیم $X_۱, X_۲, \dots$ زیرگروه هایی از گروه G باشند. زیر گروه جابجاگر $X_۱ , X_۲$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$[X_۱ , X_۲] = \langle [x_۱ , x_۲] \mid x_۱ \in X_۱ , x_۲ \in X_۲ \rangle.$$

بطور کلی به ازای $n \geq ۲$ ،

$$[X_۱ , X_۲ , \dots , X_{n-۱}, X_n] = \left[[X_۱ , X_۲ , \dots , X_{n-۱}] , X_n \right] = \langle [x_۱ , x_۲ , \dots , x_n] \rangle \qquad (x_i \in X_i).$$

با استفاده از تعریف جابجاگر، لم های زیر را به سادگی می توان اثبات نمود، همچنین برای یادگیری مطالب بیشتر در این زمینه می توان به [۱۳] مراجعه کرد.

۱-۲-۳ لم . فرض کنیم x , y, z عناصر گروه G باشند. در این صورت:

i. $xy = yx[x , y]$.

ii. $[x , y]^z = [x^z , y^z] , \ [x , y] = [y , x]^{-1}$.

iii. $x^y = x[x , y]$.

iv. $[x , yz] = [x , z] \, [x , y]^z , \ [xy , z] = [x , z]^y \, [y , z]$. (اتحادهای هال)

v. $[x , y^{-1}] = \left([x , y]^{y^{-1}}\right)^{-1} = [y , x]^{y^{-1}}$.

vi. $[x^{-1} , y] = \left([x , y]^{x^{-1}}\right)^{-1} = [y , x]^{x^{-1}}$.

vii. $[x, y^{-1}, z]^y \, [y, z^{-1}, x]^z \, [z, x^{-1}, y]^x = 1 , [x, y, z^x] \, [z, x, y^z] \, [y, z, x^y] = 1$.
(اتحاد ویت)

۱-۲-٤ لم . فرض کنیم H , K زیر گروه هایی از گروه G باشند، در این صورت داریم :

i. $[H , K] = [\mathrm{K} , \mathrm{H}]$.

ii. اگر $H \leq A$ و $K \leq B$ ، آنگاه $[A , B] \leq [\mathrm{H} , \mathrm{K}]$.

iii. اگر $G \lhd K , H$ ، آنگاه $[H , K] \lhd \mathrm{G}$.

تبصره . $[G , G] = G' \lhd G$.

۱-۲-٥ قضیه . فرض کنیم G یک گروه آبلی و G' زیر گروه مشتق آن باشد. در این صورت:

i. اگر $N \lhd G$ ، آنگاه G/N آبلی است اگر و تنها اگر $G' \leq N$.

ii. G/G' آبلی است.

۱-۲-٦ قضیه . اگر G یک گروه باشد وداشته باشیم $G' \subseteq Z(G)$، آنگاه به ازای هر عدد صحیح k و هر $u, v, w \in G$ روابط زیر برقرار است:

i. $[uv, w] = [u, w][v, w]$ ، $[u, vw] = [u, v][u, w]$.

ii. $[u^k, v] = [u, v^k] = [u, v]^k$.

iii. $(uv)^k = u^k\, v^k\, [v, u]^{\frac{k(k-1)}{2}}$.

برهان .

i. به ازای هر عضو u ، v و w از گروه G طبق لم ۱-۲-۳ قسمت (iv) داریم:

$$[uv, w] = [u, w]^v [v, w] \quad \text{و} \quad [u, vw] = [u, w][u, v]^w$$

ابتدا ثابت می کنیم که $[u, vw] = [u, v][u, w]$.داریم $[u, vw] = [u, w]\,[u, v]^w$. حال از آنجایی که $[u, v] \in G' \subseteq Z(G)$ پس $[u, v]$ متعلق به $Z(G)$ است، لذا با هر عضو دلخواه از G مانند w جابه جا می شود. یعنی $[u, v]^w = [u, v]$. زیرا همانطور که می دانیم $Z(G) = \{\, x \in G \mid x^g = x\,;\ \ \forall\, g \in G\}$.

درنتیجه $[u, vw] = [u, w]\,[u, v]$.

به طور مشابه داریم $[uv, w] = [u, w]^v [v, w]$ ، حال از آنجایی که $[u, w] \in G' \subseteq Z(G)$ پس $[u, w]$ با هرعضو دلخواه *G مانند* v جابه جا می شوند یعنی $[u, w]^v = [u, w]$. و بنابراین $[uv, w] = [u, w][v, w]$.

ii. حال با در نظر گرفتن قسمت (i) و استقرا روی k به اثبات (ii) می پردازیم. به وضوح $[u^k, v] = \left[\underbrace{uu\cdots u}_{k\ \text{مرتبه}}\ , v\right]$.

برای $k = ۲$ داریم:

$$\left[u^{۲}, v\right] = [uu\,, v] = [u, v][u, v] = [u, v]^{۲}.$$

فرض کنیم حکم برای $k - ۱$ برقرار باشد یعنی $\left[u^{k-۱}, v\right] = [u, v]^{k-۱}$.