وزارت علوم تحقیقات و فناوری
دانشگاه تفرش
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی
ریاضی محض، گرایش هندسه

عنوان

میدان‌های برداری یکنوای پایا روی منیفلدهای ریمنی

استاد راهنما
دکتر اسماعیل نظری

استاد مشاور
دکتر علی پارسیان

پژوهشگر
حجت‌الله اصغری

بهمن ۱۳۸۹

نام خانوادگی: اصغری نام: حجت‌الله

عنوان پایان‌نامه: میدان‌های برداری یکنوای پایا روی منیفلدهای ریمنی

استاد راهنما: دکتر اسماعیل نظری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: هندسه

دانشگاه: تفرش دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: بهمن ۱۳۸۹ تعداد صفحه: ۷۲

کلیدواژه‌ها: میدان‌های برداری یکنوا،میدان‌های برداری یکنوای پایا، توابع مقعر تعمیم یافته، منیفلدهای ریمنی

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا به بیان مفهوم توابع مقعر روی منیفلدهای ریمنی می‌پردازیم و یک مثال از این نوع از توابع ارائه می‌کنیم. سپس مفهوم میدان برداری یکنوای پایا روی منیفلدهای ریمنی را معرفی کرده و چندین مثال مختلف از آن را ارائه می‌کنیم. سپس ارتباط این دو مفهوم را طی چند قضیه بررسی می‌نمائیم. در پایان نیز مفاهیم تقعر کاذب و یکنوائی پایای کاذب را معرفی نموده و ارتباط این دو مفهوم را به اختصار بررسی می‌کنیم.
در ضمن این پایان‌نامه بر اساس مرجع زیر تنظیم گردیده است.

A. Barani, M.R. Pouryayevali, *Invariant monoton vector fields on Riemannian manifolds*, Nonlinear Analysis 70 (2009), 1850-1861

فهرست مطالب

فهرست مطالب پ

پیش‌گفتار ت

۱ تعاریف و مفاهیم اولیه ۱

۱.۱ مقدمه ۱

۲.۱ نمادگذاری ۱

۳.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی ۲

۴.۱ مقدمه‌ای بر تحدب ۱۹

۲ تقعر و یکنوایی روی منیفلدهای ریمنی ۲۲

۱.۲ تقعر روی منیفلدهای ریمنی ۲۲

۲.۲ یکنوایی روی منیفلدهای ریمنی ۳۲

۳ تقعر کاذب و یکنوایی کاذب روی منیفلدهای ریمنی ۴۸

۱.۳ مقدمه ۴۸

۲.۳ تقعر کاذب و یکنوایی کاذب روی منیفلدهای ریمنی ۵۱

۳.۳ جمع بندی و نتیجه گیری ۵۹

مراجع ۶۱

واژه‌نامه ۶۳

پیش‌گفتار

همه‌ی ما کما بیش فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ را می‌شناسیم و تا حدودی با خصوصیات آن آشنا هستیم. همچنین می‌دانیم که مفاهیم زیادی روی این فضا معرفی شده و مورد مطالعه قرار گرفته است. یکی از این مفاهیم، مفهوم تحدب است و به چگونگی امکان اتصال دو نقطه از فضا به وسیله‌ی پاره خط واصل بین این دو نقطه مربوط می‌شود. با معرفی یک فضای جدید، تعمیم مفاهیم از فضای اقلیدسی به این فضا امری طبیعی و ضروری است اما از آنجا که ممکن است در این فضای جدید برخی از تعاریف اولیه اندکی متفاوت با تعاریف روی فضای اقلیدسی باشند، لذا باید هنگام تعمیم مفاهیم نیز از شرایط متفاوتی استفاده کرد. واضح است که تعریف پاره‌خط در فضای اقلیدسی با تعریف آن در فضاهای دیگر یکی نیست و بنابراین برای تعمیم مفهوم تحدب به فضاهای دیگر باید از تعاریف مربوط به آن فضا استفاده کنیم.

در سال ۱۹۸۱ **هانسون**[۱] یک تعمیم از تحدب را تحت عنوان **تقعر**[۲] معرفی کرد که در این تعریف جدید به جای تفاضل $x - y$ در تعریف عادی تحدب، از تابع دلخواه $\eta(x, y)$ استفاده می‌کرد.

در سال ۱۹۸۶ **بن ازرائیل**[۳] و **موند**[۴] یک تعمیم جدید از مجموعه‌های محدب و توابع محدب را ارئه کردند که به ترتیب مجموعه‌های مقعر و توابع **مقعر مقدماتی**[۵] نامیده شدند.

---

[۱] Hanson
[۲] Invexity
[۳] Ben-Israel
[۴] Mond
[۵] Preinvex

در سال ۱۹۹۴ **ادریست**[۶] یک تعمیم از تحدب را که متفاوت از تعمیم‌های دیگر بود پیشنهاد کرد که در آن فضای اقلیدسی با منیفلد ریمنی و پاره خط با ژئودزیک جایگزین شده بودند. در این مرحله به منظور مطالعه‌ی این مفهوم روی منیفلدهای ریمنی لازم بود که مفهوم دیگری تحت عنوان یکنوایی به روی منیفلدهای ریمنی توسعه داده شود. زیرا همان طور که می‌دانیم در فضای اقلیدسی یک ارتباط مستقیم بین محدب بودن تابع و یکنوا بودن مشتق آن وجود دارد به طوری که هر تابع با مشتق یکنوای نا نزولی محدب است و برعکس هر تابع محدب دارای مشتق یکنوای نا نزولی می‌باشد. اما به وضوح یک منیفلد ریمنی در حالت کلی یک فضای اقلیدسی نیست و بنابراین طبیعی است که مفهوم یکنوایی در فضای اقلیدسی با مفهوم یکنوایی در روی منیفلدهای ریمنی متفاوت باشد.

در سال ۱۹۹۹ **نمت**[۷] یک تعمیم از عملگرهای یکنوا را تحت عنوان میدان‌های برداری یکنوا روی منیفلدهای ریمنی ارائه کرد و ارتباط بین تحدب تعمیم یافته و عملگرهای یکنوای تعمیم یافته را مورد مطالعه قرار داد. این پایان‌نامه براساس منبع [۲] تنظیم شده است و هدف آن معرفی مفهوم میدان برداری یکنوای پایا روی منیفلدهای ریمنی و بررسی ارتباط آن با توابع اینوکس می‌باشد. علاوه براین مفاهیم تقعر کاذب و یکنوایی پایای کاذب نیز معرفی و ارتباط این دو مفهوم بررسی خواهد شد.

[۶] Udriste
[۷] Nemeth

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

در این فصل تعاریف و مفاهیم مرتبط با منیفلدهای ریمنی را بیان کرده و تعریف منیفلد **کارتان-هادامارد**[۱] را یادآوری می‌نمائیم. سپس مفهوم تابع محدب، مجموعه‌ی محدب و عملگر یکنوا را بیان نموده و ارتباط آنها را به اختصار بررسی می‌کنیم. همچنین در پایان این فصل، تعمیم این مفاهیم به روی منیفلدهای ریمنی را در نظر گرفته و چند قضیه‌ی مقدماتی را که ارتباط آنها را باهم نشان می‌دهد، بیان می‌کنیم.

۲.۱ نمادگذاری

در سراسر این پایان نامه M یک منیفلد C^∞ هموار است و T_pM نشان دهنده‌ی فضای مماس بر M در نقطه‌ی $p \in M$ و $\langle .,. \rangle = g_p(.,.)$ نشان دهنده‌ی متریک ریمنی در فضای مماس T_pM می‌باشد. نماد $\chi(M)$ را برای نمایش فضای همه‌ی میدان‌های برداری روی M به کار می‌بریم و با علامت $||\ ||_p$ نرم یک بردار را در نقطه‌ی $p \in M$ نمایش می‌دهیم. با حروف α، β، γ و $\cdots$ خم‌های C^1-تکه‌ای روی M را نشان میدهیم و $L(\alpha) = \int_a^b ||\alpha'(t)||dt$ نشان دهنده‌ی طول خم $\alpha : [a,b] \to M$ می‌باشد که در آن $[a,b]$ بازه‌ای از خط حقیقی $\mathbb{R}$ است.

[۱] Cartan-Hadamard

همچنین میدان‌های برداری روی M را با نمادهای X، Y، Z، W، V و $\cdots$ نشان می‌دهیم و مقدار آنها را در یک نقطه با حروف کوچک x، y، z، w، v و $\cdots$ نمایش می‌دهیم و مشتق کواریان آنها را که معمولاً التصاق **لوی-چویتا**[۲] نامیده می‌شود با نماد $\nabla_X Y$ نشان می‌دهیم. ایزومتری القاء شده توسط التصاق لوی-چویتا را با نماد $P^{t_2}_{t_1,\alpha} : T_{\alpha(t_1)}M \to T_{\alpha(t_2)}M$ نشان می‌دهیم و انتقال موازی در امتداد خم α از $\alpha(t_1)$ به $\alpha(t_2)$ می‌نامیم. همچنین اگر f یک نگاشت دیفرانسیل‌پذیر از منیفلد M به منیفلد N باشد، آنگاه با نماد $df(x)$ مشتق f در x رانمایش خواهیم داد.

۳.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۳.۱. یک متریک ریمنی (ساختار ریمنی) روی یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر M نگاشتی مانند g است که به هرجفت از بردارهای مماس $\{v, w\}$ در T_pM عدد $g(v,w)$ را نظیر می‌کند به طوری که به ازای هر $v, w, x \in T_pM$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

۱) $g(v,w) = g(w,v)$

۲) $g(v+w,x) = g(v,w) + g(w,x) \ , \ g(v,w+x) = g(v,w) + g(v,x)$

۳) $g(\lambda v,w) = g(v,\lambda w) = \lambda g(v,w)$

۴) $g(v,v) = 0 \iff v = 0 \ , \ g(v,v) > 0$

و همچنین اگر X و Y میدان‌های برداری هموار روی M باشند، آنگاه $(g(X,Y))_p = g((X)_p,(Y)_p)$ نیز هموار باشد.

خواص (۱) تا (۴) در تعریف فوق همان خواص آشنای ضرب داخلی هستند و در واقع می‌توان متریک g روی M را توسط $g(v,w) = \langle v,w \rangle$ تعریف کرد. خاصیت هموار بودن g نیز این امکان را به ما می‌دهد

[۲] Levi-Civita

تا محاسبات دیفرانسیلی لازم را برای بررسی هندسه‌ی (M,g) انجام دهیم.

مثال ۲.۳.۱. *فرض کنید $M = S$ و S یک n- رویه در $\mathbb{R}^{n+m}$ باشد. برای هر $p \in S$ و $v, w \in T_pM$ نگاشت g را به صورت $g(v,w) = \langle v,w\rangle$ تعریف می‌کنیم که $\langle .,.\rangle$ همان ضرب داخلی معمولی در فضای برداری $\mathbb{R}^{n+m}$ می‌باشد. در این صورت g یک متریک ریمنی روی S است که به متریک متعارف روی S موسوم است.*

تعریف ۳.۳.۱. یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر M به همراه یک متریک ریمنی یک منیفلد ریمنی نامیده می‌شود.

حال که مفهوم منیفلد ریمنی بیان شد، می‌خواهیم به بیان تعریف پاره خط در این فضا بپردازیم اما قبل از ارائه‌ی یک تعریف دقیق یادآوری چند تعریف از جمله تعریف خم پارامتری و میدان برداری در امتداد یک خم پارامتری ضروری است.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید M یک منیفلد ریمنی و $I \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه‌ی باز از $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت نگاشت دیفرانسیل‌پذیر $\alpha : I \to M$ را یک خم پارامتری روی M می‌نامیم.

تعریف ۵.۳.۱. یک میدان برداری X در طول خم پارامتری α، یک نگاشت دیفرانسیل‌پذیر است که به هر $t \in I$ (به عبارت دیگر $\alpha(t) \in M$) بردار مماس $X(t) \in T_{\alpha(t)}M$ را نظیر می‌کند.

در واقع هر میدان برداری X در طول خم α به شکل زیر می‌باشد $X(t) = (\alpha(t), x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ که در آن x_iها به ازای $1 \leq i \leq n$ توابع مختصاتی میدان برداری X می‌باشند.

اکنون به اختصار مشتق یک میدان برداری مانند X را در طول خم α که معمولاً مشتق کوواریان نامیده می‌شود، بیان می‌کنیم.

تعریف ۶.۳.۱. مشتق میدان برداری X در امتداد خم α عبارت است از میدان برداری $\frac{DX}{dt}$ که به صورت

$$\frac{DX}{dt} = \left(\alpha(t), \frac{dx_1}{dt}, \cdots, \frac{dx_n}{dt}\right)$$

تعریف می‌شود و مشتق کوواریان X در امتداد α نامیده می‌شود.

حال اگر میدان برداری X به وسیله‌ی میدان برداری V القاء شود، یعنی $X(t) = V(\alpha(t))$ آنگاه

$$\frac{DX}{dt} = \nabla_{\frac{d\alpha(t)}{dt}} V(\alpha(t))$$

که در آن نماد ∇ همان التصاق لوی-چویتا می‌باشد.

به سادگی می‌توان نشان داد که مشتق میدان‌های برداری در امتداد یک خم پارامتری دارای خواص زیر می‌باشد. به عبارت دیگر اگر X و Y میدان‌های برداری در طول خم α و f یک تابع دیفرانسیل‌پذیر در طول α باشد، آنگاه خواص زیر را داریم

۱) $\frac{D}{dt}(X+Y) = \frac{DX}{dt} + \frac{DY}{dt}$

۲) $\frac{D}{dt}(fX) = \frac{df}{dt}X + f\frac{DX}{dt}$

۳) $\frac{D}{dt}(XY) = \frac{DX}{dt}Y + \frac{DY}{dt}X$

حال تعمیم خط مستقیم از فضای اقلیدسی را به روی منیفلدهای ریمنی که ژئودزیک نامیده می‌شود، می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

تعریف ۷.۳.۱. فرض کنید M یک منیفلد ریمنی و $\alpha : I \to M$ یک خم پارامتری باشد. گوئیم α یک ژئودزیک است هرگاه در رابطه‌ی زیر صدق کند

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{d\alpha(t)}{dt}\right) = \nabla_{\frac{d\alpha(t)}{dt}} \frac{d\alpha(t)}{dt} = 0$$

اگر $[a,b] \subset I$ و $\alpha : I \to M$ یک ژئودزیک باشد آنگاه تحدید α به $[a,b]$ را یک پاره خط ژئودزیک می‌نامند.

تعریف فوق ایجاب می‌کند که طول بردار مماس بر یک خم ژئودزیک باید ثابت باشد. در واقع داریم

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\|\frac{d\alpha(t)}{dt}\right\|^2 &= \frac{d}{dt}\left\langle \frac{d\alpha(t)}{dt}, \frac{d\alpha(t)}{dt}\right\rangle \\ &= \left\langle \frac{D}{dt}\frac{d\alpha(t)}{dt}, \frac{d\alpha(t)}{dt}\right\rangle + \left\langle \frac{d\alpha(t)}{dt}, \frac{D}{dt}\frac{d\alpha(t)}{dt}\right\rangle \\ &= 2\left\langle \frac{D}{dt}\frac{d\alpha(t)}{dt}, \frac{d\alpha(t)}{dt}\right\rangle = 0\end{aligned}$$

و این نشان می‌دهد که طول بردار مماس بر یک خم ژئودزیک مقداری ثابت است.

فرض کنید $\alpha : [a,b] \subset I \to M$ یک خم دیفرانسیل‌پذیر باشد. طول خم α را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|_{\alpha(t)}\, dt$$

واضح است که به ازای هر دو نقطه $p, q \in M$ بی‌شمار خم دیفرانسیل‌پذیر از این دو نقطه می‌گذرد. حال فاصله‌ی p, q را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$d(p,q) = \inf L(\alpha)$ که α یک خم دیفرانسیل‌پذیر گذرنده از p و q می‌باشد.

با این تعریف d روی M یک متر تعریف می‌کند. در واقع داریم

۱) به ازای هر $p, q \in M$ داریم $d(p,q) \geq 0$.

زیرا طول یک خم همواره مقداری مثبت است و $\inf$ یک مجموعه‌ی مثبت همواره مقداری مثبت است.

۲) به ازای هر $p, q \in M$ داریم $d(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$.

زیرا اگر فرض کنیم که $d(p,q) = 0$ آنگاه نتیجه می‌شود که یک خم مانند α گذرنده از نقاط p و q وجود

دارد به طوری که $L(\alpha)=0$ یا به عبارت دیگر $\left\|\frac{d\alpha(t)}{dt}\right\|=0$. بنابراین α روی M مقداری ثابت است (در واقع خم α به یک نقطه تقلیل می‌یابد) و در نتیجه $p=q$.

برعکس اگر $p=q$ باشد بدیهی است که $d(p,q)=0$ خواهد بود.

۳) به ازای هر $p,q\in M$ داریم $d(p,q)=d(q,p)$.

۴) به ازای هر $p,q,s\in M$ داریم $d(p,q)\leq d(p,s)+d(s,q)$.

این نامساوی به نامساوی مثلث معروف است و اثبات آن نیز ساده است. زیرا اگر فرض کنیم α_1 یک خم با طول مینیمم باشد که از p و q می‌گذرد و α_2 یک خم با طول مینیمم که از p و s و α_3 یک خم با طول مینیمم باشد که از s و q عبور می‌کند، در این صورت داریم

$$d(p,q)=L(\alpha_1)\ \ ,\ \ d(p,s)=L(\alpha_2)\ \ ,\ \ d(s,q)=L(\alpha_3)$$

حال خم تکه‌ای α را که از دو تکه‌ی α_2 و α_3 تشکیل شده است، در نظر می‌گیریم. واضح است که α از دو نقطه‌ی p و q می‌گذرد و بنابر انتگرال‌پذیر بودن خم‌های هموار تکه‌ای داریم

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \int_a^b \left\|\frac{d\alpha(t)}{dt}\right\| dt \\ &= \int_a^b \left\|\frac{d\alpha_2(t)}{dt}\right\| dt + \int_a^b \left\|\frac{d\alpha_3(t)}{dt}\right\| dt \\ &= L(\alpha_2)+L(\alpha_3) \end{aligned}$$

از طرفی طبق فرض خم α_1 یک خم با طول مینیمم می‌باشد که از p و q می‌گذرد و لذا بنا به خاصیت $\inf$ می‌توان نوشت $L(\alpha_1)\leq L(\alpha)$ در نتیجه داریم

$$d(p,q)=L(\alpha_1)\leq L(\alpha)=d(p,s)+d(s,q)$$

بنابراین d با تعریف فوق یک متر روی M است و توپولوژی متری روی M را القاء می‌کند.

ثابت می‌شود که اگر α خمی باشد که از نقاط p و q می‌گذرد و $L(\alpha) = d(p,q)$ آنگاه α یک ژئودزیک در M است و ژئودزیک می‌نیمال نامیده می‌شود.

تعریف ۸.۳.۱. هر گاه ژئودزیک α دارای طول بردار مماس برابر یک باشد یعنی $\left\|\frac{d\alpha(t)}{dt}\right\| = 1$ باشد، آنگاه آن را ژئودزیک نرمال شده یا متعارف شده می‌نامند.

از آنجا که معادله‌ی مربوط به یک ژئودزیک یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم می‌باشد، لذا می‌توان قضیه‌ای مشابه قضیه‌ی وجود و یکتایی در معادلات دیفرانسیل را در مورد ژئودزیک‌ها بیان کرد.

قضیه ۹.۳.۱. *فرض کنید M یک منیفلد ریمنی و $p \in M$ و $v \in T_pM$ باشد. در این صورت بازه‌ی باز مانند $I \subseteq \mathbb{R}$ شامل ۰ و ۱ و یک ژئودزیک مانند $\alpha : I \to M$ وجود دارد به طوری که*

۱) $\alpha(0) = p \ , \ \ \alpha'(0) = v$

۲) *هرگاه $\beta : \tilde{I} \to M$ یک ژئودزیک دیگر در M با شرط $\beta(0) = p \ , \ \ \beta'(0) = v$ باشد، آنگاه $\tilde{I} \subseteq I$ و به ازای هر $t \in \tilde{I}$ داریم $\beta(t) = \alpha(t)$.*

ژئودزیک α را ژئودزیک ماکسیمال در M با نقطه‌ی آغازی p و سرعت اولیه‌ی v می‌نامند.

برهان. رجوع شود به [۱۴] فصل ۷ صفحه‌ی ۶۰. □

تذکر ۱۰.۳.۱. *البته باید متذکر شویم که ماکسیمال بودن α به معنی ماکسیمال بودن بازه‌ی I می‌باشد و این از لحاظ تجسم هندسی به این معنی است که ژئودزیک α را تا آنجا که ادامه می‌یابد امتداد دهیم.*

تذکر ۱۱.۳.۱. *اکنون که تعمیم خط مستقیم را به روی منیفلدهای ریمنی شناختیم، می‌توان یک تعمیم طبیعی از تحدب را به روی منیفلدهای ریمنی به صورت زیر بیان کرد.*

تعریف ۱.۳.۱۲. زیر مجموعه‌ی U از منیفلد ریمنی M محدب نامیده می‌شود هر گاه به ازای هر دو نقطه‌ی p و q از U یک ژئودزیک منحصر به فرد مانند α در U وجود داشته باشد که p و q را به هم وصل کند و طول آن برابر $d(p, q)$ باشد.

یکی دیگر از مفاهیمی که در ادامه‌ی بحث مورد نیاز خواهد بود مفهوم ایزومتری است. از آنجا که ایزومتری‌ها حافظ فاصله یا به عبارت بهتر حافظ ساختار هندسی هستند، لذا مطالعه‌ی آنها از اهمیت خاصی برخوردار است و در هندسه‌ی اقلیدسی این مفهوم به عنوان نگاشتی که فاصله‌ی اقلیدسی بین نقاط را حفظ می‌کند، تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۳.۱۳. یک ایزومتری در $\mathbb{R}^n$ یک نگاشت مانند $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ است که به ازای هر $p, q \in \mathbb{R}^n$ داریم $d(F(p), F(q)) = d(p, q)$.

به عنوان مثال‌هایی از یک نگاشت ایزومتری در فضای اقلیدسی می‌توان به نگاشت‌هایی مانند انتقال یا دوران اشاره کرد.

حال می‌خواهیم تعمیم مفهوم ایزومتری به روی منیفلدهای ریمنی را بیان کنیم.

تعریف ۱.۳.۱۴. فرض کنید که M و N دو منیفلد ریمنی و $\phi : M \to N$ یک نگاشت دیفئومورفیسم باشد.(ϕ یک نگاشت دو سوئی است که ϕ^{-1} و ϕ دیفرانسیل‌پذیرند.) در این صورت ϕ یک ایزومتری نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $p \in M$ و $v, w \in T_pM$ داشته باشیم

$$\langle d\phi(v), d\phi(w)\rangle_{\phi(p)} = \langle v, w\rangle_{(p)}$$

به عنوان یک مثال از یک نگاشت ایزومتری روی یک منیفلد ریمنی می‌توان به نگاشت انتقال موازی بردارها اشاره کرد که در ادامه به تفصیل به شرح آن می‌پردازیم.

تعریف ۱۵.۳.۱. در فضای اقلیدسی دو بردار $V = (p, v) \in T_p\mathbb{R}^n$ و $W = (q, w) \in T_q\mathbb{R}^n$ را موازی اقلیدسی گویند هر گاه $v = w$.

بنابراین اگر $X(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ یک میدان برداری در امتداد خم α باشد و $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ یک خم پارامتری باشد، آنگاه گوئیم میدان برداری X در طول خم α موازی است هر گاه به ازای هر $t_1, t_2 \in I$ داشته باشیم

$$(x_1(t_1), \cdots, x_n(t_1)) = (x_1(t_2), \cdots, x_n(t_2))$$

در نتیجه میدان برداری X موازی اقلیدسی است اگر و تنها اگر $\frac{dX(t)}{dt} = 0$.

حال این مفهوم را می‌توان به روی منیفلدهای ریمنی توسعه داد.

تعریف ۱۶.۳.۱. فرض کنید M یک منیفلد ریمنی و X یک میدان برداری مماس روی M باشد. میدان برداری X در طول خم $\alpha : I \to M$ را موازی لوی-چویتا یا صرفاً موازی گویند هر گاه به ازای هر $t \in I$ داشته باشیم $\frac{DX(t)}{dt} = 0$.

علامت $\frac{D}{dt}$ مشتق کوواریان میدان برداری X در امتداد خم α می‌باشد.

یک تعبیر هندسی از مفهوم توازی را می‌توان چنین بیان کرد که میدان برداری X در طول خم α موازی نامیده می‌شود در صورتی که اگر میدان X از M رؤیت شود یک میدان برداری ثابت در طول خم α باشد. طبق تعریف توازی هر میدان برداری موازی از حل یک معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی اول به دست می‌آید. از طرف دیگر بنابر قضیه‌ی وجود و یکتایی در معادلات دیفرانسیل، جواب هر معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی اول با شرایط اولیه‌ی معین موجود و منحصر به فرد است. بنابراین تحت شرایط اولیه‌ی معین می‌توان قضیه‌ای مشابه قضیه‌ی وجود و یکتایی را برای بردارهای موازی بیان کرد.

قضیه ۱۷.۳.۱. *فرض کنید M یک منیفلد ریمنی و $\alpha : I \to M$ یک خم پارامتری باشد. همچنین فرض کنید که $t_0 \in I$ و $v_0 \in T_{\alpha(t_0)}M$ باشد. در این صورت یک میدان برداری موازی منحصر به فرد مانند V در طول خم α وجود دارد به طوری که $V(t_0) = v_0$.*

برهان. رجوع شود به [۶] فصل ۲ صفحه‌ی ۵۲. □

حال می‌خواهیم مفهوم توازی را برای توضیح انتقال موازی بردارهای مماس از یک نقطه‌ی منیفلد به نقطه‌ی دیگر آن به کار گیریم. برای این کار فرض کنید p و q دو نقطه‌ی دلخواه از منیفلد ریمنی M و $\alpha : [a,b] \to M$ یک خم پارامتری هموار باشد به طوری که $\alpha(a) = p$ و $\alpha(b) = q$ می‌باشد. (هموار بودن خم α در یک بازه‌ی بسته به این معناست که α تحدید یک نگاشت دیفرانسیل‌پذیر از یک بازه‌ی باز شامل $[a,b]$ در M است.) همچنین فرض کنید v_0 یک بردار مماس بر M در نقطه‌ی p باشد، یعنی $v_0 \in T_pM$. حال می‌خواهیم این بردار را به طور موازی در امتداد خم α به نقطه‌ی q انتقال دهیم. طبق قضیه‌ی (۱۷.۳.۱) یک میدان برداری موازی منحصر به فرد مانند V در طول خم α وجود دارد به قسمی که $V(a) = v_0$ و چون V در امتداد خم α موازی است پس به وضوح $V(b)$ انتقال موازی v_0 از p به q خواهد بود.

تعریف ۱۸.۳.۱. فرض کنید M یک منیفلد ریمنی و $p, q \in M$ و $\alpha : [a,b] \to M$ یک خم پارامتری هموار باشد به طوری که $\alpha(a) = p$ و $\alpha(b) = q$ می‌باشد. همچنین فرض کنید v_0 یک بردار مماس بر M در نقطه‌ی p و V یک میدان برداری موازی در امتداد خم α باشد که $V(a) = v_0$ است. در این صورت انتقال موازی v_0 از p به q در طول α یک نگاشت مانند $P^p_{q,\alpha} : T_pM \to T_qM$ است و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$P^p_{q,\alpha}[v_0] = V(b)$$

تذکر ۱.۳.۱۹. *ملاحضه می‌شود که انتقال موازی یک بردار مماس از یک نقطه به نقطه‌ی دیگر وابسته به خمی است که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند. به عبارت دیگر هر گاه α و β دو خم پارامتری باشند که p و q را به هم وصل می‌کنند و $v_0 \in T_pM$ آنگاه در حالت کلی داریم $P^p_{q,\beta}[v_0] \neq P^p_{q,\alpha}[v_0]$.*

قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که انتقال موازی یک نگاشت ایزومتری از T_pM به T_qM می‌باشد.

قضیه ۱.۳.۲۰. *فرض کنید M یک منیفلد ریمنی و $p, q \in M$ و $\alpha : [a, b] \to M$ یک خم پارامتری هموار باشد به طوری که $\alpha(a) = p$ و $\alpha(b) = q$ می‌باشد. در این صورت نگاشت $P^p_{q,\alpha} : T_pM \to T_qM$ یک یکریختی بین این دو فضای برداری است که ضرب داخلی را حفظ می‌کند. به عبارت دیگر*

۱) *$P^p_{q,\alpha}$ یک نگاشت خطی است.*

۲) *$P^p_{q,\alpha}$ دو سوئی است.*

۳) *به ازای هر $v, w \in T_pM$ داریم $\langle P^p_{q,\alpha}[v], P^p_{q,\alpha}[w] \rangle = \langle v, w \rangle$.*

برهان. برای اثبات (۱) فرض کنید $v_0, w_0 \in T_pM$ دو بردار مماس بر خم α در نقطه‌ی p باشند. همچنین V و W میدان‌های برداری موازی در امتداد خم α باشند به طوری که $V(a) = v_0$ و $W(a) = w_0$ باشد. اولاً واضح است که میدان برداری $V + W$ در طول خم α موازی است. به این دلیل که چون V و W در طول α موازی‌اند پس طبق تعریف توازی $\frac{DW}{dt} = \frac{DV}{dt} = 0$ می‌باشد. از طرف دیگر طبق خاصیت مشتق کوواریان داریم $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt} = 0$ و در نتیجه میدان برداری $V + W$ در طول α موازی است. ثانیاً داریم $(V + W)(a) = V(a) + W(a) = v_0 + w_0$. لذا خواهیم داشت

$$P^p_{q,\alpha}[v_0 + w_0] = (V + W)(b) = V(b) + W(b) = P^p_{q,\alpha}[v_0] + P^p_{q,\alpha}[w_0]$$

به طریق مشابه می‌توان نشان داد که به ازای هر $c \in \mathbb{R}$ میدان برداری cV در طول خم α موازی است و

$(cV)(a) = cV(a) = cv_0$ و در نتیجه داریم

$$P^p_{q,\alpha}[cv_0] = (cV)(b) = cV(b) = cP^p_{q,\alpha}[v_0]$$

بنابراین $P^p_{q,\alpha}$ یک نگاشت خطی است.

برای اثبات (۳) ابتدا نشان می‌دهیم که هر میدان برداری موازی در امتداد یک خم دارای طول ثابت است.

زیرا اگر cV یک میدان برداری موازی در طول خم cV باشد، آنگاه داریم

$$\frac{d}{dt}\left\|V\right\|^2 = \frac{d}{dt}\langle V, V\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, V\right\rangle + \left\langle V, \frac{DV}{dt}\right\rangle = 2\left\langle \frac{DV}{dt}, V\right\rangle = 0$$

با استفاده از این مطلب به سادگی می‌توان نشان داد که اگر V و W میدان‌های برداری موازی در طول خم α باشند، آنگاه $\langle V, W\rangle$ مقداری ثابت است. زیرا

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W\right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt}\right\rangle = 0$$

در نتیجه می‌توان نوشت

$$\left\langle P^p_{q,\alpha}[v_0], P^p_{q,\alpha}[w_0]\right\rangle = \langle V(b), W(b)\rangle = \langle V(a), W(a)\rangle = \langle v_0, w_0\rangle$$

بنابراین داریم

$$\left\langle P^p_{q,\alpha}[V], P^p_{q,\alpha}[W]\right\rangle = \langle V, W\rangle$$

در نتیجه نگاشت $P^p_{q,\alpha}$ یک ایزومتری است.

برای اثبات (۲) ابتدا یک به یک بودن $P^p_{q,\alpha}$ را ثابت می‌کنیم و برای این منظور نشان می‌دهیم که $\ker P^p_{q,\alpha} = 0$ می‌باشد که در آن نماد $\ker$ نشان دهنده‌ی هسته‌ی $P^p_{q,\alpha}$ می‌باشد. فرض کنید V یک میدان برداری موازی در طول خم α باشد به طوری که $P^p_{q,\alpha}(V) = 0$. پس طبق بند (۳) می‌توان نوشت

$$0 = \left\|P^p_{q,\alpha}(V)\right\|^2 = \left\langle P^p_{q,\alpha}[V], P^p_{q,\alpha}[V]\right\rangle = \langle V, V\rangle = \|V\|^2$$

این رابطه ایجاب می‌کند که $V = 0$ و در نتیجه نگاشت $P^p_{q,\alpha}$ یک به یک می‌باشد. تا به اینجا ثابت کردیم که $P^p_{q,\alpha}$ نگاشت خطی و یک به یک از T_pM به T_qM است که ضرب داخلی را حفظ می‌کند. اما می‌دانیم که چنین نگاشت‌هایی پوشا نیز هستند و لذا اثبات کامل است. □

در ادامه دسته‌ی خاصی از میدان‌های برداری را روی منیفلدهای ریمنی، که به میدان‌های ژاکوبی معروفند معرفی می‌کنیم. اما قبل از آن به بیان چند مفهوم نیاز داریم.

فرض کنید M یک منیفلد ریمنی باشد. با علامت TM کلاف مماسی M را نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$TM = \bigcup_{p\in M} T_pM = \{(p, v) | p \in M, v \in T_pM\}$$

واضح است که روی هر منیفلد ریمنی M هر ژئودزیک α به صورت منحصر به فرد به وسیله‌ی یک نقطه مانند p و یک بردار مانند v که معمولاً بردار سرعت ژئودزیک نامیده می‌شود، مشخص می‌گردد. بنابراین می‌توان هر ژئودزیک را که در لحظه‌ی t با سرعت v از نقطه‌ی p می‌گذرد به صورت یکتا به شکل $\alpha(t, p, v)$ نمایش داد. این نوع نمایش ژئودزیک‌ها به ما امکان می‌دهد تا مفهوم تابع نمائی را به صورت زیر بیان کنیم.

تعریف ۲۱.۳.۱. فرض کنید M یک منیفلد ریمنی و U یک زیر مجموعه‌ی باز از TM باشد. در این صورت نگاشت $\exp : U \to M$ با ضابطه‌ی زیر نگاشت نمائی روی U نامیده می‌شود.

$$\exp(q,v) = \alpha(1,q,v) = \alpha\big(\, \|v\|\,, q, \frac{v}{\|v\|}\big)$$

در اغلب مسائل کاربردی معمولاً تحدید نگاشت نمائی را به زیر مجموعه‌هائی از فضای مماس T_pM به صورت $\exp_q : B_\xi(0) \subset T_qM \to M$ با ضابطه‌ی $\exp_q(v) = \exp(q,v)$ در نظر می‌گیرند که در آن $B_\xi(0)$ یک گوی باز به مرکز صفر وشعاع ξ در T_qM می‌باشد.

به تعبیر هندسی $\exp_q(v)$ نقطه‌ای از M است که با حرکت از نقطه‌ی q به اندازه‌ی $\|v\|$ در امتداد ژئودزیک $\alpha\big(\, \|v\|\,, q, \frac{v}{\|v\|}\big)$ به دست می‌آید. بنابراین از این پس ژئودزیکی که در لحظه‌ی t از نقطه‌ی q با سرعت v می‌گذرد را به صورت $\alpha(t,q,v) = \exp_q(tv)$ نشان خواهیم داد.

می‌توان نشان داد که نگاشت نمائی $\exp_q : B_\xi(0) \subset T_qM \to M$ با ضابطه‌ی $\exp_q(v) = \exp(q,v)$ یک دیفئومورفیسم از $B_\xi(0)$ به روی یک بازه‌ی باز از M است.

همچنین اگر $v \in T_qM$ یک بردار مماس بر M در نقطه‌ی q باشد، با یکی گرفتن فضای مماس بر T_qM در v با خود این فضا یعنی $T_v(T_qM) \approx T_qM$ به راحتی می‌توان نشان داد که نگاشت مشتق $\exp_q$ یعنی $(d\exp_q)_v : T_v(T_qM) \approx T_qM \to T_{\exp_q(v)}M$ یک نگاشت ایزومتری است. لم زیر که به لم **گاوس**[۳] معروف است این مطلب را روشن می‌سازد.

[۳] Gauss

لم ۲۲.۳.۱. *فرض کنید M یک منیفلد ریمنی و $u \in T_qM$ باشد. در این صورت به ازای هر $v, w \in T_u(T_qM) \approx T_qM$ داریم*

$$\left\langle (d\exp_q)_u(v), (d\exp_q)_u(w) \right\rangle_{(\exp_q)_u} = \langle v, w \rangle_q$$

برهان. رجوع کنید به [۶] فصل ۳ صفحه‌ی ۶۹. □

حال مفهوم انحناء را برای این که بتوانیم میدان‌های برداری ژاکوبی را توضیح دهیم، بیان می‌کنیم.

تعریف ۲۳.۳.۱. فرض کنید M یک منیفلد ریمنی و X، Y و Z میدان‌های برداری روی M باشند. منظور از انحنای ریمنی R نگاشت $R(X,Y) : \chi M \to \chi M$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$

و نماد $[X,Y]$ نشان دهنده‌ی کروشه‌ی لی دو میدان برداری X و Y است که به ازای هر تابع دیفرانسیل‌پذیر مانند f به شکل زیر تعریف می‌شود

$$[X,Y]f = Y(Xf) - X(Yf)$$

هر گاه منیفلد ریمنی M با فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ جایگزین شود، آنگاه به ازای هر $X, Y, Z \in \chi\mathbb{R}^n$ می‌توان نشان داد که $R(X,Y)Z = 0$ می‌باشد. لذا یک تعبیر هندسی از انحنای ریمنی آنست که می‌توان آن را به عنوان وسیله‌ای برای اندازه گیری انحراف منیفلد ریمنی M از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ تصور کرد.

نمادگذاری ۱. *هر گاه $X, Y, Z, V \in \chi M$ باشند، آنگاه به جای عبارت $\langle R(X,Y)Z, V \rangle$ از نماد (X, Y, Z, V) استفاده خواهیم کرد.*