دانشگاه سیستان و بلوچستان

تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان:

پیوستگی عمل معکوس در گروه‌های پیراتوپولوژیکی و نیم‌گروه‌های توپولوژیکی معکوس

استاد راهنما:

دکتر غلامرضا رضایی

تحقیق و نگارش:

لیلا علیزاده

دی ۱۳۸۸

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا با نیم‌گروه‌های توپولوژیکی، نیم‌توپولوژیکی و گروه‌های پیراتوپولوژیکی و مفاهیمی چند از آن‌ها، آشنا می‌شویم و سپس با بررسی ویژگی‌های نیم‌گروه‌های توپولوژیکی، گروه‌های پیراتوپولوژیکی در پی شرایطی خواهیم بود که اگر یک نیم‌گروه توپولوژیکی یا یک گروه پیراتوپولوژیکی دارای آن‌ها باشد، خود یک گروه توپولوژیکی شود. در ادامه نیم‌گروه‌های توپولوژیکی معکوس را بررسی و در پی شرایطی هستیم که نگاشت معکوس در نیم‌گروه توپولوژیکی معکوس، پیوسته باشد.

واژگان کلیدی: نیم‌گروه‌های توپولوژیکی، گروه‌های پیراتوپولوژیکی، گروه‌های توپولوژیکی، نیم‌گروه‌های توپولوژیکی معکوس، فضای فشرده‌شمارایی، شبه پیوسته، بازی‌های توپولوژیکی، نیم‌گروه‌های توپولوژیکی کلیفورد معکوس.

فهرست مندرجات

تاریخچه

ایده تعریف گروه‌های توپولوژیکی با بررسی گروه‌های پیوسته از تبدیلات، که خواستگاه آن مطالعات کلین[۱] بر هندسه‌ها و گروه‌های تبدیل مرتبط با آن‌ها و همچنین بر نظریه لی[۲] در مورد گروه‌های پیوسته به‌وجود آمده از حل معادلات دیفرانسیل بوده، کلید زده شد. اما گروه‌های توپولوژیکی مجرد برای اولین بار توسط اشریر[۳] در سال ۱۹۲۶ معرفی گردید. در سال‌های پس از آن اهمیت موضوع برای مطالعه در زمینه آنالیز همساز(هارمونیک)، ریاضیدانان را به گسترش مطالعات خود بر روی گروه‌های توپولوژیکی واداشت. همچنین تحقیقاتی بر روی مفاهیم قوی‌تر از گروه‌های توپولوژیکی انجام شد، حال آنکه مدت زیادی از معرفی گروه‌های نیم‌توپولوژیکی و پیراتوپولوژیکی با این نام نمی‌گذرد.
به موازات مطالعات گروه‌های توپولوژیکی، موضوع آنالیز روی نیم‌گروه‌ها با کارهای بور[۴] در سال ۱۹۲۶ روی توابع تقریباً متناوب در خط حقیقی کلید زده شد. تعریف بور از تابع تقریباً متناوب یک تعمیم طبیعی از تابع متناوب است. در سال ۱۹۲۷ بوچنر [۵] یک توصیف تحلیلی از تابع تقریباً متناوب را معرفی کرد. بوچنر و نیومن [۶] در سال ۱۹۳۵ قضیه توابع تقریباً متناوب را روی یک گروه دلخواه توسیع دادند. سپس، ویل [۷] و کامپن [۸] در سال ۱۹۳۶ با استفاده از فشرده‌سازی گروه نشان دادند که قضیه توابع تقریباً متناوب روی گروه گسسته امکان ساده شدن به قضیه توابع پیوسته روی گروه توپولوژیکی فشرده را خواهد داشت.
سپس در سال ۱۹۵۵ کلیفورد[۹] نیم‌گروه‌های معکوس و نیم‌گروه‌های معکوس کلیفورد را تعریف کرد. در همان سال والیس [۱۰] با قرار دادن توپولوژی روی مفاهیم مذکور نیم‌گروه توپولوژیک معکوس و نیم‌گروه‌های

---

[۱] Klein
[۲] Lie's theory
[۳] schreier
[۴] Bohr
[۵] Bochner
[۶] Neumann
[۷] Weil
[۸] Kampen
[۹] Clifford
[۱۰] Wallace

توپولوژیک معکوس کلیفورد و نیم‌گروه معکوس توپولوژیک و نیم‌گروه معکوس کلیفورد توپولوژیک را تعریف کرد. او سعی کرد با قرار دادن خواص توپولوژیکی از مفاهیم اول، دومی را نتیجه بگیرد. کچ[۱۱] و والیس و کرومینگ[۱۲] در سال ۱۹۶۴ ثابت کردند، هر نیم‌گروه توپولوژیک معکوس فشرده، دارای معکوس پیوسته است و یک نیم‌گروه معکوس توپولوژیکی است. بر خلاف گروه‌های پیراتوپولوژیک، قضیه کچ و والیس و کرومینگ را نمی‌توان برای نیم‌گروه‌های توپولوژیک معکوس موضعاً فشرده توسیع داد. همچنین برند[۱۳] در سال ۱۹۸۲ با قرار دادن برخی خواص توپولوژیکی توانست، تعدادی از آنها را ثابت کند. هم اکنون در فصل ۴ تحقیقاتی از گوتیک[۱۴] و باناخ [۱۵] در زمینه شرایطی که باعث پیوستگی معکوس در نیم‌گروه‌های توپولوژیکی معکوس می‌شود ([۱]) آشنا می‌شویم.

این پایان‌نامه شامل چهار فصل است. در فصل اول برخی تعاریف و قضایای اولیه گرد آمده است. در فصل دوم با نیم‌گروه‌های توپولوژیکی، نیم‌توپولوژیکی و گروههای توپولوژیکی و پیراتوپولوژیکی آشنا می‌شویم. در فصل سوم نیم‌گروه‌های توپولوژیکی و گروه‌های پیراتوپولوژیکی را در تقابل با گروه‌های توپولوژیکی قرار می‌دهیم. در پی برخی از شرایط لازم برای پیوستگی نگاشت معکوس هستیم. در فصل آخر، توجه خود را معطوف به نیم‌گروه‌های توپولوژیکی معکوس می کنیم. در این فصل نیز در پی شرایطی هستیم تا نیم‌گروه توپولوژیکی معکوس را به نیم‌گروه معکوس توپولوژیکی تبدیل کنیم. به عبارت دیگر عواملی که باعث پیوستگی نگاشت معکوس می‌شود.

---

[۱۱] Koch
[۱۲] Kruming
[۱۳] Brand
[۱۴] Gutik
[۱۵] Banakh

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱–۱ مقدمه

در این فصل برخی از واژگان، علائم، مفاهیم و قضایایی را که در فصول بعدی به کار خواهیم برد، گرد آورده‌ایم. ابتدا مقدمه‌ای از نظریه نیم‌گروه‌ها، برگرفته شده از کتاب، آنالیز روی نیم‌گروه‌ها نوشته برگلند[۱] و جونگن[۲] و میلنز[۳]([۲]) می‌باشد. برای آشنایی بیشتر با تعاریف و مفاهیم اساسی بیان می‌کنیم. سپس مفاهیم اساسی از توپولوژی را بیان کرده و به اثبات برخی از آنها می‌پردازیم. همچنین لازم به‌ذکر است که مفاهیم توپولوژیکی در این فصل برگرفته شده از کتاب توپولوژی عمومی نوشته انگلکینگ[۴]([٦]) می‌باشد.

۱–۲ نظریه نیم‌گروه‌ها

تعریف ۱.۲.۱: یک نیم‌گروه یک جفت $(S, .)$ می باشد، که در آن S یک مجموعه ناتهی و. یک عمل دوتایی شرکت‌پذیر می‌باشد، به طوریکه $S \longrightarrow S \times S : s.t \longrightarrow (s,t)$ و شرکت‌پذیری در آن یعنی به‌ازای هر $r, s, t \in S$ داشته باشیم:

$$r.(s.t) = (r.s).t.$$

یک نیم‌گروه با یک عنصر را بدیهی می نامند.

عمل روی S معمولاً ضرب نامیده می شود و $s.t$ را ضرب s در t می نامند.

تعریف ۲.۲.۱: برای هر عنصر t از نیم‌گروه S، نگاشت‌های $\rho_t : S \longrightarrow S$ و $\lambda_t : S \longrightarrow S$ را به‌ازای هر $s \in S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho_t(s) = st,$$

---

[۱] Berglund

[۲] Junghenn

[۳] Milnes

[۴] Engelking

$$\lambda_t(s) = ts,$$

که به ترتیب آنها را انتقال راست و انتقال چپ می‌خوانند. همچنین برای زیرمجموعه A از S تعریف می کنیم:

$$\lambda_t(A) = tA;\ \rho_t(A) = At,$$

$$\lambda_t^{-1}(A) = At^{-1};\ \rho_t^{-1}(A) = At^{-1}.$$

تعریف ۳.۲.۱: عناصر s و t در نیم‌گروه S را جابجایی گویند، اگر $st = ts$. مرکز S، $Z(S)$، مجموعه تمام عناصری از S است که با هر عنصر S جابجا می‌شود. S را جابجایی یا آبلی گویند، هر گاه $Z(S) = S$.

تعریف ۴.۲.۱: عنصر e از نیم‌گروه S را همانی راست (همانی چپ) برای S گویند، اگر برای هر $s \in S$ داشته باشیم $se = s$ $(es = s)$. عنصر همانی راست که همانی چپ نیز می‌باشد، همانی است. همانی را با علامت ۱ نشان می‌دهیم. همچنین، اگر نیم‌گروه S، یک همانی راست و یک همانی چپ داشته باشد، آنگاه نیم‌گروه دارای همانی است.
به خصوص، یک نیم‌گروه حداکثر می‌تواند یک همانی داشته باشد. اگر نیم‌گروه S فاقد همانی باشد، نماد جدید ۱ را به S اضافه می‌کنیم و برای هر $s \in S \cup \{1\}$ تعریف می‌کنیم:

$$1s = s1 = s.$$

اگر عمل ضرب نیم‌گروه S برای دوتایی های S باقی بماند، آنگاه $S \cup \{1\}$ یک نیم‌گروه با همانی ۱ است.

تعریف ۵.۲.۱: عنصر z در نیم‌گروه S را صفر راست گویند، اگر برای هر $s \in S$ داشته باشیم، $sz = z$. اگر هر عضو از S صفر راست باشد، آنگاه S را نیم‌گروه صفر راست گویند. صفرچپ و نیم‌گروه صفر چپ نیز به همین صورت تعریف می شوند. صفر راستی که همواره صفر چپ باشد، صفر است. صفرها را معمولاً با 0 نمایش می‌دهند. اگر S یک صفر داشته باشد و برای هر $s, t \in S$ داشته باشیم $st = 0$ ، آنگاه S را نیم‌گروه پوچ گویند.

اگر S تنها یک صفر چپ و یک صفر راست داشته باشد، آنگاه S دارای عنصر صفر است. بنابراین یک نیم‌گروه حداکثر یک صفر دارد.

تعریف ۶.۲.۱: عنصر e از نیم‌گروه S را خودتوان گویند، هر گاه $e^۲ = e$. مجموعه تمام خودتوان‌های S را با $E(S)$ نمایش می‌دهند. اگر $E(S) = S$، آنگاه S را نیم‌گروه خودتوان نامند. نیم‌گروه‌های صفر راست و نیم‌گروه‌های صفر چپ، مثال‌هایی از نیم‌گروه‌های خودتوان هستند.

تعریف ۷.۲.۱: نیم‌گروه خودتوان S را نیم‌شبکه نامند، هرگاه S جابجایی نیز باشد. یک مثال ساده از یک نیم‌شبکه، مجموعه کلاً مرتب با ضرب $xy = \min\{x, y\}$، می‌باشد.

تعریف ۸.۲.۱: فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد و T یک زیر مجموعه ناتهی از S باشد. T را

(۱) یک زیرنیم‌گروه از S گویند، اگر $T^۲ \subset T$، یعنی اگر T با ضرب S، یک نیم‌گروه باشد.

(۲) یک زیرگروه از S است، اگر T با ضرب S یک گروه باشد.

(۳) یک ایده‌ال راست از S است، اگر $ST \subset T$.

(۴) یک ایده‌ال چپ از S است، اگر $TS \subset T$.

(۵) یک ایده‌ال(دو طرفه) از S است، اگر هم ایده‌ال راست و هم ایده‌ال راست باشد.

اگر در تعاریف گفته شده، $T \neq S$ باشد، آنگاه T را محض نامند.

تعریف ۹.۲.۱: فرض کنید e یک خودتوان در نیم‌گروه S باشد، اجتماعی از تمام زیرنیم‌گروه‌های S شامل e را زیرگروه ماکزیمال از S شامل e می‌نامند و آن را با $H(e)$ نمایش می‌دهند. اثبات می‌شود که

$$H(e) = \{t \in eSe : e \in St \cap tS\}.$$

گزاره ۱۰.۲.۱ ([۲]): فرض کنید S یک نیم‌گروه و $e \in E(S)$ باشد، آنگاه $E(e)$ یک زیرگروه از S با همانی e است.

تعریف ۱.۲.۱۱: یک نیم‌گروه S را ساده چپ(ساده راست) گویند، اگر دارای هیچ ایده‌ال محض چپ(راست) نباشد. S ساده است، اگر دارای هیچ ایده‌ال محض دوطرفه نباشد.
نیم گروه صفر چپ با بیش از یک عنصر، یک ساده چپ است.

گزاره ۱.۲.۱۲([۲]): یک نیم‌گروه S ساده چپ (راست) گویند اگر و فقط اگر برای هر $t \in S$ داشته باشیم، $St = S$ $(tS = S)$. S ساده است اگر وفقط اگر برای هر $t \in S$ داشته باشیم $StS = S$.

تعریف ۱.۲.۱۳: نیم‌گروه S را حذف‌پذیر راست(چپ) گویند، اگر به ازای هر $r, s, t \in S$، که $sr = tr$ $(rs = rt)$، آنگاه $s = t$. یک نیم‌گروه S را حذف‌پذیر گویند، اگر هم حذف‌پذیر چپ و هم حذف‌پذیر راست باشد. برای مثال نیم‌گروه صفر چپ، حذف‌پذیر راست است.

گزاره ۱.۲.۱۴([۲]): عبارات زیر در مورد نیم‌گروه S هم‌ارز است:
(۱) S حذف پذیر، ساده و شامل یک خودتوان است.
(۲) S ساده چپ و ساده راست است.
(۳) S ساده چپ و شامل یک همانی چپ است.
(۴) S یک گروه است.

تعریف ۱.۲.۱۵: نگاشت θ، از یک نیم‌گروه S به توی یک نیم‌گروه T را ریخت نامند، اگر به‌ازای هر $s, t \in S$ داشته باشیم

$$\theta(st) = \theta(s)\theta(t).$$

ریخت یک به یک و پوشا را یکریختی گویند.

گزاره ۱.۲.۱۶[۲]: فرض کنید که $\theta : S \longrightarrow T$ یک ریخت از نیم‌گروه S به توی نیم‌گروه T

باشد. آنگاه $\theta(S)$ یک زیرنیم‌گروه از T است. علاوه براین

(۱) اگر A یک ایده‌ال چپ(ایده‌ال راست، ایده‌ال، زیرنیم‌گروه) از S باشد، آنگاه $\theta(A)$ یک ایده‌ال چپ(ایده‌ال راست، ایده‌ال، زیرنیم‌گروه) از $\theta(S)$ است.

(۲) اگر B یک ایده‌ال چپ(ایده‌ال راست، ایده‌ال، زیرنیم‌گروه) از $\theta(S)$ باشد، آنگاه $\theta^{-1}(B)$ یک ایده‌ال چپ(ایده‌ال راست، ایده‌ال، زیرنیم‌گروه) از S است.

تعریف ۱۷.۲.۱: یک رابطه هم‌ارزی R روی یک نیم‌گروه S را همنهشتی نامند، اگر $(s,t)\in R$ و $u\in S$، نتیجه دهد، $(us,ut),(su,tu)\in R$.

مثال ۱۸.۲.۱: هر رابطه هم‌ارزی روی یک نیم‌گروه پوچ، صفر راست، صفر چپ، یک رابطه همنهشتی است.

گزاره ۱۹.۲.۱[۲]: فرض کنید R یک همنهشتی روی نیم‌گروه S باشد. برای هر $s\in S$ فرض کنید $\pi(s)$ نشاندهنده رده هم‌ارزی شامل S باشد. تعریف می‌کنیم:

$$S/R:=\{\pi(s):s\in S\}.$$

اگر ضرب در S/R به صورت زیر تعریف شود:

$$\pi(s)\pi(t)=\pi(st),$$

آنگاه S/R یک نیم‌گروه است و $\pi:S\longrightarrow S/R$ یک ریخت است.

تعریف ۲۰.۲.۱: اگر R یک رابطه همنهشتی روی نیم‌گروه S باشد، آنگاه S/R را با ضرب تعریف شده در گزاره ۱۹.۲.۱، نیم‌گروه خارج‌قسمتی گویند. نگاشت $\pi:S\longrightarrow S/R$ را نگاشت خارج‌قسمتی گویند.

۱—۳ اصول شمارایی

تعریف ۱.۳.۱: فضای X را لیندلوف [۵] گوییم، هرگاه هر پوشش باز X دارای یک زیرپوشش شمارا باشد.

تعریف ۲.۳.۱: فضای X را شمارای نوع اول گوییم، هرگاه هر نقطه آن یک پایه شمارا داشته باشد.

تعریف ۳.۳.۱: فضای X را شمارای نوع دوم گوییم، هرگاه دارای یک پایه شمارا باشد.

۱—۴ مجموعه‌های چگال، هیچ‌جاچگال، فضای بئر

تعریف ۱.۴.۱: فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی باشد.

(۱) مجموعه $Y \subseteq X$ را در X چگال می‌گوییم، هرگاه $\overline{Y} = X$.

(۲) مجموعه $Y \subseteq X$ هم‌چگال در X گفته می‌شود، اگر $X \setminus Y$ در X چگال باشد.

(۳) مجموعه $Y \subseteq X$ را هیچ‌جاچگال در X گوییم، در صورتی که $\overline{Y}$ در X هم‌چگال باشد.

قضیه ۲.۴.۱([۶]): اگر زیرمجموعه Y از فضای توپولوژیکی X، هیچ‌جاچگال در X باشد، آنگاه $Int\ \overline{Y} = \phi$.

قضیه ۳.۴.۱([۶]): اجتماع متناهی از مجموعه‌های هیچ جاچگال، هیچ‌جاچگال است.

تعریف ۴.۴.۱: فضای توپولوژیکی X را فضای بئر[۶] یا فضایی با خاصیت بئر گوییم، هرگاه برای خانواده شمارای $\{A_i\}_{i\in I}$ از زیرمجموعه‌های هیچ‌جاچگال در X، مجموعه $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ یک مجموعه

---

[۵] Lindeloff

[۶] Baire space

هم‌چگال در X باشد. این معادل است با اینکه، برای خانواده شمارای $\{A_i\}_{i\in I}$ از زیرمجموعه‌های باز چگال در X، مجموعه $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ نیز در X چگال باشد.
ثابت می‌شود که هر تصویر پیوسته از یک فضای بئر خود یک فضای بئر می‌باشد.

۱ـ۵ اصول جداسازی

در این بخش در پی آنیم تا پنج اصل جداسازی $T_۰$، $T_۱$، $T_۲$، $T_۳$ و $T_۴$ و همچنین فضای تیخونوف [۷] را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۵.۱: فضای توپولوژیکی X را یک فضای $T_۰$ گوییم، هرگاه برای هر دو نقطه متمایز از آن مجموعه بازی موجود باشد که یک و تنها یکی از آن‌ها را شامل شود.

تعریف ۲.۵.۱: فضای توپولوژیکی X فضای $T_۱$ گفته می‌شود، اگر برای هر دو نقطه متمایز x و y از آن مجموعه بازی همچون U موجود باشد که x را شامل شود، اما y را شامل نباشد.

تعریف ۳.۵.۱: فضای توپولوژیکی X یک فضای $T_۲$ یا هاسدرف[۸] است، هرگاه برای هر دو نقطه متمایز x و y از آن، مجموعه‌های باز U و V موجود باشند که دارای اشتراک تهی هستند و $x \in U$ و $y \in V$.

قضیه ۴.۵.۱([٦]): در فضاهای $T_۲$، حد یکتاست.

تعریف ۵.۵.۱: فضای توپولوژیکی X را منظم گوییم، هرگاه X فضای $T_۱$ باشد و علاوه بر آن، برای $x \in X$ و زیرمجموعه بسته F از X که x را شامل نمی‌شود، زیرمجموعه‌های باز جدا از هم U و

---

[۷] Tychonoff space

[۸] Hausdorff space

V موجود باشند به قسمی که $x \in U$ و $F \subseteq V$.

تعریف ۶.۵.۱: فضای توپولوژیکی X فضای $T_{3\frac{1}{2}}$ یا فضای تیخونوف گفته می‌شود، اگر X فضای T_1 باشد و برای هر $x \in X$ و هر زیرمجموعه بسته $F \subseteq X$ که x را شامل نمی‌شود، تابع پیوسته $f : X \to [0, 1]$ موجود باشد چنان که $f(x) = 0$ و $f(F) = 1$.

تعریف ۷.۵.۱: فضای تیخونوف X را فشرده‌نما گوییم، هرگاه هر تابع حقیقی‌مقدار تعریف شده روی آن کراندار باشد.

تعریف ۸.۵.۱: فضای توپولوژیکی X را نرمال گوییم، هرگاه X فضای T_1 باشد و علاوه بر آن، برای زیرمجموعه‌های بسته جدا از هم F و K از آن، بتوان زیرمجموعه‌های باز جدا از هم U و V را یافت چنان که $F \subseteq U$ و $K \subseteq V$.

۱—۶ همسان‌ریختی‌ها و نگاشت‌های تام

دراین بخش با چندین نگاشت با خاصیت‌های جدید آشنا می‌شویم. همچنین تابع f باز(بسته) است، هر گاه تصویر یک مجموعه باز(بسته)، باز(بسته) باشد.

قضیه ۱.۶.۱: فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیکی باشند و $f : X \longrightarrow Y$ یک تناظر یک‌به‌یک باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) f باز است.

(۲) f بسته است.

(۳) f^{-1} پیوسته است.

تعریف ۲.۶.۱: نگاشت دوسویی پیوسته f که در یکی از شرایط قضیه قبل صدق کند را

یک همسان‌ریختی گوییم.

تعریف ۳.۶.۱: فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیکی باشند. نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را یک نگاشت تام می‌نامیم، هرگاه

(۱) f نگاشتی بسته و پیوسته باشد.

(۲) X هاسدرف باشد.

(۳) برای تمام $y \in Y$، ترازهای $f^{-1}(y)$ زیرمجموعه‌های فشرده از X باشند.

قضیه ۴.۶.۱([۶]): فرض کنید X فضای فشرده و Y هاسدرف باشد. آنگاه نگاشت تصویری $P : X \times Y \longrightarrow Y$ تام است.

۱–۷ خانواده موضعاً متناهی

تعریف ۱.۷.۱: خانواده $\{A_i\}_{i\in I}$ از زیرمجموعه‌های فضای توپولوژیکی X را موضعاً متناهی گوییم، اگر برای هر نقطه $x \in X$ همسایگی باز U از x در X موجود باشد به طوری که مجموعه $\{i \in I \ : \ U \cap A_i \neq \phi\}$ متناهی باشد.

قضیه ۲.۷.۱([۶]): برای هر خانواده موضعاً متناهی $\{A_i\}_{i\in I}$ داریم:

$$\overline{(\cup_{i\in I} A_i)} = \cup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

۱–۸ پیوستگی و نگاشت بسته

قضیه ۱.۸.۱ ([۶]): فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند. آنگاه در مورد نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ گزاره‌های زیر با هم معادلند:

(۱) f نگاشتی پیوسته است.

(۲) تصویر معکوس هر مجموعه باز در Y، مجموعه‌ای باز در X است.

(۳) تصویر معکوس هر مجموعه بسته در Y، مجموعه‌ای بسته در X است.

(۴) به ازای هر $A \subseteq X$ داشته باشیم

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

(۵) به ازای هر $B \subseteq Y$ داشته باشیم

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B}).$$

قضیه ۲.۸.۱ ([۶]): نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ بسته است اگر و فقط اگر برای هر $B \subset Y$ و هر مجموعه باز $A \subset X$ که شامل $f^{-1}(B)$ است، یک مجموعه بازی چون $C \subset Y$، شامل B موجود است به طوریکه $f^{-1}(C) \subset A$.

۱–۹ فضاهای فشرده شمارایی، فشرده نما، فشرده دنباله‌ای

در این بخش با مفاهیمی چون فشرده شمارایی، فشرده نما، فشرده دنباله‌ای و عباراتی معادل با آنها آشنا می‌شویم. با بیان چندین قضیه روابط بین آنها را بیان می کنیم.

تعریف ۱.۹.۱: فضای توپولوژی X را فشرده شمارایی گویند، اگر X یک فضای هاسدرف و هر پوشش باز شمارا از X دارای یک زیرپوشش متناهی باشد.

مثال ۲.۹.۱: هر فضای فشرده، فشرده شمارایی می‌باشد.

قضیه ۳.۹.۱([۶]): فضای توپولوژی X فشرده است اگروفقط اگر X فضای فشرده شمارایی با خاصیت لیندلوف باشد.

قضیه ۴.۹.۱([۶]): فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی، فشرده شمارایی باشد، و U یک زیرمجموعه باز از فضای توپولوژیکی X باشد. اگر $\{F_s\}_{s=۱}^{\infty}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های بسته از X باشد و همچنین داشته باشیم $\bigcap_{s=۱}^{\infty} F_s \subset U$، آنگاه یک مجموعه متناهی $\{s_۱, \cdots, s_k\} \subset S$ موجود است به‌طوریکه

$$\bigcap_{i=۱}^{k} F_{s_i} \subset U.$$

قضیه ۵.۹.۱([۶]): برای هر فضای هاسدرف X شرایط زیر معادلند:

(۱) فضای X فشرده شمارایی است.

(۲) هر خانواده شمارا از زیرمجموعه‌های بسته از X که دارای خاصیت اشتراک متناهی می‌باشند، دارای اشتراک ناتهی باشند.

(۳) برای هر دنباله نزولی $F_۱ \supset F_۲ \supset \cdots$ از زیرمجموعه‌های بسته ناتهی از X اشتراک $\bigcap_{i=۱}^{\infty} F_i$ ناتهی باشد.

قضیه ۶.۹.۱([۶]): برای هر فضای هاسدرف X شرایط زیر معادلند:

(۱) فضای X فشرده شمارایی است.

(۲) هر خانواده موضعاً متناهی از زیرمجموعه‌های ناتهی از X متناهی است.

(۳) هر خانواده موضعاً متناهی از زیرمجموعه تک نقطه‌ای از X متناهی است.

(۴) هر زیرمجموعه نامتناهی از X دارای یک نقطه حدی است.

(۵) هر زیرمجموعه نامتناهی شمارا از X دارای یک نقطه حدی است.

قضیه ۷.۹.۱([۶]): زیرفضای بسته از فضای فشرده شمارایی، فشرده شمارایی است.

قضیه ۸.۹.۱([۶]): اگر $f : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت پیوسته از فضای فشرده شمارایی X به

توی فضای هاسدرف Y باشد، آنگاه Y یک فضای فشرده شمارایی است.

قضیه ۹.۹.۱ ([۶]): هر تابع پیوسته، حقیقی‌مقدار روی یک فضای فشرده شمارایی، بسته و کراندار است.

تعریف ۱۰.۹.۱: فضای توپولوژیکی X را فضای دنباله‌ای گویند، هر گاه مجموعه $A \subset X$ بسته است اگر وفقط اگر برای هر دنباله در A نقاط حدی‌اش نیز در A باشد.

قضیه ۱۱.۹.۱ ([۶]): اگر X فضای فشرده شمارایی باشد و Y فضای دنباله‌ای، به خصوص شمارای نوع اول باشد، آنگاه تابع تصویر $P : X \times Y \longrightarrow Y$ بسته است.

قضیه ۱۲.۹.۱ ([۶]): اگر $f : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت بسته تعریف شده روی فضای هاسدرف X باشد و علاوه بر این تمام ترازهای $f^{-1}(y)$ فشره شمارایی باشند، آنگاه برای هر زیرفضای $Z \subset Y$ تصویر معکوس $f^{-1}(Z)$، فشرده شمارایی است.

قضیه ۱۳.۹.۱ ([۶]): اگر $f : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت تام باشد، آنگاه برای هر خانواده موضعاً متناهی $\{A_i\}$ از زیرمجموعه‌های X، خانواده $\{f(A_i)\}$ در Y موضعاً متناهی هستند.

تعریف ۱۴.۹.۱: فضای توپولوژیکی هاسدرف X را k ـفضا گویند اگر برای هر $A \subset X$، مجموعه A بسته است، در صورتیکه اشتراک A باهر زیرفضای فشرده Z، از فضای X در Z بسته باشد.

مثال ۱۵.۹.۱ هر فضای فشرده، k ـفضا است.

لم ۱۶.۹.۱ ([۶]): فرض کنید $\{A_s \times B_s\}_{s\in S}$، جاییکه $|S| \geq \aleph_0$، یک خانواده موضعاً متناهی از زیرمجموعه‌های ناتهی از ضرب دکارتی $X \times Y$ باشد، جاییکه X فضای هاسدرف و Y یک k ـفضا