دانشگاه شهید بهشتی
دانشکدهٔ علوم ریاضی ، گروه ریاضی

مدولهای متناهی مولد و دوگان آنها در جبر جابه جایی

پایان نامهٔ کارشناسی ارشد

نگارش
مهناز مستوفی

استاد راهنما
دکتر سیامک یاسمی

۱۳۷۷

بسمه تعالی

تاریخ ....
شماره ....
پیوست ....

صورتجلسه دفاع از پایان نامه

جلسه هیئت داوران ارزیابی پایان‌نامه ~~آقای~~/خانم مهناز مستوفی

به شناسنامه شماره ۵۳۳۶ صادره از تهران متولد ۱۳۵۰

دانشجوی دوره کارشناسی ارشد ناپیوسته رشته ریاضی

باعنوان مدولهای متناهی ـ مولد و دوگان آنها در جبر جا به جایی

به راهنمائی آقای دکتر سیامک یاسمی طبق دعوت قبلی درتاریخ ۷۷/۵/۲۰

تشکیل گردید وبراساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین‌نامه

کارشناسی‌ارشد مورخ ۷۳/۱۰/۲۵ پایان‌نامه مزبور با نمره ۱۷ (هفده)

و درجه مورد تصویب قرارگرفت.

۱- آقای دکتر سیامک یاسمی (استاد راهنما)

۲- " " محمد مهدی ابراهیمی: استاد مشاور)

۳- " " مسعود طوسی (استاد داور)

۴- " " سید علیرضا حسینیون (مدیر گروه ریاضی)

۵-

۲۴۳۵۷

تشکر و قدردانی

در نگارش این رساله از راهنمائی های اساتید بزرگوار و گرامی که ذیلاً نام برده می‌شوند برخوردار گردیده‌ام که بدینوسیله مراتب قدردانی عمیق و سپاس بیکران خویش را بحضور یکایک ایشان تقدیم میدارم.

۱- استاد راهنما آقای دکتر سیامک یاسمی

۲- استاد مشاور آقای دکتر محمد مهدی ابراهیمی

۳- استاد داور آقای دکتر مسعود طوسی

فهرست

پیشگفتار ۲

فصل ۰ (پیشنیاز) ۵

فصل ۱ (مدولهای متناهی – مولد و دوگان آنها مدولهای متناهی – نشانده شده) ۲۹

مدولهای متناهی–نشانده شده ۳۰

روابط بین مدولهای متناهی–مولد و متناهی–نشانده شده ۴۸

فصل ۲ (مدولهای دوری و دوگان آنها مدولهای هم دوری) ۵۱

مدولهای هم دوری ۵۲

فصل ۳ (ایده‌آلهای اول بطور ضعیف وابسته و دوگان آنها

ایده‌آلهای اول بطور ضعیف هم وابسته) ۷۱

مدولهای اولیه ۸۹

مدولهای ثانویه ۸۹

معادل بودن دو تعریف مختلف از ایده‌آلهای اول هم وابسته ۹۳

واژه نامه ۹۷

منابع ۹۹

پیشگفتار

در جبر خطی فضاهای برداری با بعد متناهی دارای خواص جالبی می‌باشند. همانطور که می‌دانیم در یک فضای برداری با بعد متناهی تعداد متناهی عنصر موجود است بطوریکه فضا را تولید کرده و مستقل خطی می‌باشند. این عناصر را پایهٔ آن فضا می‌نامند. در مطالعه مدولها (تعمیمی از فضاهای برداری) ممکن است همواره عناصری به خوبی پایه موجود نباشد. بدین ترتیب بحث در مورد سیستم خاصی از مدولها که آنها را مدولهای متناهی – مولد می‌نامند شروع شد. در این مدولها تعداد متناهی عنصر موجود است که مدول را تولید می‌کند. (به عبارت دیگر هر عنصر از مدول ترکیب خطی این عناصر می‌باشد.) پس از مدت کوتاهی مشخص شد که این دسته از مدولها بخوبی فضاهای برداری با بعد متناهی نمی‌باشند. بطور مثال مدول متناهی –مولد موجود است که دارای زیر مدولی است که متناهی – مولد نمی‌باشد. بنابراین ریاضی دانان به فکر اضافه کردن شرایطی بودند که ضعف فوق بر طرف شود. بطور مثال معرفی مدولهای نوتری از این قبیل می‌باشند. در مدولهای نوتری، هر زیر مدول متناهی – مولد است. در جبر خطی نشان داده شده است که بررسی فضاهای دوگان کمک فراوانی به پیشبرد تحقیقات می‌نماید. لذا طبیعی به نظر می‌رسد که در مطالعه مدولها نیز دوگان مفاهیم بتواند در تحقیقات مدولها کمک نماید. در این مورد دوگانهای زیادی ساخته شده است. از جمله معروفترین آنها مفهوم مدولهای آرتینی می‌باشد که دوگان مناسبی برای مدولهای نوتری هستند. اما در مورد مدولهای

متناهی – مولد و یا مدولهایی که فقط با یک عضو تولید می‌شوند (مدولهای دوری) و دوگان آنها یعنی مدولهای متناهی – نشانده شده و مدولهای هم دوری بحث‌های فراوانی شده است. هدف از نگارش این پایان نامه بحث و بررسی بعضی از این مفاهیم می‌باشد. در فصل صفر، پیشنیازهایی را که در فصول بعدی مورد نیاز است فهرست وار آورده‌ایم تا خوانندگان نیازی به رجوع به کتابهای مختلف نداشته و با زبان این پایان نامه آشنا شوند. در فصل اول، مدولهای متناهی – مولد و دوگان آنها مدولهای متناهی – نشانده شده و ارتباط آنها با یکدیگر و با مدولهای نوتری و آرتینی بررسی شده است. در فصل دوم، حالات خاص مدولهای متناهی – مولد و متناهی – نشانده شده یعنی مدولهای دوری و هم دوری بررسی می‌گردد. و در فصل سوم با توجه به ارتباط ایده‌آلهای اول بطور ضعیف وابسته و ایده‌آلهای اول بطور ضعیف هم وابسته با مدولهای دوری و هم دوری، این ایده‌آلها بیان و بررسی می‌گردد.

توجه شود که در تمامی این پایان نامه، منظور از حلقه یک حلقهٔ جابجایی یکدار نابدیهی می‌باشد. مدولهای نیز همواره مدولهای یکانی هستند.

مهناز مستوفی

۱۳۷۷/۵/۱۸

فصل ۰

پیش نیاز

تعریف . R—مدول M را ساده گوییم هر گاه $M \neq 0$ بوده و تنها زیر مدول سرهٔ M، $\{0\}$ باشد.

— R—مدول M را شبه ساده گوییم هر گاه M بصورت جمع زیر مدولهای ساده نوشته شود.

تعریف . فرض کنید $\{M_i\}_{i\in I}$ مجموعه‌ای از زیر مدولهای M باشد که در شرط $\cdots \subseteq M_{i-1} \subseteq M_i \subseteq M_{i+1} \subseteq \cdots$ $(\star)$ صدق کند. در این صورت رابطهٔ $(\star)$ را یک زنجیر از زیر مدولهای M گوییم.

تعریف . (۱) R—مدول M را نوتری گوییم هر گاه به ازای هر زنجیر دلخواه از زیر مدولهای M مانند $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \cdots$ عدد صحیح و مثبت n موجود باشد که برای هر $i \geq 0$، $M_n = M_{n+i}$.

(۲) R—مدول M را آرتینی گوییم هر گاه به ازای هر زنجیر دلخواه از زیر مدولهای M مانند $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots$ عدد صحیح و مثبت n موجود باشد که برای هر $i \geq 0$، $M_n = M_{n+i}$.

تعریف . حلقهٔ R نوتری (آرتینی) است در صورتیکه R به عنوان R—مدول نوتری (آرتینی) باشد.

تعریف . R–مدول M را متناهی مولد گوییم هرگاه $x_1, \cdots, x_n$ متعلق به M موجود باشد بطوریکه

$$M = Rx_1 + Rx_2 + \cdots + Rx_n$$

تعریف . R–مدول M را دوری گوییم هر گاه عنصر $m \in M$ موجود باشد که

$$M = Rm$$

تعریف . R–مدول E را انژکتیو گوییم در صورتیکه به ازای هر نمودار

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & N \end{tikzcd}$$

همریختی $h : N \longrightarrow E$ به گونه‌ای موجود باشد که

$$h \circ g = f$$

۱.۰ قضیه

(۱).[۵–قضیه ۱.۲۵] اگر $0 \longrightarrow M \longrightarrow M'$ دقیق باشد و N یک R–مدول دلخواه آنگاه رشتهٔ $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(N, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(N, M')$ دقیق است.

(۲).[۵–قضیه ۱.۲۶] اگر $M \longrightarrow M' \longrightarrow 0$ دقیق باشد و N یک R–مدول دلخواه

آنگاه رشتهٔ $\operatorname{Hom}(M, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}(M', N) \longrightarrow 0$ دقیق است.

۰.۲ قضیه. [۵–قضیه ۲.۱] فرض کنید M, M', E, R–مدول باشند در این صورت شرایط زیر هم ارزند:

(۱) E انژکتیو است.

(۲) اگر $M' \longrightarrow M \longrightarrow 0$ دقیق باشد آنگاه

$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, E) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M', E)$ دقیق است

(۳) $\operatorname{Hom}_R(-, E)$ یک تابعگون دقیق است.

۰.۳ قضیه . [۵–قضیه ۴.۱] عبارتهای زیر معادلند

۱ – R یک R–مدول نوتری است.

۲ – هر حاصل جمع مستقیم از مدولهای انژکتیو، انژکتیو است.

تعریف . فرض کنید N یک زیر مدول از R–مدول M باشد در این صورت M را یک توسیع اساسی N گوییم هر گاه برای زیر مدول ناصفر از M مانند M'، $M' \cap N \neq 0$ باشد و یا بطور معادل اگر $M' \cap N = \{0\}$ بود آنگاه $M' = \{0\}$ باشد.

تعریف . R–مدول انژکتیو E را پوشش انژکتیو، R–مدول M گوییم در صورتیکه همریختی یک به یک $\Phi : M \longrightarrow E$ موجود بوده و E یک توسیع اساسی برای $\phi(M)$

باشد. پوشش انژکتیو M را با $\mathrm{E}(M)$ نمایش میدهیم.

تعریف . فرض کنید N یک زیرمدول از R–مدول M باشد در این صورت :

– M را توسیع اساسی ماکزیمال N گوئیم هرگاه M توسیع اساسی N بوده و اگر $M \subset M'$ آنگاه M' توسیع اساسی N نباشد.

– M را توسیع انژکتیو مینیمال N گوئیم هرگاه $N \subseteq M$ و M انژکتیو باشد و اگر $N \subseteq M' \subset M$ آنگاه M' انژکتیو نباشد.

قضیه.[۵–قضیه ۲.۱۹] هر R–مدول دارای توسیع اساسی ماکزیمال است.

قضیه.[۵–قضیه ۲.۲۰] فرض کنید N یک R–مدول بوده و $N \subseteq M$ باشد آنگاه عبارات زیر معادلند :

(۱) M توسیع اساسی انژکتیو N است.

(۲) M توسیع اساسی ماکزیمال N است.

(۳) M توسیع انژکتیو مینیمال N است.

نتیجه. برای هر R–مدول پوشش انژکتیو موجود است.

۴.۰ قضیه. [۵–قضیه ۲.۱۷ و ۲.۲۲ و صفحه ۴۴] فرض کنید

M، $M_1, \cdots, M_n$، R–مدول باشند، در این صورت شرایط زیر برقرار است :

(۱) R–مدول M انژکتیو است اگر وتنها اگر $E(M) = M$

(۲) $E(\oplus_{i=1}^{n} M_i) \cong \oplus_{i=1}^{n} E(M_i)$

(۳) فرض کنید M_1، M_2 دو R–مدولی باشند که $M_1 \cong M_2$ در این صورت $E(M_1) \cong E(M_2)$.

تعریف . ساکل مدول M عبارت از جمع تمام زیر مدولهای ساده M است که در این پایان نامه آنرا با $\mathrm{Soc}(M)$ نمایش می‌دهیم. اگر M هیچ زیر مدول ساده‌ای نداشته باشد $\mathrm{Soc}(M)$ رابرابر صفر می‌گیریم.

تعریف. فرض کنیم S یک زیر مجموعهٔ غیر تهی از حلقهٔ R باشد، S را یک دستگاه بستهٔ ضربی از R گوئیم هر گاه $1_R \in S$ و برای هر $a, b \in S$ داشته باشیم $ab \in S$.

تعریف. مجموعهٔ عناصر پوچ توان R را با علامت $\mathrm{nil}(R)$ نمایش داده آنرا نیل رادیکال R گوئیم.

$$\mathrm{nil}(R) = \{x \in R \mid \exists n \in N, x^n = 0\}$$

تعریف. فرض کنید $x \in R$. پوچساز x را با علامت $\mathrm{Ann}_R(x)$ نمایش داده و

عبارتست از

$$\mathrm{Ann}_R(x) = \{r \in R | rx = 0\}$$

تعریف. فرض کنید M یک R–مدول باشد. زنجیر

$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$ از زیر مدولهای M را یک سری ترکیبی برای M گوئیم در صورتیکه برای هر i، M_i/M_{i-1} یک مدول ساده باشد.

قضیهٔ جردن–هلدر[۴–۷.۳۹]. اگر M دارای یک سری ترکیبی باشد آنگاه تعداد عناصر شرکت کننده در هر دو سری ترکیبی برابر است.

تعریف. اگر M یک R–مدولی باشد که دارای یک سری ترکیبی باشد. مثلاً فرض کنیم سری $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$ یک سری ترکیبی برای M باشد آنگاه طبق قضیهٔ فوق n نسبت به M عدد ثابتی است که آن را طول مدول نامیده و با $l(M)$ نشان می‌دهیم.

۰.۵ قضیه[۴–۷.۳۲] فرض کنید M یک R–مدول ساده باشد آنگاه ایده‌آل ماکسیمال m از R موجود است که $M \cong R/m$

لم زرن [۴–۳.۸] فرض کنیم X یک مجموعهٔ غیر تهی و " $\leq$ " یک رابطهٔ جزئی

مرتب روی X باشد. فرض کنیم برای هر زیر مجموعه غیر تهی کاملاً مرتب T از X، T دارای یک بند بالا در X باشد. آنگاه X دارای لااقل یک عنصر ماکزیمال نسبت به "$\leq$" می‌باشد.

۰.۷ قضیه[۵—قضیه ۱.۱۵]

(۱) R—مدول M نوتری است اگر و فقط اگر هر مجموعهٔ غیر تهی از زیر مدولهای M دارای لااقل یک عضو ماکسیمال باشد.(نسبت به رابطهٔ شمول)

(۲) R—مدول M آرتینی است اگر و فقط اگر هر مجموعهٔ غیر تهی از زیر مدولهای M دارای لااقل یک عنصر می‌نیمال باشد.(نسبت به رابطهٔ شمول)

۰.۸ قضیه[۴—قضیه ۷.۱۳] R—مدول M نوتری است اگر و تنها اگر هر زیر مدول M متناهی—مولد باشد.

۰.۹ قضیه[۴—قضیه ۷.۱۷] فرض کنید N یک زیر مدول از R—مدول M باشد آنگاه

(۱) M نوتری است اگر وتنها اگر $M/N, N$ نوتری باشد.

(۲) M آرتینی است اگر و تنها اگر $M/N, N$ آرتینی باشد.

۰.۱۰ قضیه[۴—نتیجه ۷.۱۹] فرض کنید $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow K \longrightarrow 0$ یک

رشته دقیق از R–مدولها و R–همریختی‌ها باشد آنگاه :

(۱) M نوتری است اگر وتنها اگر K, L نوتری باشند.

(۲) M آرتینی است اگر وتنها اگر K, L آرتینی باشند.

۰.۱۱ قضیه[۴–نتیجه ۷.۲۱] فرض کنید $M_1, \cdots, M_n$، R–مدول باشند آنگاه:

(۱) $\oplus_{i=1}^{n} M_i$ نوتری است اگر وتنها اگر برای هر $i(1 \leq i \leq n)$، M_i نوتری باشد.

(۲) $\oplus_{i=1}^{n} M_i$ آرتینی است اگر وتنها اگر برای هر $i(1 \leq i \leq n)$، M_i آرتینی باشد.

۰.۱۲ قضیه[۴–۷.۳۰] فرض کنید M یک R–مدول باشد. فرض کنیم $m_1, \cdots, m_n \in \operatorname{Max} R$ بطوریکه $m_1 \cdots m_n M = 0$. آنگاه M نوتری است اگر وتنها اگر M آرتینی باشد.

۰.۱۳ قضیه[۳–۳.۴] اگر هر ایده‌آل اول حلقهٔ R متناهی – مولد باشد آنگاه R نوتری است.

۰.۱۴ قضیه[۴–۷.۲] اگر R–مدول M نوتری و $\phi : M \longrightarrow M$ همریختی پوشا باشد آنگاه ϕ یکریختی است.

۰.۱۵ قضیه[۴–۷.۴] اگر M یک R–مدول آرتینی و $\phi : M \longrightarrow M$ همریختی