وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی کاربردی (گرایش تحقیق در عملیات)

مساله‌ی مقدار بهینه‌ی معکوس

توسط:
زهرا پیروزه

استاد راهنما:
دکتر علی عباسی ملایی

استاد مشاور:
دکتر رضا پورقلی

شهریور ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

مساله‌ی مقدار بهینه‌ی معکوس

توسط:

زهرا پیروزه

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم
برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی کاربردی (گرایش تحقیق در عملیات)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **عالی**

دکتر علی عباسی ملایی استادیار ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر رضا پورقلی استادیار ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده ریاضی وعلوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر سید هاشم طبسی استادیار علوم کامپیوتر گرایش علوم کامپیوتر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور اول)

دکتر حنیف حیدری استادیار ریاضی کاربردی گرایش تحقیق درعملیات دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر نرگس تولایی استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز هارمونیک دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادر نازنینم به پاس تمامی زحمات بی دریغشان
نهال را باران باید
تا بشوید غبار نشسته بر برگهایش
و سیرابش کند از آب حیات
و آفتاب باید تا بتاباند نیرو را
و محکم کند شاخه های تازه روییده را.
به نام مادر
بوسه ای باید زد، دست هایی را
که می شویند غبار خستگی روزگار را
و سیراب می کنند روح تشنه را
به نام پدر
بوسه ای باید زد، دست هایی را که می تابانند نیرو را
و محکم می کنند استواری پایه های زیستن را.

سپاسگزاری

الهی...

ادای شکر تراهیچ زبان نیست و دریای فضل تراهیچ کران نیست. سر حقیقت تو بر هیچ کس عیان نیست، هدایت کن بر ما رهی که بهتر از آن نیست. حمد و سپاس پروردگار هستی که به استعانت از او توفیق پیدا نمودم تا از بیکران علم و دانش توشه ای برگیرم.

اکنون که به لطف پروردگار موفق به اتمام این مقطع از تحصیل گشته‌ام بر خود لازم می دانم تا مراتب تشکر و قدردانی خود را نثار بزرگوارانی نمایم که مرا در این راه یاری نمودند.

در آغاز بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا می ستایمشان و از این دو وجود مقدس که برایم زندگی و انسان بودن را معنا کردند و در حضورشان لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام زیبایی‌های زندگیم را تجربه نمودم، سپاسگذاری می نمایم. سپاس و قدردانی ویژه از زحمات بی دریغ و تلاش‌های بی وقفه استاد ارجمند جناب آقای دکتر علی عباسی ملایی که در راستای انجام این پایان نامه با راهنمایی‌های خود راه گشای این جانب بوده اند و همواره در دشوارترین مراحل کار دل گرم به حمایت و درایت شان بوده ام و همچنین صمیمانه از استاد مشاور ارجمندم، جناب آقای دکتر رضا پور قلی تشکر می نمایم.

از اساتید بزرگوار آقایان دکتر حنیف حیدری و دکتر سید هاشم طبسی که زحمت مطالعه و بازخوانی این پایان نامه را جهت داوری بر عهده داشتند کمال تشکر را دارم.

زهرا پیروزه

شهریور ۹۱

چکیده

مساله‌ی مقدار بهینه‌ی معکوس

به وسیله‌ی:
زهرا پیروزه

فرض کنید جواب بهینه یک مساله از قبل تعیین شده است. بهینه سازی معکوس عبارتست از به‌دست آوردن پارامترهایی مثل ضرایب تابع هدف و محدودیت‌های مساله‌ی بهینه‌سازی که پاسخ آن را از قبل می‌دانستیم. یک مساله بهینه‌سازی استاندارد معکوس که غالبا بررسی می‌شود، به شرح زیر است:
مساله‌ی بهینه‌سازی زیر را با یک هدف خطی و یک جواب بهینه‌ی مطلوب $x^* \in X$ را در نظر بگیرید:

$$P \;:\; \min_{x}\{c^T x \mid x \in X\}.$$

فرض کنید که جواب بهینه‌ی مطلوب $x^* \in X$ داده شده است، بردار هزینه‌ی $c^* \in C$ را به گونه‌ای بیابید که $x^* \in X$ جواب بهینه‌ی مساله‌ی P باشد و در عین حال لازم است که بردار c^* در یک تعداد شرایط اضافی نیز صدق کند به‌طوری که برای بردار هزینه‌ی داده شده c' ، انحراف $||c^* - c'||_p$ مینیمم شود.

دانشمندان ژئوفیزیک اولین کسانی بودند که به مطالعه‌ی مساله‌ی معکوس پرداختند. این مساله، کاربرد وسیع و متنوعی در علوم ژئوفیزیک دارد.
مساله‌ی مقدار بهینه‌ی معکوس یک مساله‌ی NP-سخت است. براساس یک دسته از مفروضات، جواب های بهینه‌ی مساله به‌وسیله‌ی یک سری از مسایل برنامه‌ریزی خطی و دو خطی بدست آورده شده است. یکی از این مفروضات محدب بودن مجموعه‌ی C می باشد که این امر نسبتا محدودکننده است. در صورت نبود این فرض، بیشتر نتایج و الگوریتم بدست آمده درست نخواهد بود بنابراین این امر ایجاب می‌کند که مساله‌ی مقدار بهینه‌ی معکوس را تحت شرایط کلی‌تری مورد مطالعه قرار دهیم.

در این پایان‌نامه مساله‌ی مقدار بهینه‌ی معکوس را به یک مساله برنامه‌ریزی دو سطحی غیر خطی تبدیل خواهیم کرد. چرا که با این کار می‌توانیم مساله‌ی مقدار بهینه‌ی معکوس را تحت شرایط کلی‌تری حل کنیم. سپس، با استفاده از روش تابع جریمه، شرایطی برای وجود جواب مساله دوسطحی غیرخطی فوق ارایه می‌شود و در پایان الگوریتمی برای حل مساله طراحی می‌گردد.

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

فصل ۱

مقدمات

۱-۱ مسایل برنامه‌ریزی خطی

۱-۱-۱ فرمول‌بندی مساله دوگان

همراه با هر مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی، مساله‌ی دیگری وجود دارد که دوگان نامیده می‌شود. برنامه‌ی خطی دوگان، تعدادی ویژگی‌های مهم در ارتباط با برنامه‌ی خطی اولیه دارد.
دو شکل مهم از دوگان وجود دارد

(۱) شکل متعارفی،

(۲) شکل استاندارد.

این اشکال کاملا معادل هستند. آن‌ها به ترتیب از نمایش متعارفی و استاندارد مسایل برنامه‌ریزی خطی به‌دست می‌آیند.

۱-۱-۲ شکل متعارفی دوگان

فرض کنید که برنامه‌ی خطی اولیه، در شکل متعارفی داده شده باشد؛

$$\begin{aligned} P: \quad & min \quad cx \\ & s.t. \quad Ax \geq b \\ & \qquad\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

بنابراین برنامه‌ی خطی دوگان به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D: \quad max \quad wb$$
$$s.t. \quad wA \leq c$$
$$w \geq 0$$

توجه داریم که دقیقا یک متغیر دوگان برای هر محدودیت اولیه و دقیقا یک محدودیت دوگان برای هر متغیر اولیه وجود دارد.

۱-۱-۳ قضایای دوگان

شکل متعارفی دوگان را در نظر بگیرید و فرض کنید $w_\circ, x_\circ$ به‌ترتیب جواب‌های شدنی دلخواه مسایل اولیه و دوگان باشند. بنابراین،

$$Ax_\circ \geq b, \;\; x_\circ \geq 0, \;\; w_\circ A \leq c, \;\; w_\circ \geq 0.$$

با ضرب $Ax_\circ \geq b$ از سمت چپ در $w_\circ \geq \circ$ و $w_\circ A \leq c$ از سمت راست در $x_\circ \geq \circ$، داریم:

$$cx_\circ \geq w_\circ Ax_\circ, \quad w_\circ Ax_\circ \geq w_\circ b.$$

بنابراین نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌شود. این نتیجه به خاصیت **دوگان ضعیف** مشهور است.

لم ۱.۱.۱. *[۱] مقدار تابع هدف به ازای هر جواب شدنی مساله‌ی مینیمم‌سازی، همواره بزرگتر یا مساوی مقدار تابع به ازای هر جواب شدنی مساله‌ی ماکزیمم‌سازی است. به ویژه مقدار تابع هدف به ازای هر جواب شدنی مساله‌ی مینیمم‌سازی، کران بالا تابع هدف بهینه‌ی مساله‌ی ماکزیمم‌سازی است.*

به طریق مشابه، مقدار تابع هدف به ازای هر جواب شدنی مساله‌ی ماکزیمم‌سازی، کران پایین مقدار تابع هدف بهینه‌ی مساله‌ی مینیمم‌سازی است.

نتیجه ۲.۱.۱. *[۱] اگر $x_\circ$ و $w_\circ$، جواب‌های شدنی اولیه و دوگان باشند، به نحوی‌که $cx_\circ = w_\circ b$، آن‌گاه $x_\circ$ و $w_\circ$، جواب‌های بهینه‌ی مسایل نظیرشان هستند.*

نتیجه ۳.۱.۱. *[۱] اگر یکی از مسایل اولیه یا دوگان، مقدار تابع هدف نامتناهی داشته باشد، آن‌گاه مساله‌ی دیگر، جواب شدنی ندارد.*

لم ۴.۱.۱. *[۱] (**خاصیت دوگان قوی**) اگر یکی از مسایل اولیه یا دوگان، جواب بهینه داشته باشد، آن‌گاه هردو مساله، جواب شدنی دارند و مقادیر تابع هدف بهینه‌ی آن‌ها، مساوی است.*

نتیجه ۵.۱.۱. [۱] *مساله اولیه نشدنی است اگر وفقط اگر شکل همگن دوگان مساله، نامتناهی باشد.*

با استفاده از نتایج قبل، دو قضیه‌ی اساسی مهم دوگان را به‌دست می‌آوریم. این قضایا به ما این امکان را می‌دهد که، مساله‌ی دوگان را برای حل مساله‌ی اولیه به‌کار ببریم.

قضیه ۶.۱.۱. [۱] (***قضیه‌ی اساسی دوگان***) *با توجه به مسایل برنامه‌ریزی خطی اولیه و دوگان، دقیقا یکی از عبارت‌های زیر صحیح است.*

(۱) *دو مساله دارای جواب‌های بهینه x^* و w^*، با $cx^* = w^*b$ هستند.*

(۲) *یک مساله مقدار تابع هدف نامتناهی، درحالی‌که دیگری نشدنی است.*

(۳) *هر دو مساله نشدنی است.*

از این قضیه مشاهده می‌شود که دوگان کاملا متقارن نیست. در اینجا، بهینه به معنی بهینه‌ی متناهی است. نامتناهی به این معنی است که، مقدار تابع هدف بهینه، نامتناهی است.

قضیه ۷.۱.۱. [۱] (***قضیه‌ی مکمل زاید***)*: فرض کنید x^* و w^*، جواب‌های شدنی دلخواه مسایل اولیه و دوگان در شکل متعارفی باشند، پس آن‌ها به‌ترتیب بهینه هستند اگر وفقط اگر*

$$(c_j - w^*a_j)x_j^* = ۰, \quad j = ۱, ۲, \dots, n$$

$$w_i^*(a^ix^* - b_i) = ۰, \quad i = ۱, ۲, \dots, m$$

این قضیه‌ی بسیار مهمی است که مسایل اولیه و دوگان را به هم ارتباط می‌دهد. این قضیه به روشنی نشان می‌دهد که حداقل یکی از دو جمله در هر بسط باید صفر باشد. به‌ویژه،

$$\begin{aligned} x_j^* > ۰ &\Rightarrow w^*a_j = c_j, \\ w^*a_j < c_j &\Rightarrow x_j^* = ۰, \\ w_i^* > ۰ &\Rightarrow a^ix^* = b_i, \\ a^ix^* > b_i &\Rightarrow w_i^* = ۰. \end{aligned}$$

۱-۱-۴ شرایط بهینگی کروش-کان-تاکر

شرایط کروش-کان-تاکر (KKT)، استخوان‌بندی برنامه‌های غیرخطی را تشکیل می‌دهد. این شرایط برای بهینگی مسایل برنامه‌ریزی غیرخطی مشتق‌پذیر که در بعضی شرایط منظم معین (مشهور به

کیفیت‌های محدود) صدق کنند، شرایط لازم هستند و برای بهینگی بعضی مسایل برنامه‌ریزی مشتق‌پذیر که در خاصیت‌های محدب‌پذیری بسط یافته، صادق باشند، شرایط کافی نیز هستند.

در مسایل برنامه‌ریزی خطی، این شرایط هم لازم و هم کافی هستند. به همین خاطر مشخصه‌ی مهمی از بهینگی را فراهم می‌آورند.

شرایط کروش-کان-تاکر در مسایل با محدودیت‌های نامساوی:

مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &min \quad cx \\ &s.t. \quad Ax \geq b \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن c یک n بردار، b یک m بردار و A یک ماتریس $m \times n$ است.

بردارهای $w = (w_۱, w_۲, \ldots, w_m) \geq ۰$ و $v = (v_۱, v_۲, \ldots, v_n) \geq ۰$ را در نظر بگیرید.
توجه کنید که w و v، را ضرایب لاگرانژ (متغیرهای دوگان)، به‌ترتیب نظیر با محدودیت‌های $Ax \geq b$ و $x \geq 0$، می‌نامند.

شرایط (KKT) را می‌توان به‌صورت شرایط بهینگی جواب (x, w, v)، برای سیستم زیر بیان کرد.

$$Ax \geq b, \quad x \geq 0, \tag{۱.۱}$$

$$wA + v = c, \quad w \geq 0, \quad v \geq 0, \tag{۲.۱}$$

$$w(Ax - b) = ۰, \quad vx = 0. \tag{۳.۱}$$

شرط (۱.۱) صرفا می‌گوید که، نقطه‌ی مورد نظر باید شدنی باشد، یعنی باید در محدودیت‌های مساله صدق کند. این شرط را معمولا شرط **شدنی بودن مساله‌ی اولیه** می‌گویند.
شرط (۲.۱) ، معمولا به شرط **شدنی دوگان** اطلاق می‌شود.
شرط (۳.۱) را معمولا شرط **مکمل زاید** اطلاق می‌کنند.

چون $w \geq 0$ و $Ax \geq b$، پس $w(Ax - b) = 0$ اگر و فقط اگر یا $w_i = ۰$ و یا i -امین متغیر کمکی صفر است، یعنی i -امین محدودیت در $Ax \geq b$ فعال است. به طریق مشابه، $vx = 0$ اگر وفقط اگر یا $x_j = ۰$ و یا $v_j = ۰$.

۲-۱ مفهوم توابع جریمه

روش‌های بهینه‌سازی از توابع جریمه، به منظور تبدیل کردن یک مساله‌ی مقید به یک مساله‌ی نامقید واحد، یا به یک دنباله از مسایل نامقید استفاده می‌کنند. محدودیت‌ها از طریق یک پارامتر جریمه در تابع هدف جایگذاری می‌شود. به این طریق که هر تخلف از قیود را جریمه می‌کند.

برای نشان دادن انگیزه‌ی به‌کارگیری توابع جریمه، مساله‌ی زیر را با محدودیت $h(x) = 0$ در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} &min \quad f(x) \\ &s.t. \quad h(x) = 0 \end{aligned}$$

فرض کنید که این مساله، با مساله‌ی نامقید زیر جایگزین می‌شود، در جایی‌که $\mu > 0$ یک عدد خیلی بزرگ است.

$$\begin{aligned} &min \quad f(x) + \mu h^2(x) \\ &s.t. \quad x \in E_n \end{aligned}$$

که در آن $E_n = \mathbb{R}^n$. ما می‌توانیم مستقیما ببینیم که $h^2(x)$ در جواب بهینه‌ی مساله‌ی بالا، باید نزدیک به صفر باشد. زیرا درغیر این‌صورت، یک جریمه‌ی بزرگ معادل $\mu h^2(x)$، تحمیل خواهد شد.

حال مساله‌ی زیر را با تنها محدودیت نامساوی $g(x) \leq 0$، در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} &min \quad f(x) \\ &s.t. \quad g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

واضح است که فرم $f(x) + \mu g^2(x)$ مناسب نیست، زیرا که خواه $g(x) < 0$ و یا $g(x) > 0$، در هر صورت یک جریمه تحمیل خواهد شد. نیازی به گفتن نیست که یک جریمه، تنها وقتی مطلوب است که نقطه‌ی x شدنی نباشد. یعنی اینکه $g(x) > 0$.

یک مساله‌ی نامقید سازگار، به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} &min \quad f(x) + \mu.max\{0, g(x)\} \\ &s.t. \quad x \in E_n \end{aligned}$$

اگر $g(x) \leq 0$، پس $max\{0, g(x)\} = 0$ و هیچ جریمه‌ای تحمیل نمی‌شود. از طرف دیگر، اگر $g(x) > 0$ پس $max\{0, g(x)\} > 0$ و جمله‌ی جریمه $\mu g(x)$ فهمیده می‌شود. ضمنا، مشاهده

می‌کنند که در نقاط x جایی‌که $g(x) = ۰$، تابع هدف مذکور مشتق‌پذیر نیست با وجود اینکه g مشتق‌پذیر است. اگر مشتق‌پذیری در چنین موردی مطلوب باشد، پس می‌توانستیم به‌طور مثال به‌جای یک تابع جریمه، جمله‌ای از نوع $\mu[max\{۰, g(x)\}]^۲$ را درنظر بگیریم.

در حالت کلی، یک تابع جریمه‌ی مناسب، برای نقاط نشدنی یک جریمه‌ی مثبت را تحمیل می‌کند و برای نقاط شدنی هیچ جریمه‌ای را در نظر نمی‌گیرد.

اگر محدودیت‌ها به فرم $g_i(x) \leq ۰$ به‌ازای هر $i = ۱, ۲, \dots, m$ و $h_i(x) = ۰$ برای هر $i = ۱, ۲, \dots, l$ باشند، پس یک تابع جریمه‌ی مناسب α به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha(x) = \sum_{i=۱}^{m} \Phi[g_i(x)] + \sum_{i=۱}^{l} \Psi[h_i(x)]$$

در جایی‌که Φ و Ψ، توابع پیوسته‌ای هستند که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$\Phi(y) = ۰ \quad if \quad y \leq ۰ \quad and \quad \Phi(y) > ۰ \quad if \quad y > ۰$$

$$\Psi(y) = ۰ \quad if \quad y = ۰ \quad and \quad \Psi(y) > ۰ \quad if \quad y \neq ۰$$

نوعا Φ و Ψ، به فرم‌های زیر هستند:

$$\Phi(y) = [max\{۰, y\}]^p,$$

$$\Psi(y) = |y|^p,$$

که در آن p، یک عدد صحیح مثبت است. پس تابع جریمه‌ی α، معمولا به فرم زیر است:

$$\alpha(x) = \sum_{i=۱}^{m} [max\{۰, g_i(x)\}]^p + \sum_{i=۱}^{l} |h_i(x)|^p.$$

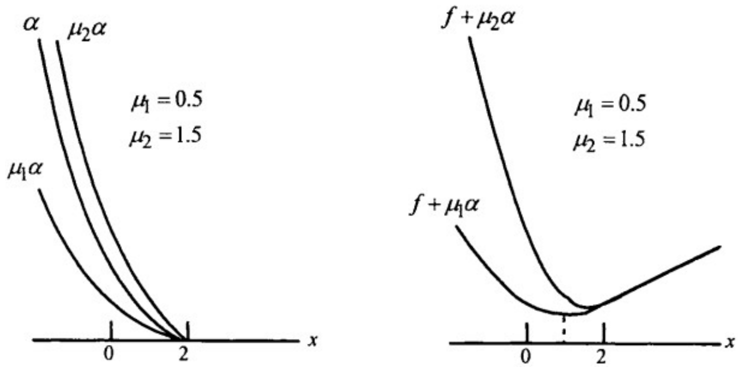
تابع $f(x) + \mu\alpha(x)$، تابع کمکی نامیده می‌شود.

مثال ۱.۲.۱. [۷] مساله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} & min \quad x \\ & s.t. \quad -x + ۲ \leq ۰ \end{aligned}$$

فرض کنید $\alpha(x) = [max\{۰, g(x)\}]^۲$، بنابراین

$$\alpha(x) = \begin{cases} ۰, & x \geq ۲, \\ (-x + ۲)^۲, & x < ۲. \end{cases}$$



شکل ۱-۱: توابع جریمه و کمکی

شکل فوق توابع جریمه و کمکی α و $f+\mu\alpha(x)$ را نشان می‌دهد. توجه کنید که مینیمم $f+\mu\alpha$، در نقطه‌ی $(2-\frac{1}{2\mu})$ اتفاق می‌افتد و وقتی‌که μ، به ∞ میل می‌کند، آن‌گاه نقطه‌ی $(2-\frac{1}{2\mu})$ به مینیمم‌کننده‌ی مساله‌ی اصلی یعنی $\overline{x}=2$، میل می‌کند.

مثال ۲.۲.۱. مساله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &min \quad x_1^2+x_2^2 \\ &s.t. \quad x_1+x_2-1=0 \end{aligned}$$

جواب بهینه در نقطه‌ی $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ قرار می‌گیرد و مقدار هدفی برابر $\frac{1}{2}$ دارد.
حال مساله‌ی جریمه‌ی زیر را در نظر بگیرید، که در آن $\mu>0$، یک عدد بزرگ است.

$$\begin{aligned} &min \quad x_1^2+x_2^2+\mu(x_1+x_2-1)^2 \\ &s.t. \quad (x_1,x_2)\in E_2 \end{aligned}$$

توجه کنید که برای هر $\mu\geq 0$، تابع هدف محدب است. پس یک شرط لازم و کافی برای بهینگی این است که، گرادیان $x_1^2+x_2^2+\mu(x_1+x_2-1)^2$ برابر با صفر باشد، که نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} x_1+\mu(x_1+x_2-1)=0 \\ x_2+\mu(x_1+x_2-1)=0 \end{aligned}$$

با حل این دو معادله به‌طور همزمان، به‌دست می‌آوریم:

$$x_1=x_2=\frac{\mu}{2\mu+1}.$$

بنابراین با انتخاب μ به اندازه‌ی کافی بزرگ، جواب بهینه‌ی مساله‌ی جریمه می‌تواند به‌طور قراردادی به جواب مساله‌ی اصلی نزدیک شود.

خلاصه‌ی روش تابع جریمه:

بیشتر الگوریتم‌هایی که از تابع‌های جریمه استفاده می‌کنند، یک دنباله از پارامترهای جریمه‌ی صعودی را به‌کار می‌گیرند. با هر مقدار جدید از پارامتر جریمه، یک تکنیک بهینه‌سازی، به‌کار گرفته می‌شود. ابتدا از یک جواب بهینه‌ی متناظر با مقدار پارامتر انتخاب شده‌ی قبلی، شروع می‌کنیم. به چنین روشی گاهی اوقات، به عنوان **تکنیک مینیمم‌سازی نامقید ترتیبی (پی‌درپی)**، اطلاق می‌شود.

در زیر خلاصه‌ای از روش تابع جریمه، به منظور حل مساله‌ی زیر را ارایه می‌گردد.

$$
\begin{aligned}
min \quad & f(x) \\
s.t. \quad & g(x) \leq 0 \\
& h(x) = 0 \\
& x \in X
\end{aligned}
$$

این روش‌ها، به جز پیوستگی، هیچ محدودیتی روی f، g و h اعمال نمی‌کنند. ضمنا، این روش می‌تواند در حالت‌هایی به طور موثر عمل کند که یک رویه جواب کارایی برای حل مساله مندرج در تکرار ۱ از گام اصلی در دسترس باشد.

گام اول:

فرض کنید $\varepsilon > 0$ یک اسکالر خاتمه باشد.

یک نقطه‌ی اولیه‌ی x_1، یک پارامتر جریمه‌ی $\mu_1 > 0$ و یک اسکالر $\beta > 1$ را انتخاب کنید.

فرض کنید $k = 1$ و به گام اصلی بروید.

گام اصلی:

(۱) ابتدا با x_k، مساله‌ی زیر را حل کنید.

$$
\begin{aligned}
min \quad & f(x) + \mu_k \alpha(x) \\
s.t. \quad & x \in X
\end{aligned}
$$

فرض کنید x_{k+1} یک جواب بهینه باشد و به گام (۲) بروید.

(۲) اگر $\varepsilon > \mu_k\alpha(x_{k+۱})$، توقف کنید، در غیر این‌صورت فرض کنید $\mu_{k+۱} = \beta\mu_k$.
k را با $k + ۱$ جایگزین کنید و به گام (۱) بروید.

مثال ۳.۲.۱. مساله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &min \quad (x_۱ - ۲)^۴ + (x_۱ - ۲x_۲)^۲ \\ &s.t. \quad x_۱^۲ - x_۲ = ۰ \\ &\qquad\quad x \in X = E_۲ \end{aligned}$$

توجه کنید که در تکرار k ام، به‌ازای یک پارامتر جریمه‌ی مفروض μ_k، مساله با استفاده از تابع جریمه‌ی مربعی، برای به‌دست آوردن x_{μ_k}، حل خواهد شد.
تابع $f + \mu\alpha$ به صورت زیر است:

$$min \quad (x_۱ - ۲)^۴ + (x_۱ - ۲x_۲)^۲ + \mu_k(x_۱^۲ - x_۲)^۲$$

جدول زیر محاسبات به‌دست آمده با استفاده از روش تابع جریمه را نشان می‌دهد.

Iteration k	μ_k	$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_{\mu_k}$	$f(\mathbf{x}_{k+1})$	$\alpha(\mathbf{x}_{\mu_k}) = h^2(\mathbf{x}_{\mu_k})$	$\theta(\mu_k)$	$\mu_k\alpha(\mathbf{x}_{\mu_k})$	v_{μ_k}
1	0.1	(1.4539, 0.7608)	0.0935	1.8307	0.2766	0.1831	0.270605
2	1.0	(1.1687, 0.7407)	0.5753	0.3908	0.9661	0.3908	1.250319
3	10.0	(0.9906, 0.8425)	1.5203	0.01926	1.7129	0.1926	2.775767
4	100.0	(0.9507, 0.8875)	1.8917	0.000267	1.9184	0.0267	3.266096
5	1000.0	(0.9461094, 0.8934414)	1.9405	0.0000028	1.9433	0.0028	3.363252

جدول ۱-۱: خلاصه ای از محاسبات روش تابع جریمه

به عنوان مثال، نقطه‌ی ابتدایی $x_۱ = (۲, ۱)$ داده می‌شود، که در آن مقدار تابع هدف صفر است.
مقدار اولیه‌ی پارامتر جریمه، $\mu_۱ = ۰/۱$ و پارامتر $\beta = ۱۰$ در نظر گرفته می‌شود.
توجه کنید که $f(x_{\mu_k})$ غیر نزولی و $\alpha(x_{\mu_k})$ یک تابع غیر صعودی است. روش بعد از تکرار چهارم متوقف می‌شود، در جایی‌که $\alpha(x_{\mu_k}) = ۰/۰۰۰۲۶۷$.
به هرحال به منظور واضح‌تر نشان دادن اینکه $\mu_k\alpha(x_{\mu_k})$ همگرا به صفر است، تا یک تکرار بیشتر اجرا می‌کنیم.