بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده ولعمهیاپ

ایاپن‌هماذ
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد رشته

فیزیک

رگ اش‌ي رظنی

عنوان

بررسی معادله حرکت ذره با ساختار پوآسون جبر لی

ااتسد ارامنه

امیرحسین فتح اللهی

ااتسد اشمرو

محمد خرمی

دانشجو

رتاهذ بیلدنع

ویرهشر ۱۳۹۱

کلیه دستاوردهای این تحقیق متعلق

به

دانشگاه الزهرا (س) است.

اپسدس و قدردانـی از زامحت ااتسد

رادنمج، انجب آاقی دکرتحتفااللـهو،

هکرد اراهئی انیِ هعومجمهب نم

اهTMمکی اياشن ذکری رکددنو زیذ

ابااپسدس زا هههی کسانو هکربیاهب

هجیتذ ردیسن انیِقیقحتهب نم کمTM

رکدند.

ارینا‌هب ادیمیزور که مچرپ مل‌عو ادش‌ذرد رساترسهصرعی گیتو طسوتاریاااینن ش‌یبزا ش‌یپ

ربارفاه‌تشد وشد و انماریناو اریانورد کـتکتزاههنیمی علمودبردشخ و گـنهرف غنو

زنیمار دگر ابر هبخر ایناهجن ب2شد.

دی2چه

رد انی ایاپن‌هماند م2انیTM کلاسیTM تارذ اب اتخاسر وپاوسن ربج لی ربرس دشه است. ابرفض رک وه‌شد وپاسون ربگه‌تفر زا ربج لی، هب اجی رکوه‌شد وپاوسن ومعمل رفصد نیب اهه‌فلومی ا2م،ن ومرفل‌دنبی کلاسیTM رحکت تارذ ربرس وشمد. اب رفض لیسناتپ رکیو همیلتونهرذ هب د تسد هدروآ وشمد و رشط ادن‌تشدمرا ادرییاه دیاپ)را) و اعمدلات وحتل زمان هعلاطم وخاده ابشد. اب لیسناتپ رلپکی رشیپیو ضحض‌یرد نییاپ نیرته‌بترمی الاتخل هب د تسد مآید. رد تیاهن اب اافتسهد زا شور دع،ید دمرااهی هطوبرمربیا اپاراهرتمی دوخلها تسدب هدروآ و تلاح معمول هسیاقم دشه است.

تسرهف بلاطم

تسرهف اهل2شد

لصف ۱

اتفSشیپر

رد م²انیTM کلاسیTM هنگام, هکرحکت یTM هرذ ار ربرس, مینکم, ا²من هرذ ار اب x^i و هناکت ار

اب p_j اشنن م,دمیه هکربیا نآاه رادیم:

$$\{x^i, p_j\} = \delta^i_j \quad (۱.۱)$$

$$\{x^i, x^j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \quad (۲.۱)$$

رد میمعت تلاح معمول, ن²مم اتسرکوهشوپآوسن فلوماههی ا²من ار رفصریغ رفض کنیم.

رد تلاح اسهد ن²مم اتسرفض مینک

$$\{x^i, x^j\} = \theta^{ij} \quad (۳.۱)$$

هکنا رد θ^{ij} یTM وسناتر هبترمی است. انیمیمعت اسهدنیرتزا حالت, اتسهکهب م²انیTM رد اضفی اجهباجانئ, رعمفو دشه اتس، زا نآ اج هک اهرSلمعی وکانتوم, ریظن اصتخمت لااب

هباجاشرگاجن رفصوش,مند:

$$\hat{x}^i \hat{x}^j \neq \hat{x}^j \hat{x}^i$$

هب ار حت, م,وتنا ددیهکاب فیرعت اصتخمت و اههناکتی دیدجهبل²شد

$$\tilde{x}^i = x^i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j, \qquad \tilde{p}_j = p_j \quad (۴.۱)$$

اورطب اهریغتمی دیدج دننام (۱.۱) و (۲.۱) وش,مد. ذگاجیرا اهریغتمی دیدجرد همیلتون,

هب ام اشنن م,ددههک م,وتنا انیونع زا ناجابهجائ, ار رطربف رکد هب تمیقرییغت همیلتون,

هک دینامیTM مِتسیسد ار می‌دهد.

رد یTM میمعتد رتشیب ن²مم اتسد ارهطبی نیب اصتخم ت تباث وبندهد و خطی باشد:

$$\{x^i, x^j\} = f^{ij}_{\ \ k}\, x^k \qquad (۵.۱)$$

هیبشد انیارهطبرد نیب اههناکت آتسانشد دننام آهچن نیب اههفلومی هناکتوازهییایTM مسج بلصد می‌ادنیم:

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ij}^{\ \ k}\, L_k \qquad (۶.۱)$$

امهن وطر هک زا رحکت مسج بلصد می‌ادمیند انیونع زا اتخاسر وپآوسن اهدمایپی زاییدرب ونع رحکت سیسمتد دراد. هبونعنا اثمل افتتو زاید نارود مسج بلصدازآ رد هسیاقم ابیTM یهرذ دازآ زا افتتو زا نیمه اتخاسر ناشی وشی‌مد.

یTM تلاحد کاملا″ لباقاظتنر نآ اتسد هک انیارهطبزا یTM اتخاسر ربجلی هتفرگ وشد. ایروآد می‌وشد ردربجلی ریظن، اههصتخمی ا²من و هناکتزلوامً ردیTM شیامذربجلی رقرا نمی‌گیرند. رد انیوصتر اههصتخم اههیاپی دیمنااهی پچ‌انادرو هستند.

رد انیایاپن‌هماذ دهف انی اتسد هک س‌پزا رمرو م²انیTM مبتنی رب انیونع زا اتخاسر وپآوس‌ن هبنجاهی اخصرتی زا رحکت رد انیونع زا اضفا ار هعلاطم کنیم. اب رفض لیسناتپ رکیو همیلتونی هرذ هب دتسد هدروآوشی‌مد و رشط ادن‌تشد دمرا ادرییاه دیاپ) را) و اعمدلات وحتل ز مانی هعلاطم وخادهد شد. اب لیسناتپ رلپکی رشیپیو ضیضحرد نییاپنیرت هبترمی الاتخل هب دتسد می‌آید. رد تیاهن اب اافتسدهد زا شور دع،ید دمرااهی هطوبرمربیا اپاراهرتمی دوخلها تسدب هدروآ و اب تلاحد معمولی هسیاقم دشه است.

لصف ۲

شیپزهنیمی ریاضی

۲.۱ اتخاسر وپآسونی

وضع دوخلها رگهو هبوصتر زریهبوضع رگهو رد دبما وبرمط است:

$$U(\hat{\boldsymbol{k}}) := [\exp(\hat{k}^a \hat{x}_a)] U(\mathbf{0}) \qquad (۲.۱)$$

هکردنآ $U(\hat{\boldsymbol{k}})$ وضعی زا رگهو رظانتم اب هفلوم ی $\hat{\boldsymbol{k}}$ اتسدو $U(\mathbf{0})$ همانی اتسدو $\exp(\hat{x})$ اشر

رظانتم اب دیمنا ربیراد پچانادرو $\hat{x}$ است. ارث $L_{\hat{x}_a}$ قتشم) لی رظانتم اب دیمنا ربیراد $\hat{x}_a$) رب یور عباتِ ارلا²سد دوخلها F هب انیدل²شد هتشوند میوشد:

$$L_{\hat{x}_a}(F) = \hat{x}_a^b \frac{\partial F}{\partial \hat{k}^b} \qquad (۲.۲)$$

هکردنآ $\hat{x}_a^b$ تابعی ارلا²سد اتسد هکرد ارهطبیزری دصق می کنند:

$$\hat{x}_a^b(\boldsymbol{k} = \mathbf{0}) = \delta_a^b. \qquad (۲.۳)$$

وتاعب ارلا²سد یِیاهرSلمع دنتسه هکهب وهلیسد ی رضباهی معمولی رب یور وتاعب ارلا²سدرSی

ارث دنکیم و دیمنااهی ربیراد یِیاهرSلمع دنتسه هکربیور وتاعب ارلا²سدهب وهلیسد ی قتشم

لی ارث میکند. رادیم:

$$[\hat{x}_a, \hat{x}_b] = \mathbf{f}^c_{ab}\, \hat{x}_c$$

$$[\hat{k}^a, \hat{k}^b] = 0 \tag{۴.۲}$$

$$[\hat{x}_a, \hat{k}^b] = \hat{x}^b_a \tag{۵.۲}$$

و زیذ وچن $\hat{x}^b_a$ وتاعب ارلا²سدنتسه اب $\hat{k}^a$اه اجهباج م‌شوند.
اونکن دیمنااهی ربیراد ارتسـاانادرو $\hat{x}^R_a$[1] ار رد رظن میریگ‌م هب وطیر که:

$$\hat{x}^R_a(\hat{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}) = \hat{x}_a(\hat{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}) \tag{۶.۲}$$

و زیذ انی وخصا ار رادذن که:

$$[\hat{x}^R_a, \hat{x}^R_b] = -\mathbf{f}^c_{ab}\,\hat{x}^R_c \tag{۷.۲}$$

$$[\hat{x}^R_a, \hat{x}_b] = 0. \tag{۸.۲}$$

اونکن اب اافتسدهد زا ااهنی دیمنا ربیراد $\hat{J}_a$ ار فـیرعت م‌کنیم:

$$\hat{J}_a = \hat{x}_a - \hat{x}^R_a. \tag{۹.۲}$$

این اورطب ربیا انی دیمنا ربیراد رقربرا است:

$$[\hat{J}_a, \hat{J}_b] = \mathbf{f}^c_{ab}\,\hat{J}_c, \tag{۱۰.۲}$$

$$[\hat{J}_a, \hat{x}_b] = \mathbf{f}^c_{ab}\,\hat{x}_c, \tag{۱۱.۲}$$

$$[\hat{k}^c, \hat{J}_a] = \mathbf{f}^{c}_{ab}\,\hat{k}^b. \tag{۱۲.۲}$$

ربیا رگهو (2) SU، $\mathbf{J}_a$اه امهن هفلوم اهی هناکت ی وازهی یا هستند.
ربیا نتخاس اضفی افز اهنت اکیر هک دیاب اا‌جنم د میه انی اتس هک انی اهرگاجهباج ار هب رکوهشی وپآوسن لیدبت کنیم:

$$\frac{[\ ,\ ]}{ik} \to \{\ ,\ \} \tag{۱۳.۲}$$

لاعهو رب انی دیاب هب دعب انی یمکاهت زیذ هجود کنیم. زا انی ور ی™ رسی اهتیمکی درSی

[1] اتسویپآ

فـیرعت مرکنیم:

$$p^a := \frac{k}{l}\hat{k}^a, \qquad (۱۴.۲)$$

$$x_a := il\hat{x}_a, \qquad (۱۵.۲)$$

$$x^b_a(\boldsymbol{p}) := \hat{x}^b_a\left[\psi\left(\frac{l}{k}\boldsymbol{p}\right)\right], \qquad (۱۶.۲)$$

$$J_a := ik\hat{J}_a \qquad (۱۷.۲)$$

هکرد نآ l ثابتر, اب دعبوطل است. نیدب بـیترتهب رکوهش وپآوسناهی زرید مرسیم:

$$\{p^a, p^b\} = 0, \qquad (۱۸.۲)$$

$$\{x_a, p^b\} = x^b_a, \qquad (۱۹.۲)$$

$$\{x_a, x_b\} = \lambda f^c_{ab}\, x_c, \qquad (۲۰.۲)$$

$$\{J_a, x_b\} = f^c_{ab}\, x_c, \qquad (۲۱.۲)$$

$$\{p^c, J_a\} = f^c_{ab}\, p^b, \qquad (۲۲.۲)$$

$$\{J_a, J_b\} = f^c_{ab}\, J_c \qquad (۲۳.۲)$$

هکرد نآ دعب λ سکع هناکت است.

$$\lambda := \frac{l}{k} \qquad (۲۴.۲)$$

هتکذ انیـتـساج هک x_a و p^a اه اهریغتمی لقتسمـ دنتسهو هیقبی اهریغتمار مـروتامیذرب بـسحـ انیاهـتـسدب روآیم.

اوحـض اتـسهکارگ دحـ $0 \to \lambda$ار ربرسر, مینکهب امهن رکوهش وپآوسناهی ومعمل مرسیم.

۲ ـ ۲ هبساحمی اپاراهرتمی وارلیرربیا رگهو $SU(2)$

ربیا رگهو SU (2) اپاراهرتمی وارلیار هب انیـ بـیترتـ رادیم:

$$\exp(\phi T_3)\exp(\theta T_2)\exp(\psi T_3)$$

هکرد نآ اهس‌یرتامی T_1، T_2 و T_3 هک امهن دلوم اهی رگهو نارود دنتسه هب انیل²شد هستند:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (۲۵.۲)$$

و زین انیاره‌طب نیب اهس‌یرتامی وفق رقربرا است:

$$[T_a, T_b] = \epsilon_{ab}{}^{c} T_c \qquad (۲۶.۲)$$

و زین رادیم:

$$U(\hat{\boldsymbol{k}}) = \left[e^{(\hat{k}^a \hat{x}^a)} \right] U(\mathbf{0}) \qquad (۲۷.۲)$$

رد انیا اج $\hat{k}^a$ اصتخم ت هستند. $\hat{x}$ رظانتم ابد دیمنا ربیراد پ‌چ‌ انادرو اتس، $U(\hat{k})$ هفلؤم ی رگهو رظانتم اب هصتخم ی $\hat{k}$ وبهد و $U(\mathbf{0})_a$ همان، است. زا طرف،:

$$e^{\phi T_3} e^{\theta T_2} e^{\psi T_3} := e^{s^a T_a} \qquad (۲۸.۲)$$

رد انیا اج T_a اهدلومی رگهو $SU(2)$ دنتسه هکرد لااب هتشون دشه اتس.

۲.۲.۱ دیپا رکند راابتط نیب اپاررتم اهی وارلیو

رد ود تلاح هلئسم ار لح م‌م‌ینک:

$$\begin{cases} e^{s^b T_b} = U(y)U^{-1}(x) \\ e^{s^b T_b} = U^{-1}(x)U(y) \end{cases} \qquad (۲۹.۲)$$

انیاه نعیی انیا هک ی™ ابر ابعتر تمسد پ‌چ ار زا پ‌چ رضب م‌م‌ینک و ابر دیSر زا ارتسد رضب م‌م‌ینک و ربیا ره ود تلاح اپاراهرتمی $\delta\phi$، $\delta\theta$ و $\delta\psi$ ار تسدب م‌روآمی، هکرد انیا اج:

$$\begin{cases} U(y) = e^{(\phi+\delta\phi)T_3} e^{(\theta+\delta\theta)T_2} e^{(\psi+\delta\psi)T_3} \\ U(x) = e^{\phi T_3} e^{\theta T_2} e^{\psi T_3} \end{cases} \qquad (۳۰.۲)$$

هب ود شور انیا ار لح م‌م‌ینک.

شور لوا (میقتسم)

ادتبا ربیا اعمدەلی نییاپ رد ارەطبی (۲۹.۲) لح مرمینک:

$$e^{s^b T_b} = e^{-\psi T_3} e^{-\theta T_2} e^{-\phi T_3} e^{(\phi+\delta\phi)T_3} e^{(\theta+\delta\theta)T_2} e^{(\psi+\delta\psi)T_3}$$

$$= e^{-\psi T_3} e^{-\theta T_2} e^{\delta\phi T_3} e^{\theta T_2} e^{\delta\theta T_2} e^{(\psi+\delta\psi)T_3} \qquad (۳۱.۲)$$

مرادمیذ ەکربیا سیرتامنارود $R(\theta)$:

$$R(\vec{\theta}) e^{\vec{u}.\vec{T}} R^{-1}(\vec{\theta}) = e^{[R(\vec{\theta})]\vec{u}.\vec{T}} \qquad (۳۲.۲)$$

اونکن دیابرد ارەطبی (۳۱.۲) کتکت وتاعبی یامذار ەبساحم مینک:

$$e^{\theta T_2} = 1 + \theta T_2 + \frac{1}{2!}(\theta)^2 (T_2)^2 + \frac{1}{3!}\theta^3 (T_2)^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 (T_2)^4 + \cdots \qquad (۳۳.۲)$$

احل اهسیرتام ارەبوطر دجاەناگ اسحب مرمینک:

$$(T_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (۳۴.۲)$$

و

$$(T_2)^3 = (T_2)^2 T_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -T_2 \qquad (۳۵.۲)$$

سپ اتەب انیا اجر میدیسەب انیا ەک:

$$\Rightarrow e^{\theta T_2} = 1 + \theta T_2 + \frac{1}{2!}\theta^2 (T_2)^2 - \frac{1}{3!}\theta^3 T_2 - \frac{1}{4!}\theta^4 (T_2)^2 + \cdots$$

$$= 1 + \left[\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right](T_2)^2 + \left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots\right] T_2 + \cdots \qquad (۳۶.۲)$$

$\sin x = x - x^3$

: م ي ن ا د , م ر S ي د ی و س ز ا

$$+ \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad (۳۷.۲)$$

ربانبانیەرو تامیذ θ اه ار رب بسح ونیسن و ونیسکس میسیونب. نیدب بیترت:

$$1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots = \cos\theta \qquad (۳۸.۲)$$

$$\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots = \sin\theta$$

حالا باید رابطه (۳۸.۲) را در رابطه (۳۶.۲) جایگذاری کنیم:

$$\Rightarrow e^{\theta T_2} = 1 + (1-\cos\theta)(T_2)^2 + \sin\theta\,(T_2) \qquad (۳۹.۲)$$

سپس در این مرحله باید روابط (۳۴.۲) و (۳۵.۲) را که محاسبه نمودیم در رابطه (۳۹.۲) قرار دهیم و در نهایت به ماتریس زیر می‌رسیم که:

$$e^{\theta T_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (۴۰.۲)$$

حالا باید $e^{-\theta T_2}e^{\delta\phi T_3}e^{\theta T_2}$ را حساب کنیم. برای این منظور ابتدا $e^{\phi T_3}$ را همانند قبل محاسبه می‌کنیم:

$$e^{\phi T_3} = 1 + \phi T_3 + \frac{\phi^2}{2!}(T_3)^2 + \frac{\phi^3}{3!}(T_3)^3 + \frac{\phi^4}{4!}(T_3)^4 + \cdots \qquad (۴۱.۲)$$

و بعد توان‌های ماتریس را محاسبه می‌کنیم:

$$(T_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(T_3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -T_3$$

پس خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow e^{\phi T_3} &= 1+\phi T_3+\frac{\phi^2}{2!}(T_3)^2-\frac{\phi^3}{3!}T_3-\frac{\phi^4}{4!}(T_3)^2+\cdots\\
&= 1+\left(\phi-\frac{\phi^3}{3!}+\cdots\right)T_3+\left(\frac{\phi^2}{2!}-\frac{\phi^4}{4!}+\cdots\right)(T_3)^2\\
&= 1+\sin\phi\, T_3+(1-\cos\phi)\,(T_3)^2\\
&= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-\sin\phi&0\\ \sin\phi&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\phi-1&0&0\\0&\cos\phi-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos\phi&-\sin\phi&0\\ \sin\phi&\cos\phi&0\\0&0&1\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{۴۲.۲}
$$

از طرفی:

$$
e^{\delta\phi T_3}=\begin{pmatrix}1&-\delta\phi&0\\ \delta\phi&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \delta\phi\ll 1
$$

بنابراین در نهایت رابطه‌ی زیر برقرار است. تجزیه محاسبات نیز بدین شرح است:

$\sin\theta$

$\cos\theta \quad 0 \quad -$

$$
e^{-\theta T_2} e^{\delta\phi T_3} e^{\theta T_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\delta\phi & 0 \\ \delta\phi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\delta\phi\cos\theta & -\sin\theta \\ \delta\phi & 1 & 0 \\ \sin\theta & -\delta\phi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & -\delta\phi\cos\theta & 0 \\ \delta\phi\cos\theta & 1 & \delta\phi\sin\theta \\ 0 & -\delta\phi\sin\theta & 1 \end{pmatrix} =: A
$$

بدین ترتیب تا به اینجا رسیدیم به اینکه:

$$
e^{s_b T_b} = e^{-\psi T_3} A\, e^{\delta\theta T_2} e^{\delta\psi T_3} e^{\psi T_3} \qquad (۴۳.۲)
$$