بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

گرایش ریاضی محض

عنوان:

خواصی از ایده آل های جبر های BCI

از:

سیده بهاره موسوی نوری

استاد راهنما:

دکتر شهاب الدین ابراهیمی آتانی

اسفند ۱۳۹۳

تقدیم به عزیزترین عزیزانم

مادرم، الگو و افتخار زندگیم

پدرم، معنی زندگیم

خواهرم، بهترین دوست زندگیم

تقدیر و تشکر

سپاس خدایی را که در همه حال نگاهدار و محافظ من است. خدایی که دائم لطف است و قدیم الاحسان.
در اینجا لازم می دانم مراتب تقدیر و قدردانی خود را از کسانی که در مراحل تدوین این پایان نامه مرا مورد لطف و عنایت خود قرار دادند، اعلام دارم:
از استاد راهنمای عزیز و مهربانم جناب آقای پروفسور شهاب الدین ابراهیمی آتانی که همیشه مانند یک پدر پشتیبانم بودند و با صبر و حوصله راهنمایی ام فرمودند. شاگردی ایشان همواره افتخار بزرگی است، که نصیب من شد.
از داوران بزرگوار پایان نامه، جناب آقای پروفسور حبیب الله انصاری طرقی و جناب آقای دکتر فرهاد درستکار که قبول زحمت فرموده، با پذیرفتن داوری این دفاعیه وقت پر ارزش خود را در اختیارم قرار دادند.
از جناب آقای دکتر عباس سهله، نماینده محترم تحصیلات تکمیلی برای حضورشان در جلسه ی دفاعیه.
از پدر و مادر عزیزتر از جانم، که راحتی زندگی خود را مدیون زحماتشان می دانم. همانهایی که دعای خیر و مهر و محبت خود را پشتوانه زندگیم قرار داده اند.
و از خواهر بی نظیر و همیشه یاورم، به خاطر همه ی محبت ها، حمایت ها و تشویق هایش.

فهرست مطالب

چکیده

خواصی از ایده آل های جبر های BCI

سیده بهاره موسوی نوری

در این پایان‌نامه، ابتدا به معرفی مفاهیمی از جبر های BCI و خواص آن ها می پردازیم و در ادامه ایده آل های جبرهای BCI و خواص آن ها را مورد مطالعه و بررسی قرار می دهیم.

واژه‌های کلیدی: جبر BCI، ایده آل، $*-$ایده آل جبر.

پیشگفتار:

مفهوم جبرهای BCI و BCKدر سال ۱۹۶۶ توسط ایمای[1] و ایسکی[2] مطرح شدند[15,13]. این جبر ها دو دسته ی مهم از جبر های منطقی هستند و از زمان مطرح شدنشان بصورت گسترده مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته اند، بخصوص مطالعات بسیاری در زمینه ی انواع ایده آل های این دو جبر و ویژگی های آنها صورت گرفته است. جبرهای دسته ی BCK به عنوان زیر دسته ی مناسبی برای جبرهای دسته ی BCI در نظر گرفته می شوند. خواص این دو دسته جبر را در شاخه های مختلف ریاضیات مانند نظریه گروه ها، آنالیز تابعی، نظریه احتمال و توپولوژی به کار گرفته اند و از آنجایی که یک رابطه ی قوی بین جبرهای BCI و BCK با مجموعه های به طور جزئی مرتب وجود دارد، امروزه خواص و کاربردهای این دو دسته جبر در ریاضیات کاربردی بخصوص در مجموعه های فازی مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است.

این پایان نامه بر اساس [17,16,6,4] و شامل پنج فصل می باشد. در فصل صفر مفاهیم و قضایایی که در چهار فصل دیگر مورد استفاده قرار می گیرند ارائه شده است. فصل اول شامل سه بخش است که در بخش اول آن، مفاهیمی از جبرهای BCI و BCK تعریف و قضایا و مثال هایی ارائه می شود. در بخش دوم، مفهوم ایده آل را در جبر BCI بیان و قضایایی در این مورد مطرح می شود. در بخش سوم، مفهوم اجتماع KG از جبر BCI و قضایایی در این مورد را بیان می کنیم. در فصل دوم، مفاهیم و قضایایی از ایده آل های قوی، $*-$ایده آل ها و ایده آل در اجتماع جبرهای BCI مطرح می شود. در فصل سوم، مفاهیم و ساختارهایی از ایده آل های اول جبر BCI را بیان نموده ایم و در فصل چهارم، مفاهیم و قضایایی از p-ایده آل ها و p-ایده آل های فازی را مطرح نموده ایم.

لازم به ذکر است که در این پایان نامه همه ی تعریف ها، لم ها، قضایا، نتایج و تذکرها شماره ی متوالی دارند. به عنوان مثال، در بخش سوم از فصل اول و چهارمین عنوان دارای شماره ی (۱-۳-۴) می باشد.

[1] Imai
[2] Iseki

فصل صفر : تعاریف و قضایای مقدماتی

مقدمه :

در این فصل برخی مطالب که در فصول آینده مورد استفاده قرار می گیرند را بیان می نماییم.

تعریف(۰-۱): فرض کنیم A یک مجموعه ناتهی باشد و $\le$ یک رابطه در A باشد. در این صورت:

۱) $\le$ انعکاسی (بازتابی) است اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in A$ داشته باشیم: $x \le x$.

۲) $\le$ متقارن است اگر و تنها اگر به ازای هر $x, y \in A$ اگر $x \le y$ آنگاه داشته باشیم: $y \le x$.

۳) $\le$ متعدی است اگر و تنها اگر به ازای هر $x, y, z \in A$ اگر $x \le y$ و $y \le z$ ، آنگاه داشته باشیم: $x \le z$.

۴) $\le$ پادمتقارن است اگر و تنها اگر به ازای هر $x, y \in A$ اگر $x \le y$ و $y \le x$ آنگاه داشته باشیم: $x = y$.

توجه(۰-۲): فرض کنیم $\le$ یک رابطه در مجموعه ی نا تهی A باشد. در این صورت رابطه ی $\le$ را یک رابطه ی هم ارزی نامیم هرگاه $\le$، بازتابی، متقارن و متعدی باشد.

توجه(۰-۳): فرض کنیم $\le$ یک رابطه در مجموعه نا تهی A باشد. در این صورت رابطه ی $\le$ را یک ترتیب جزیی می نامیم هرگاه $\le$، بازتابی ، متعدی و پادمتقارن باشد.

اگر $\le$ یک ترتیب جزیی روی مجموعه ی ناتهی A باشد، آنگاه گوییم $(A,\le)$ یک مجموعه ی به طور جزئی مرتب است.

تذکر(۰-۴): فرض کنیم $(A,\le)$ یک مجموعه ی به طور جزئی مرتب باشد. در این صورت هر زیر مجموعه ی ناتهی B از A خود با رابطه ی $\le$ یک مجموعه ی به طور جزئی مرتب است.

تعریف(۰-۵): فرض کنیم $(A,\le)$ یک مجموعه ی به طور جزئی مرتب باشد. عضوهای b,a از A را مقایسه پذیر نامیم هرگاه $a \le b$ یا $b \le a$. دو عضو یک مجموعه ی به طور جزئی مرتب لزوماً مقایسه پذیر نیستند.

تعریف(۰-۶): اگر هر دو عضو مجموعه ی به طور جزئی مرتب $(A,\le)$ مقایسه پذیر باشند، آنگاه آن یک مجموعه ی مرتب کلی نامیده می شود.

تعریف(۰-۷): فرض کنیم $(A,\le)$ یک مجموعه ی به طور جزئی مرتب باشد و $\varnothing \ne B \subseteq A$. در این صورت :

۱) عنصر $a \in B$ را عنصر ماکزیمم B گوییم هرگاه به ازای هر $x \in B$، $x \le a$ و آن را با نماد max نمایش می دهیم.

۲) عنصر $b \in B$ را عنصرمینیمم B گوییم هرگاه به ازای هر $x \in B$، $b \le x$ و آن را با نماد min نمایش می دهیم.

۳) عنصر $c \in B$ را عنصر ماکزیمال B گوییم هرگاه بعد از c عنصری نیاید یعنی اگر $c \le a$، آنگاه $c = a$.

۴) عنصر $d \in B$ را عنصر مینیمال B گوییم هرگاه قبل از d عنصری نیاید یعنی اگر $e \le d$، آنگاه $e = d$.

۵) عنصر $e \in A$ را یک کران بالای B گوییم هرگاه به ازای هر $x \in B$، $x \le e$. بعلاوه کوچکترین کران بالای B را سوپریمم B گوییم و با نماد sup نمایش می دهیم. یعنی e سوپریمم B می باشد، اگر z یک کران بالایی دلخواه برای B باشد، آنگاه $e \le z$.

۶) عنصر $h \in A$ را یک کران پایینی B گوییم هرگاه به ازای هر $x \in B$، $h \le x$. بعلاوه، بزرگترین کران پایین B را اینفیمم B گوییم و با نماد inf نمایش می دهیم. یعنی h اینفیمم B می باشد، اگر l یک کران پایینی دلخواه برای B باشد، آنگاه $l \le h$.

۷) هر زیر مجموعه ی غیر تهی از A که عناصرش مقایسه پذیر باشند را یک زنجیر A گوییم.

لم(۰-۸)(لم زورن): هرگاه A یک مجموعه ی به طور جزئی مرتب ناتهی باشد به طوری که هر زنجیر در A کران بالایی در A داشته باشد، آنگاه A شامل عنصر ماکزیمال است.

تذکر(۰-۹): فرض کنیم $(A,\le)$ یک مجموعه ی به طور جزئی مرتب باشد. گوییم A در شرط زنجیر صعودی صدق می کند هرگاه هر زنجیری چون $A_1 \le A_2 \le A_3 \le \dots$ ایستا باشد، یعنی وجود داشته باشد $n \in \mathbb{N}$ به طوری که برای هر $k \ge n$ داشته باشیم: $A_n = A_k$، یعنی از مرحله ای به بعد با هم برابر می شوند و زنجیر می ایستد.

تذکر(۰-۱۰): فرض کنیم $(A,\le)$ یک مجموعه ی به طور جزئی مرتب باشد. گوییم A در شرط زنجیر نزولی صدق می کند هرگاه هر زنجیری چون $A_1 \ge A_2 \ge A_3 \ge \dots$ ایستا باشد، یعنی وجود داشته باشد $m \in \mathbb{N}$ به طوری که برای هر $k \ge m$ داشته باشیم: $A_m = A_k$، یعنی از مرحله ای به بعد با هم برابر می شوند و زنجیر می ایستد.

تعریف(۰-۱۱): فرض کنیم G یک مجموعه ناتهی باشد. هر تابع چون $f: G\times G \to G$ را یک عمل دو تایی روی G می نامیم. یک عمل دوتایی را معمولاً با $*$ نمایش می دهیم.

قرداد(۰-۱۲): عمل دو تایی روی G توابعی بصورت زیر می باشند:

1) $*: G\times G \to G$

$$*((a,b)) = a*b$$

2) $+: G\times G \to G$

$$+((a,b)) = a+b$$

تعریف(۰-۱۳): فرض کنیم $G=\{g_1,\dots,g_n\}$ یک مجموعه ی متناهی باشد. در این صورت جدول یک عمل دوتایی روی $*$ را بصورت زیر نشان می دهیم که عنصر واقع در سطر iام و ستون jام برابر $g_i * g_j$ است.

$*$	g_1	g_2	$\cdots$	g_n
g_1	g_1*g_1	g_1*g_2	$\cdots$	g_1*g_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
g_n	g_n*g_1	g_n*g_2	$\cdots$	g_n*g_n

تعریف(۰-۱۴): فرض کنیم $*$ یک عمل دوتایی روی مجموعه ی G باشد. اگر $A\subseteq G$، آنگاه A را تحت عمل $*$ بسته می نامیم هرگاه به ازای هر $a_1,a_2 \in A$ داشته باشیم: $a_1*a_2 \in A$.

تعریف(۰-۱۵): مجموعه G را تحت عمل $*$ شرکت پذیر می نامیم هرگاه به ازای هر $x,y,z \in G$ داشته باشیم:

$$(x*y)*z = x*(y*z).$$

تعریف(۰-۱۶): عمل $*$ را در مجموعه ی G جابجایی نامیم هرگاه به ازای هر $x,y \in G$ داشته باشیم:

$$x*y = y*x$$

تعریف(۰-۱۷): عنصر $e \in G$ را عنصر همانی مجموعه ی G تحت عمل $*$ می نامیم هرگاه به ازای هر $x \in G$ داشته باشیم:

$$x*e = e*x = x$$

تعریف(۰-۱۸): فرض کنیم e عضو همانی G باشد و $a \in G$. گوییم a وارون پذیر است اگر وجود داشته باشد $b \in G$ به طوری که داشته باشیم:

$$a*b = b*a = e$$

تعریف(۰-۱۹): فرض کنیم $*_1,\ldots,*_n$ ، n عمل در مجموعه ی G باشند. در این صورت $(G,*_1,\ldots,*_n)$را یک دستگاه جبری (ساختمان جبری) می نامیم. به طورکلی یک دستگاه جبری تشکیل شده است از یک مجموعه که در آن تعداد متناهی عمل تعریف شده و گاهی در آن تعداد متناهی رابطه نیز تعریف شده است.

تعریف(۰-۲۰): دستگاه جبری $(G,*)$را یک نیم گروه گوییم هرگاه عمل * شرکت پذیر باشد.

تعریف(۰-۲۱): هر نیم گروه را که دارای عضو خنثی باشد را یک شبه گروه نامیم.

تعریف(۰-۲۲): دستگاه جبری $(G,*)$را یک گروه نامیم هرگاه G تحت عمل *، شرکت پذیر باشد، دارای عضو خنثی باشد و هر عضو آن وارون پذیر باشد.

تعریف(۰-۲۳): گروه $(G,*)$را جابجایی یا آبلی گوییم هرگاه تحت عمل *جابجایی باشد.

تعریف(۰-۲۴): فرض کنیم N زیر مجموعه ی نا تهی گروه G باشد. N را زیر گروه $(G,*)$ نامیم هرگاهN تحت عمل * خود یک گروه باشد.

قضیه(۰-۲۵): فرض کنیم $(G,*)$یک گروه باشد و N یک زیر مجموعه ی ناتهی و متناهی G باشد. در این صورت N زیرگروه G است اگر و تنها اگر به ازای هر $a,b\in N$ داشته باشیم: $a*b\in N$.

برهان: ر. ک. قضیه ۹-۳ از مرجع [1].

تعریف(۰-۲۶): فرض کنیم $(G,*)$ یک گروه باشد و $a\in G$. کوچکترین عدد طبیعی چون m را که $a^m=e$ را مرتبه ی a می گوییم و می نویسیم $|a|=o(a)=m$. اگر چنین m ای وجود نداشته باشد می گوییم مرتبه ی a نامتناهی است.

تعریف(۰-۲۷): فرض کنیم A و B ، دو مجموعه باشند. گوییم A هم عدد (هم ارز) B است هرگاه تابعی چون $f:A\to B$ وجود داشته باشد به طوری که f دوسویی (یک به یک و پوشا) باشد.

اگر A هم عدد با B باشد می نویسیم $A\cong B$.

تذکر(۰-۲۸): فرض کنیم A و B دو مجموعه ی متناهی باشند و $|A|=\mathrm{n}$ و $|B|=\mathrm{m}$ و $n,m\in\mathbb{N}$. در این صورت A هم عدد B است اگر و تنها اگر $n=m$.

تذکر(۰-۲۹): یک مجموعه ی نا متناهی می تواند با یک زیر مجموعه ی محض خود هم عدد باشد. برای مثال $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$ و $\mathbb{N}\cong\mathbb{Z}$.

قضیه(۰-۳۰): فرض کنیم A و B دو مجموعه ی متناهی باشد و $f:A\to B$ یک تابع یک به یک باشد. در این صورت $A\simeq f(A)\subseteq B$. در این صورت گوییم A را در B می نشانیم، یعنی A با یک زیر مجموعه ی B هم عدد است. در این صورت f را یک نشاندنی می نامیم.

تذکر(۰-31): همان طور که می دانیم هر مجموعه ی متناهی را به عددی طبیعی چون n نسبت می دهیم و آن را تعداد اعضای آن مجموعه می نامیم و می گوییم دو مجموعه متناهی وقتی تعداد اعضای آنها برابر است اگر و تنها اگر آن دو مجموعه با هم، هم عدد باشند . برای مجموعه های نامتناهی هم آنها را به مفهومی نسبت می دهیم به نام اعداد اصلی (کاردینال ها) و می گوییم عدد اصلی دو مجموعه ی نا متناهی وقتی با هم برابر است که آن دو عدد با هم، هم عدد باشند.

تعریف(۰-۳۲): فرض کنیم $(G,*)$ یک گروه باشد و $\varnothing\neq X\subseteq G$. اشتراک همه ی زیر گروه های G که شامل X هستند را زیر گروه تولید شده توسط X می نامیم و آن را با نماد $\langle X\rangle$ نشان می دهیم.

تعریف(۰-۳۳): گروه G را دوری گوییم هرگاه G عضوی چون a داشته باشد به طوری که زیر گروه تولید شده اش یعنی $\langle a\rangle$ برابر با خودش باشد مانند $\mathbb{Z}=\langle 1\rangle$. در این صورت a را مولد G می نامیم.

اگر a مولد G باشد، آنگاه a^{-1} نیز مولد G است.

قضیه(۰-۳۵): مرتبه ی هر گروه دوری با مرتبه ی مولدش برابر است.

برهان: ر. ک. قضیه ۱۶-۳ از مرجع [1].

قضیه(۰-۳۶): هر گروه دوری آبلی است.

برهان: ر. ک. قضیه ۱۷-۳ از مرجع [1].

قضیه(۰-۳۷): زیر گروه هر گروه دوری، دوری است.

برهان: ر. ک. قضیه ۱۸-۳ از مرجع [1].

تعریف(۰-۳۸): فرض کنیم $(G,*)$و $(G',*')$دو گروه باشند. تابع $\varphi:G\to G'$را یک همریختی گوییم هرگاه به ازای هر $a,b\in G$ داشته باشیم:

$$\varphi(a*b)=\varphi(a)*'\varphi(b).$$

تعریف(۰-۳۹): فرض کنیم $\varphi:G\to G'$ یک همریختی باشد. دراین صورت:

۱) φرا یک تکریختی گوییم هرگاه φ یک به یک باشد.

۲) φرا یک بروریختی گوییم هرگاه φ پوشا باشد.

۳) φرا یک یکریختی گوییم هرگاه φیک به یک و پوشا (دوسویی) باشد. در این حالت گوییم دو گروه G و G' یکریخت هستند و می نویسیم $G\cong G'$.

تعریف(۰-۴۰): فرض کنیم $\varphi:G\to G'$یک همریختی باشد. در این صورت هسته ی φرا بصورت زیر تعریف می کنیم که یک زیر مجموعه ی G است.

$$\varnothing\neq\ker\varphi=\{x\in G\,|\,\varphi(x)=e\}\subseteq G$$

و همچنین تصویر φ را بصورت $\operatorname{Im}\varphi=\{f(x)|x\in G\}$ تعریف می کنیم.

قضیه(۰-۴۱): فرض کنیم $\varphi:G\to G'$یک همریختی باشد. در این صورت:

۱) $\ker\varphi$ یک زیر گروه G است.

۲) φیک به یک است اگر و تنها اگر $\ker\varphi=\{e\}$.

برهان: ر. ک. قضیه ۱-۶ از مرجع [1].

قضیه(۰-۴۲): هرگروه دوری نامتناهی با $\mathbb{Z}$ یکریخت است.

برهان: ر. ک. قضیه ۲۳-۳ از مرجع [1].

قضیه(۰-۴۳): هرگروه دوری متناهی با مرتبه ی n با Z_n یکریخت است.

برهان: ر. ک. قضیه ۲۴-۳ از مرجع [1].

تعریف(۰-۴۴): فرض کنیم $(G,*)$یک گروه باشد. مرکز گروه $(G,*)$را که با نماد $Z(G)$ نشان می دهیم بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$Z(G)=\{x\in G\,|\,\forall a\in G,\ a*x=x*a\}\subseteq G$$

تعریف(۰-۴۵): فرض کنیم N یک زیر گروه G باشد. N در G نرمال است هرگاه به ازای هر $g\in G$ و هر $n\in\mathbb{N}$ داشته باشیم: $g*n*g^{-1}\in N$.

تعریف(۰-۴۶): زیرگروه N در G نرمال است اگر وتنها اگر به ازای هر $a\in G$ داشته باشیم: $a*N*a^{-1}=N$.

تعریف(۰-۴۷): فرض کنیم N یک زیر گروه نرمال G باشد.گروه خارج قسمتی $\frac{G}{N}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\frac{G}{N}=\{Nx\,|x\in G\}.$$

قضیه(۰-۴۸): فرض کنیم N زیرگروه نرمال G باشد. در این صورت:

۱) اگر G آبلی باشد، آنگاه $\frac{G}{N}$ نیز آبلی است.

۲) اگر G دوری باشد، آنگاه $\frac{G}{N}$ نیز دوری است.

برهان: ر. ک. قضیه ۲۶-۴ از مرجع [1].

قضیه(۰-۴۹)(قضیه اساسی همریختی ها): فرض کنیم $f: G \to G'$ یک همریختی گروهی باشد. در این صورت:

۱) $\frac{G}{\ker f} \cong f(G)$

۲) اگر f پوشا باشد، آنگاه $\frac{G}{\ker f} \cong G'$.

برهان: ر. ک. قضیه ۶-۶ از مرجع [1].

تعریف(۰-۵۰): گروه G را ساده گوییم هرگاه تنها زیرگروه های نرمال آن زیرگروه های نرمال بدیهی، یعنی $\{0\}$ و G باشند.

تعریف(۰-۵۱): فرض کنیم p عددی اول باشد. گروه G را یک p– گروه می نامیم هرگاه مرتبه ی هر عضو G توانی از p باشد. به عبارت دیگر به ازای هر $a \in G$ ، وجود داشته باشد $n \in \mathbb{N}$ به طوری که $|a| = p^n$.

تعریف(۰-۵۱): فرض کنیم $G_1, \ldots, G_n$ تعداد n گروه باشد. حاصلضرب مستقیم این n گروه را بصورت زیر تعریف می کنیم و با نماد $\prod_{i=1}^{n} G_i$ نشان می دهیم:

$$\prod_{i=1}^{n} G_i = G_1 * \ldots * G_n = \{(g_1, \ldots, g_n) | g_i \in G_i, 1 \le i \le n\}.$$

عمل * را در $\prod_{i=1}^{n} G_i$ بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$(g_1, \ldots, g_n) * (g_1', \ldots, g_n') = (g_1 g_1', \ldots, g_n g_n')$$

در این صورت $\left(\prod_{i=1}^{n} G_i, *\right)$ یک گروه با عضو همانی $(e_1, \ldots, e_n)$ است و وارون هر عضو چون $(g_1, \ldots, g_n)$ از $\prod_{i=1}^{n} G_i$ بصورت $(g_1^{-1}, \ldots, g_n^{-1})$ است.

قضیه(۰-۵۳): اگر G_1 و G_2 دو گروه باشند، آنگاه $G_1 * G_2$ آبلی است اگر و تنها اگر G_1 و G_2 آبلی باشند.

برهان: ر. ک. تذکر ۱ از مرجع [1].

تعریف(۰-۵۴): فرض کنیم R یک مجموعه ی ناتهی باشد که دو عمل $*_1$ و $*_2$ در R تعریف شده باشد. در این صورت R را یک حلقه می نامیم هرگاه:

۱) $(R, *_1)$ یک گروه آبلی باشد.

۲) عمل $*_2$ شرکت پذیر باشد.

۳) عمل $*_2$ نسبت به عمل $*_1$ از راست به چپ پخشی باشد، یعنی به ازای هر $a,b,c \in R$ داشته باشیم:

$$a *_2 (b *_1 c) = (a *_2 b) *_1 (a *_2 c)$$
$$(b *_1 c) *_2 a = (b *_2 c) *_1 (c *_2 a)$$

در این صورت حلقه ی R را بصورت $(R, *_1, *_2)$ نمایش می دهیم.

تذکر(۰-۵۵): در نظر می گیریم $*_1 = +$ و $*_2 = \cdot$.

تعریف(۰-۵۶): حلقه R را یکدار گوییم هرگاه R نسبت به عمل ضرب دارای عضو خنثی باشد.

تعریف(۰-۵۷): حلقه R را جابجایی گوییم هرگاه R نسبت به عمل ضرب جابجایی باشد.

تعریف(۰-۵۸): فرض کنیم $(R,+,.)$ یک حلقه ی جابجایی باشد. عنصر $0_R \neq a \in R$ را یک مقسوم علیه صفر می نامیم هرگاه وجود داشته باشد $b \neq 0_R$ به طوری که $ab = ba = 0_R$.

تعریف(۰-۵۹): حلقه ی جابجایی R را یک حوزه صحیح می نامیم هرگاه R مقسوم علیه صفر غیر بدیهی نداشته باشد، یعنی به ازای هر $a,b \in R$، اگر $ab = 0_R$، آنگاه $a = 0_R$ یا $b = 0_R$.

تعریف(۰-۶۰): حلقه ی $(R,+,.)$ را یک حلقه ی تقسیم (بخشی) گوییم هرگاه $\left(R-\{0_R\},.\right)$ یک گروه باشد، یعنی هر عضو ناصفر دارای وارون باشد.

تعریف(۰-۶۱): هر حلقه ی تقسیم جابجایی را یک میدان می نامیم، یعنی $\left(R-\{0_R\},.\right)$ یک گروه آبلی باشد.

تعریف(۰-۶۲): فرض کنیم R یک حلقه باشد. زیر مجموعه ی ناتهی S از R را یک زیر حلقه گوییم هرگاه S با اعمال R یک حلقه باشد.

تعریف(۰-۶۳): فرض کنیم $(R,+,.)$ یک حلقه باشد و $\varnothing \neq I \subseteq R$. در این صورت I را یک ایده آل چپ R می نامیم هرگاه:

۱) $(I,+)$ یک زیر گروه $(R,+)$ باشد، یعنی به ازای هر $a,b \in I$ داشته باشیم: $a-b \in I$.

۲) به ازای هر $a \in I$ و هر $r \in R$ داشته باشیم: $ra \in I$.

همچنین I را یک ایده آل راست R می نامیم هرگاه:

۱) $(I,+)$ یک زیر گروه $(R,+)$ باشد، یعنی به ازای هر $a,b \in I$ داشته باشیم: $a-b \in I$.

۲) به ازای هر $a \in I$ و هر $r \in R$ داشته باشیم: $ar \in I$.

در نتیجه I را یک ایده آل حلقه ی R می نامیم هرگاه هم ایده آل راست و هم آیده آل چپ باشد.

نکته(۰-۶۴): در حلقه های جابجایی ایده آل های راست و چپ بر هم منطبق هستند.

نکته(۰-۶۵): هر ایده آل یک زیر حلقه است ولی عکسش درست نیست.

تذکر(۰-۶۶): فرض کنیم $(R,+,.)$ یک حلقه ی جابجایی و یکدار باشد. $a \in R$ را پوچ توان گوییم هرگاه وجود داشته باشد $n \in \mathbb{N}$ به طوری که $a^n = 0$.

تذکر(۰-۶۷): ایده آل I از حلقه ی R را پوچ توان گوییم هرگاه وجود داشته باشد $n \in \mathbb{N}$ به طوری که $I^n = 0$.

تذکر(۰-۶۸): فرض کنیم $f: R \to R$ یک همریختی حلقه ای باشد. در این صورت $\ker f$ یک ایده آل R است.

تعریف(۰-۶۹): فرض کنیم R یک حلقه ی جابجایی و یکدار باشد و فرض کنیم I یک ایده آل R باشد. I را ایده آل اول R می نامیم اگر و تنها اگر:

۱) $I \neq R$، یعنی I یک ایده آل سره از حلقه ی R باشد.

۲) به ازای هر $a,b \in R$ اگر $ab \in I$، آنگاه $a \in I$ یا $b \in I$.

تعریف(۰-۷۰): فرض کنیم R یک حلقه ی جابجایی و یکدار باشد . ایده آل M از R را ایده آل ماکزیمال گوییم اگر و تنها اگر:

۱) $M \neq R$

۲) به ازای هر ایده آل I از R اگر داشته باشیم $M \subseteq I \subseteq R$، آنگاه $M = I$ یا $I = R$.

تذکر(۰-۷۱): فرض کنیم $\{I_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از ایده آل های R باشد. در این صورت $S = \bigcap_{i\in I} I_i$ یک ایده آل R است.

برهان: ر. ک. لم ۸-۱۹ از مرجع [2].

تعریف(۰-۷۲): فرض کنیم R یک حلقه و $X \subseteq R$. در این صورت کوچکترین ایده آل شامل X را با $\langle X \rangle$ نمایش می دهیم و آن را ایده آل تولید شده توسط X می نامیم. در صورتیکه R یک حلقه ی جابجایی و یکدار باشد می توان ثابت کرد:

$$\langle X \rangle = \bigcap_{X \subseteq I} I = \left\{ r_1 x_1 + \ldots + r_n x_n \,\middle|\, r_i \in R,\ x_i \in X\ ,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

تعریف(۰-۷۳): فرض کنیم R یک حلقه و I یک ایده آل R باشد. مجموعه ی $\left\{ a+I \,\middle|\, a \in R \right\}$ با اعمال

۱) $a+I+a'+I=a+a'+I$

۲) $r.(a+I)=ra+I$

یک حلقه است. این حلقه را با $\frac{R}{I}$ نشان می دهیم و حلقه ی خارج قسمتی می نامیم.

تذکر(۰-۷۴): فرض کنیم I یک ایده آل حلقه R باشد. در این صورت:

۱) اگر R یکدار باشد، آنگاه $\frac{R}{I}$ یکدار است.

۲) اگر R جابجایی باشد، آنگاه $\frac{R}{I}$ جابجایی است.

برهان: ر. ک. قضیه ۸-۲۹ از مرجع [2].

قضیه(۰-۷۵): فرض کنیم I و J دو ایده آل حلقه ی R باشند. $I \bigcup J$ یک ایده آل حلقه R است اگر و تنها اگر $I \subseteq J$ یا $J \subseteq I$.

قضیه(۰-۷۶): فرض کنیم R یک حلقه ی جابجایی و یکدار باشد. بعلاوه فرض کنیم I و J دو ایده آل R باشند. در این صورت $I+J=\left\{ a+b \,\middle|\, a \in I,\ b \in J \right\}$ یک ایده آل R است.

قضیه(۰-۷۷): فرض کنیم R یک حلقه ی جابجایی و یکدار باشد و M یک ایده آل R باشد. M ایده آل ماکزیمال است اگر و تنها اگر $\frac{R}{M}$ میدان باشد.

برهان: ر. ک. قضیه ۹-۳۹ از مرجع [2].

قضیه(۰-۷۸): فرض کنیم R یک حلقه ی جابجایی و یکدار باشد و P یک ایده آل R باشد. P ایده آل اول است اگر و تنها اگر $\frac{R}{P}$ حوزه ی صحیح باشد.

برهان: ر. ک. قضیه ۹-۳۵ از مرجع [2].

نتیجه(۰-۷۹): فرض کنیم R یک حلقه ی جابجایی و یکدار باشد. در این صورت هر ایده آل ماکزیمال یک ایده آل اول است ولی عکسش لزوماً درست نیست.

برهان: ر. ک. قضیه ۹-۴۰ از مرجع [2].

تعریف(۰-۸۰): عنصر $a \in R$ را خود توان گوییم هرگاه $a^2=a$.

قضیه(۰-۸۱): اگر R یک حلقه ی جابجایی و یکدار باشد به طوری که هر عضو R خود توان باشد، آنگاه هر ایده آل اول یک ایده آل ماکزیمال است.

برهان: فرض کنیم P یک ایده آل اول باشد و I ایده آلی باشد که $P \subset I \subseteq R$. فرض کنیم $x \in I-P$. داریم $x^2=x$. پس $x(x-1)=0 \in P$. این نشان می دهد که $x-1 \in P \subset I$. از آنجایی که $x \in I$ باید داشته باشیم $1 \in I$. در نتیجه $I=R$.

تعریف(۰-۸۲): ایده آل سره ی I از حلقه ی R را تحویل ناپذیر می نامیم هرگاه I بصورت اشتراک دو ایده آل به طور سره شامل I نباشد، یعنی اگر ایده آل های J و L از حلقه ی R شامل I باشند و $I=J \bigcap L$، آنگاه $I=J$ یا $I=L$.

تعریف(۰-۸۳): مجموعه ی F با دو عمل دوتایی + و $\cdot$ یک میدان نامیده می شود، هرگاه:

۱) $(F,+)$ یک گروه آبلی باشد.

۲) $(F-\{0\},\cdot)$ یک گروه آبلی باشد.

۳) عمل $\cdot$ روی + توزیع پذیر باشد یعنی به ازای هر $x,y,z \in F$ داشته باشیم:

$$x.(y+z)=x.y+x.z$$

تعریف(۰-۸۴): فرض کنید V یک مجموعه و F یک میدان باشد. V را به همراه دو عمل:

الف) جمع برداری: که به هر دو عضو از V مانند x,y یک عضو منحصر به فرد از V که با $x+y$ نشان می دهیم را نسبت می دهد.

ب) ضرب اسکالر: که به هر اسکالر $c \in F$ و هر $x \in V$ یک عضو منحصر به فرد از V که با cx نشان می دهیم را نسبت می دهد،

یک فضای برداری بر میدان F گوییم هرگاه

۱) $(V,+)$ بسته باشد.

۲) $(V,+)$ شرکت پذیر باشد.

۳) $(V,+)$ جابجایی باشد.

۴) $(V,+)$ عضو خنثی(همانی) داشته باشد.

۵) هر عضو V در V وارون داشته باشد.

۶) به ازای هر $c \in F$ و هر $x \in V$ داشته باشیم: $cx \in V$.

۷) به ازای هر $c_1,c_2 \in F$ و هر $x \in V$ داشته باشیم: $(c_1+c_2)x=c_1x+c_2x$.

۸) به ازای هر $c \in F$ و هر $x,y \in V$ داشته باشیم: $c(x+y)=cx+cy$.

۹) به ازای هر $c_1,c_2 \in F$ و هر $x \in V$ داشته باشیم: $c_1(c_2x)=(c_1c_2)x$.

۱۰) به ازای هر $x \in V$ داشته باشیم: $1_F x=x$.

تذکر(۰-۸۵): اگر $(V,+,.)$ یک فضای برداری بر میدان F باشد آنگاه هر عضو از V را یک بردار می نامیم.

تعریف(۰-۸۶): فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد. مجموعه ی $\{v_1,\dots,v_n\}$ را یک پایه برای V می گوییم هرگاه $v_1,\dots,v_n$ استقلال خطی داشته باشند، یعنی به ازای $\lambda_i \in F$ اگر $\lambda_1 v_1 \dots + \lambda_n v_n = 0$، آنگاه $\lambda_i = 0$ به ازای هر $1 \le i \le n$. همچنین $v_1,\dots,v_n$ فضای V را تولید کنند یعنی به ازای هر $x \in V$ وجود داشته باشد $\gamma_1,\dots,\gamma_n \in F$ به طوری که $x=\gamma_1 v_1+\dots+\gamma_n v_n$.

تعداد عناصر پایه را بعد فضای V می گوییم و با نماد $dim\ V$ نمایش می دهیم.

در این تعریف V یک فضای برداری با بعد متناهی است یعنی $dim\ V=n$.

تعریف(۰-۸۷): فرض کنیم A یک فضای برداری با بعد متناهی به روی میدان F باشد. بعلاوه فرض کنید A یک حلقه ی یکدار باشد. A را یک جبر روی میدان F گوییم هرگاه به ازای هر $c \in F$ و هر $x,y \in A$ داشته باشیم :

$$(cx)y=c(xy)=x(cy)$$

فصل اول : جبرهای BCI و BCK

۱-۲ تعاریف و ساختارهایی از جبرهای BCI و BCK

۱-۳ ایده آل جبرهای BCI

۱-۴ اجتماع KG جبرهای BCI

مقدمه :

در این فصل ابتدا جبر های BCI و BCK و خواصی از آن ها را معرفی می کنیم، سپس مفهوم ایده آل و اجتماع KG در جبر های BCI را بیان و قضایا و مثال هایی در این باره را مورد مطالعه و بررسی قرار می دهیم [21,20,18,12].

۱-۱: جبرهای BCI و BCK

تعریف(۱-۱-۱): یک جبر BCI یک مجموعه ی ناتهی مانند X به همراه یک عمل دوتایی * و یک مقدار ثابت 0 است که به ازای هر $x, y, z \in X$ در شرایط زیر صدق می کند:

۱) $(x*y)*(x*z) \le z*y$

۲) $x*(x*y) \le y$

۳) $x \le x$

۴) اگر $x \le y$ و $y \le x$ آنگاه $x = y$.

که در آن رابطه ی $\le$ بصورت زیر تعریف می شود:

به ازای هر $x, y \in X$ ، $x \le y$ اگر و تنها اگر $x*y=0$.

یک جبر BCI معمولا بصورت $(X,*,0)$ نمایش داده می شود.

تعریف(۱-۱-۲): یک جبر BCI ی X یک جبر BCK نامیده می شود اگر به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم: $0 \le x$.

و برای هر جبر BCI چون X قسمت BCK ی X بصورت $\{x \in X \mid 0 \le x\}$ $BCK(X) = X_+ =$ نمایش داده می شود.

نکته(۱-۱-۳): به ازای هر $x, y, z \in X$، خواص زیر برای هر جبر BCI برقرار است:

الف) $x*0 = x$

ب) $(x*y)*z = (x*z)*y$

ج) $0*(x*y) = (0*x)*(0*y)$

د) $0*(0*(0*x)) = 0*x$

ه) اگر $x \le y$ آنگاه $x*z \le y*z$ و $z*y \le z*x$.

نکته(۱-۱-۴): فرض کنیم X یک جبر BCI و به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$x*y^n = (...((x*y)*y)*...)*y$$

که y، n مرتبه تکرار می شود. در این صورت به ازای هر $x, y, z \in X$ و $k \in \mathbb{N}$ شرایط زیر برقرار است:

الف) $x*x = 0$

ب) $x*(x*(x*y))^k = x*y^k$

ج) $0*(x*y)^k = (0*x^k)*(0*y^k)$

د) $0*(0*x)^k = 0*(0*x^k)$

تعریف(۱-۱-۵): مجموعه ی $P = \{x \in X \mid 0*(0*x) = x\}$ را قسمت p- نیم ساده ی جبر BCI ی X می نامیم و X را یک جبر BCI ی p- نیم ساده می نامیم هرگاه $P = X$ یا $X_+ = \{0\}$.

تعریف(۱-۱-۶): فرض کنیم X یک جبر BCI باشد. عضوهای aو b از X را در نظر می گیریم. تعریف می کنیم:
$A(a,b)=\{x\in X \mid x*a\le b\}.$

تعریف(۱-۱-۷): فرض کنیم X و Y دو جبر BCI باشند. نگاشت $f:X\to Y$ یک همریختی BCI نامیده می شود اگر برای هر $x,y\in X$ داشته باشیم: $f(x*y)=f(x)*f(y)$.

تعریف(۱-۱-۸): مجموعه ی $\{x\in X \mid f(x)=0\}$ را هسته ی f می نامیم و با $\ker(f)$ نشان می دهیم.

تعریف (۱-۱-۹): همریختی f را یک به یک می نامیم اگر و تنها اگر $\ker(f)=\{0\}$. همریختی f یک بروریختی نامیده می شود اگر f پوشا باشد. بعلاوه، یک همریختی یک به یک و پوشا را یک یکریختی می نامیم.

تعریف(۱-۱-۱۰): یک جبر BCI ی X را شرکت پذیر می نامیم هرگاه برای هر $x,y,z\in X$ داشته باشیم:
$(x*y)*z=x*(y*z).$

نکته(۱-۱-۱۱): در هر جبر BCI ی شرکت پذیر X، برای هر $x,y\in X$ داریم:

(۱) $0*x=x$

(۲) $x*y=y*x$.

برهان: (۱) فرض کنیم X یک جبر BCI ی شرکت پذیر باشد و $x\in X$. در این صورت بنا بر نکته (۱-۱-۳) قسمت (د) داریم: $0*x=((0*x))*0*(0*(0*x))$. در نتیجه بنا بر شرکت پذیری X و نیز نکته (۱-۱-۴) قسمت (الف) داریم:

$$0*(0*(0*x))=(0*0)*(0*x)=0*(0*x)$$

در نتیجه بنا بر شرکت پذیری X و نیز نکته (۱-۱-۳) قسمت (ب) داریم:

$$0*(0*x)=(0*0)*x=(0*x)*0$$

در نتیجه بنا بر نکته (۱-۱-۴) قسمت (الف) داریم:

$$(0*x)*0=((x*x)*x)*0$$

در نتیجه بنا بر شرکت پذیری X و نیز نکته (۱-۱-۴) قسمت (الف) و نکته (۱-۱-۳) قسمت (الف) داریم:

$$((x*x)*x)*0=(x*(x*x))*0=(x*0)*0=x*0=x$$

در نتیجه $0*x=x$.

(۲) فرض کنیم X یک جبر BCI ی شرکت پذیر باشد و $x,y\in X$. در این صورت بنا بر نکته (۱-۱-۳) قسمت (ج) داریم:

$$0*(x*y)=(0*x)*(0*y)$$

در نتیجه بنا بر شرکت پذیری X داریم:

$$(0*x)*(0*y)=((0*x)*0)*y=(0*(x*0))*y$$

در نتیجه بنا بر نکته (۱-۱-۳) قسمت (الف و ب) و نیز شرکت پذیری X داریم:

$$(0*(x*0))*y=(0*y)*(x*0)=(0*y)*x=0*(y*x)$$

در نتیجه بنا بر قسمت (۱) داریم: $0*(y*x)=y*x$ و $0*(x*y)=x*y$. در نتیجه $x*y=y*x$.

۱-۲ : ایده آل جبرهای BCI

تعریف(۱-۲-۱): یک زیر مجموعه ی ناتهی I از یک جبر BCI ی X را یک ایده آل X می نامیم هرگاه به ازای هر $x,y\in X$ در شرایط زیر صدق کند:

۱) $0\in I$

۲) اگر $x*y, y\in I$ آنگاه $x\in I$.

تعریف(۱-۲-۲): یک ایده آل I از جبر BCI ی X را سره می گوییم هرگاه $I\neq X$.

تعریف(۱-۲-۳): یک ایده آل I از جبر BCI ی X را بسته می گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:
$x * y \in I.$

قضیه(۱-۲-۴): قسمت BCK ی X یک ایده آل بسته ی X است.

برهان: ابتدا نشان می دهیم که قسمت BCK ی X یک ایده آل است. بنا بر نکته (۱-۱-۳) قسمت (الف) به ازای هر $x \in X$ داریم: $x * 0 = x$ بخصوص به ازای $x = 0$ داریم: $0 * 0 = 0$. در نتیجه $0 \in BCK(X)$. اکنون فرض کنیم $x * y, y \in BCK(X)$. در این صورت از این که $y \in BCK(X)$ نتیجه می شود $0 * y = 0$ و نیز از این که $x * y \in BCK(X)$ نتیجه می شود $0 * (x * y) = 0$. بنا بر نکته (۱-۱-۳) قسمت (ج) نتیجه می شود $(0 * x) * (0 * y) = 0$. در نتیجه بنا بر نکته (۱-۱-۳) قسمت (الف) داریم: $0 = 0 * x = 0 * 0 * (0 * x)$ و این نیز نتیجه می دهد که $x \in BCK(X)$.

اکنون نشان می دهیم $BCK(X)$ بسته است. فرض کنیم $x, y \in X$. چون X یک جبر BCI است بنابراین نکته (۱-۱-۳) قسمت (ج) در آن برقرار است، یعنی $0 = 0 * 0 = (0 * y) * (0 * x) = (x * y) * 0$. در نتیجه $x * y \in BCK(X)$.
بنابراین $BCK(X)$ بسته است.

تعریف(۱-۲-۵): فرض کنیم X یک جبر BCI باشد. برای هر زیر مجموعه ی S از X تعریف می کنیم:
$G(S) = \{x \in S \mid 0 * x = x\}.$

اگر $S = X$ آنگاه $G(X)$ را قسمت $BCI - G$ از X می نامیم.

نکته(۱-۲-۶): فرض کنیم X یک جبر BCI باشد. در این صورت خاصیت زیر همواره برقرار است:
$G(X) \cap BCK(X) = \{0\}.$

برهان: با توجه به این که $G(X) = \{x \in X \mid 0 * x = x\}$ و $BCK(X) = \{x \in X \mid 0 * x = 0\}$، در نتیجه $x = 0$، بنابراین $G(X) \cap BCK(X) = \{0\}$.

تعریف(۱-۲-۷): یک زیر مجموعه ی ناتهی S از جبر BCI ی $(X, *, 0)$ را یک زیر جبر X می نامیم هرگاه به ازای هر $x, y \in S$ داشته باشیم: $x * y \in S$.

قضیه(۱-۲-۸): اگر S یک زیر جبر ، جبر BCI ی X باشد، آنگاه $G(S)$ هم یک زیر جبر X است.

برهان: به [20] رجوع شود.

لم(۱-۲-۹): برای یک زیر جبر S از یک جبر BCI ی X، $G(S)$ یک ایده آل X است اگر و فقط اگر برای هر $x \in X$ و هر $a \in G(S)$ داشته باشیم:

$$x = (x * a) * (0 * a).$$

برهان: به [24] رجوع شود.

نکته(۱-۲-۱۰): برای هر زیر جبر S از یک جبر BCI ی X و هر عضو a از S ، نگاشت $a_r : S \to S$ را با تعریف $a_r(x) = x * a$ برای هر $x \in S$ داریم.

قضیه (۱-۲-۱۱): فرض کنیم S یک زیر جبر از یک جبر BCI ی X باشد. اگر $G(S)$ یک ایده آل X باشد، آنگاه $a_r : G(S) \to G(S)$ برای هر $a \in G(S)$ یک نگاشت پوشا است.

قضیه(۱-۲-۱۲): فرض کنیم S یک زیر جبر از یک جبر BCI ی X باشد. اگر برای هر $a \in G(S)$ و هر $x \in S$ نگاشت $a_r : S \to S$ که بصورت $a_r(x) = x * a$ تعریف می شود یک به یک باشد، آنگاه $G(S)$ یک ایده آل است.

برهان: فرض کنیم برای هر $a \in G(S)$ نگاشت a_r یک به یک باشد، در این صورت بنا بر نکته (۱-۱-۳) قسمت (ب) و نکته (۱-۱-۴) قسمت (الف) داریم:

$$((x * a) * (0 * a)) * x = ((x * a) * x) * (0 * a) = ((x * x) * a) * (0 * a) = 0.$$