بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

عنوان

اعداد تاکسی‌کب و کب تاکسی و خواص آنها در نظریه اعداد

استاد راهنما

دکتر فرضعلی ایزدی

پژوهشگر

سوینج بروزدان

مهر ۱۳۹۲

تقدیم به؛

دو وجود مقدس:

او که ناتوان شد تا من به توانایی برسم ...
... مویهایش سپید شد تا من روسفید شوم

پدرم

مادرم

قدردانی

در اینجا لازم است از کلیه‌ی افرادی که مرا در انجام این پایان نامه کمک نموده‌اند، خصوصاً استاد گرامی جناب آقای دکتر فرضعلی ایزدی که در تمام مراحل انجام این پایان نامه با مساعدت ها و راهنمایی‌های بی‌دریغ خود مرا یاری کردند، تشکر کنم.

سوینج بروزدان

مهر ۱۳۹۲

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان نامه اعداد تاکسی کب و کب تاکسی و برخی از خواص آنها معرفی می شوند و الگوریتمی جهت محاسبه اعداد تاکسی کب جدید و کمینگی آنها ارائه می‌شود و به ارتباط این اعداد با خم های بیضوی و محاسبه رتبه خم بیضوی $y^۲ = x^۳ - ۴۳۲A^۲$ پرداخته می‌شود، که در آن $A = x^۳ + y^۳$. نشان می‌دهیم که معادله دیوفانتی $A = x^۳ + y^۳$ دارای جواب است اگر و فقط اگر خم بیضوی بالا دارای رتبه مثبت باشد.

واژگان کلیدی: اعداد تاکسی کب – کب تاکسی – خم بیضوی – رتبه خم بیضوی

پیشگفتار

فرما ثابت کرده بود که اعدادی که به حالت جمع دوتا مکعب به n روش مختلف نوشته می‌شوند به ازای هر عدد nئی موجودند. اما هنوز پیدا کردن اعداد تاکسی‌کب دقیق از جمله مسائل سخت محاسباتی است.

در این پایان‌نامه ابتدا نگاهی کوتاه به تاریخچه پیدایش اعداد تاکسی‌کب می‌کنیم، سپس در فصل ۱ تعاریف و قضیه‌های مقدماتی لازم برای این اعداد را می‌آوریم. در فصل ۲ با استفاده از مقاله اصلی [۶] روی آن دسته خواص از معادلات دیوفانتی $x^n + y^n = N$ که می‌توانند در جستجوی این اعداد ما را یاری کنند، بحث کرده و الگوریتمی که به ما اجازه محاسبه اعداد تاکسی‌کب جدید را بدهد، معرفی خواهیم کرد. در فصل ۳ به ارتباط معادله $x^3 + y^3 = N$ با خم بیضوی $E(Q) : y^2 = x^3 - 432N^2$، برای مقادیر $(1 \leq N \leq 1050)$ پرداخته و رتبه و زیر گروه تاب خم مذکور را محاسبه خواهیم کرد.

ثابت می‌شود که وجود جواب برای معادله $x^3 + y^3 = N$، معادل با مثبت بودن رتبه خم بیضوی است.

مقدمه و تاریخچه

تاریخچه اعداد تاکسی‌کب به ۳۵۰ سال قبل بر می‌گردد زمانی که فرما به دیگبی چند مساله ریاضی با عنوان‌های زیر فرستاد که دیگبی این مساله‌ها را برای ویلیام برونکر[۱] و جان واکیز[۲] و برنارد فرانکل [۳] فرستاد تا رقابتی برای پیدا کردن جواب مساله‌ها به وجود آید. این مسائل به صورت زیرند:

(۱) دو عدد مکعبی پیدا کنید که جمعشان برابر است با جمع دو عدد مکعب دیگر یا به عبارتی:

$$x^{3} + y^{3} = z^{3} + w^{3}$$

$$x =?, \quad y =?, \quad z =?, \quad w =?$$

(۲) دو عدد مکعبی را بیابید که جمعشان باز مکعب است یا به عبارتی

$$x^{3} + y^{3} = z^{3}$$

[۱] William Brounker

[۲] John Wallis

[۳] Bernard Frenicle

در اکتبر سال ۱۶۵۷ فرانکل اولین جوابهای مساله (۱) را طی نامه ای به جان والیز توسط ویلیام برونکر انتشار داد. این جوابها عبارت بودند از:

$$۱۷۲۹ = ۹^۳ + ۱۰^۳ = ۱^۳ + ۱۲^۳$$

$$۴۱۰۴ = ۹^۳ + ۱۵^۳ = ۲^۳ + ۱۶^۳$$

اندکی بعد در فوریه ۱۶۵۸ فرانکل جوابهای بسیار دیگری در مورد مساله (۱) به دیگبی [۴] بدون هیچ توضیحی در مورد روش حل فرستاد. فرما نیز روی اعدادی که به صورت جمع دو مکعب که قابل بیان به بیش از دو روش مختلف بودند، کار کرد. وی با استفاده از فرمول ویتا[۵] برای حل $x^۳ = y^۳ + z^۳ + w^۳$ ثابت کرد که به ازای هر عدد طبیعی n، عددی موجود است که به صورت جمع دو مکعب به n روش متفاوت نوشته می‌شود و یا به عبارتی برای هر عدد دلخواه طبیعی اعداد تاکسی کب موجود می‌باشند. اما این روش اعداد خیلی بزرگی را به وجود می‌آورد. عدد تاکسی‌کب کوچکترین عدد صحیحی است که به صورت جمع دوتا مکعب صحیح مثبت به n روش مختلف نوشته می‌شود برای مثال داریم:

$$۱۷۲۹ = ۹^۳ + ۱۰^۳ = ۱^۳ + ۱۲^۳$$

عدد کب‌تاکسی کوچکترین عدد صحیحی است که به صورت جمع دوتا مکعب صحیح به n روش مختلف نوشته می‌شود. برای مثال داریم:

$$۹۱ = ۳^۳ + ۴^۳ = ۶^۳ - ۵^۳$$

[۴] Digby

[۵] Viete

ما اکنون می‌دانیم که فرما از قانون جمع روی خم بیضوی استفاده کرده است (قضیه ۴۱۲ از مرجع [۸] را ببینید). با اینکه معادله (۲) حل پذیر است اما جواب‌های آن ناشناخته بود.

معادله $x^n + y^n = z^n$ به وضوح تعمیمی از معادله مسئله ۲ است. عدم وجود جواب برای معادله مذکور به ازای همه اعداد طبیعی n که اکیداً بزرگتر از ۲ هستند، در کار طاقت‌فرسا و قابل تحسین اندرووایلز در سال ۱۹۹۶ ثابت شده است. عدم وجود جواب معادله مساله ۲، که حالت خاص $n = ۳$ از معادله $x^n + y^n = z^n$ است، در نامه‌ای از فرما به دیگبی که در آوریل سال ۱۶۵۸ فرستاده شده بود، بدون اثبات ذکر گردیده است که یک قرن بعد از آن یعنی سال ۱۷۷۰ اثبات آن توسط اویلر تکمیل شد. برای جزئیات بیشتر در مورد تاریخچه مساله ۲ به [۱۳, ۱۱, ۱۰, ۵, ۳, ۲] مراجعه شود.

ما در این پایان نامه تنها روی مساله ۱ کار خواهیم کرد. اویلر [۶] روی این معادله کار کرده بود [۴] اما به نظر می‌رسد ابتدا ادوارد بی‌اسکات[۷] روی آن به عنوان کوچکترین جواب که همان مسأله تاکسی‌کب است در سال ۱۸۹۷ کار کرده باشد. به نظر می‌رسد که فرانکل عدد ۱۷۲۹ را خیلی مدتها قبل پیدا کرده بود. یک جواب کامل تر توسط سی.مورئو[۸] داده شده بود که تمام جوابهای کمتر از ۱۰۰,۰۰۰ را لیست کرده است [۱۴]. سی.ای.بریتون [۹] تمام جوابهای کمتر از ۵,۰۰۰,۰۰۰ را لیست کرده بود که برای جزئیات بیشتر به مقاله [۱] مراجعه شود.

چرا عدد ۱۷۲۹ را یک عدد تاکسی کب می‌نامند؟

[۶] Euler

[۷] Edward B.Escott

[۸] C. Moreav

[۹] C. E. Britton

نگاه کوتاه به ماجرای ریاضیدان هندی سرینیواسا رامانوجان[۱۰] (۱۹۲۰ – ۱۸۸۷) و ریاضی دان انگلیسی هاردی[۱۱](۱۹۴۷ – ۱۸۷۷) که اغلب در کتابهای ریاضی به آن اشاره شده است، دلیل اینکه چرا عدد ۱۷۲۹ را تاکسی کب می‌نامند را برای ما آشکار می‌سازد. این ماجرا از این قرار است که ریاضی‌دان انگلیسی هاردی به عیادت دوستش رامانوجان به بیمارستان می‌رود که سوار یک تاکسی با شماره ۱۷۲۹ شده بود و رامانوجان به هاردی متذکر می‌شود که این عدد کوچکترین عدد ممکن است که به صورت جمع دو تا مکعب به دو روش متفاوت نوشته می‌شود. در واقع با نمادگذاری‌های این پایان‌نامه داریم:

$$\mathrm{taxicab}(2) = 1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

با توجه به اینکه اویلر روی مسئله ۱ قبلاً کار کرده بود، اما رامانوجان روی جواب پارامتری مساله ۱ شروع به کار کرد. برای مثال اگرچه یک فرمول قبلا توسط وربروسو [۱۲] پیدا شده بود[16] اما رامانوجان یک شرط بسیار خوب را پیدا کرد و آن اینکه اگر:

$$m^2 + mn + n^2 = 3a^2b \to (m+ab^2)^3 + (bn+a)^3$$
$$= (bm+a)^3 + (n+ab^2)^3 \quad [13, 10]$$

این معادله تنها مقدار کوچک جوابها را می‌دهد. اگر چه از $m = 3, \quad n = 0, \quad b = 3$ نتیجه می‌شود که $a = +1$، پس داریم

$$12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3 = 1729$$

[۱۰] Srinivasa Ramanujan

[۱۱] G. H. Hardy

[۱۲] Werbrusow

اویلر جواب پارامتری و گویای مساله ۱ را به دست آورده بود اما هاردی و رایت خاطر نشان کرده بودند که مساله پیدا کردن تمام جوابهای صحیح به مراتب سخت‌تر است [۸]. در سال ۱۹۹۸ آجائی چودری [۱۳] مقاله جالبی روی جواب صحیح پارامتری مساله ۱ منتشر کرد. با توجه به اینکه اولین عدد تاکسی کب غیربدیهی $T_۲ = ۱۷۲۹$ به لطف رامانوجان و هاردی به شکل وسیعی شناخته شده بود، اعداد تاکسی کب بعدی نیز تنها به کمک کامپیوتر محاسبه شدند، که می‌توان اعداد زیر را نام برد:

$$T_۳ = ۸۷۵۳۹۳۱۹$$

$$T_۴ = ۶۹۹۶۳۴۷۲۳۰۹۲۴۸$$

$$W_۵ = T_۵ = ۴۸۹۸۸۶۵۹۲۷۶۹۶۲۴۹۶$$

$$R_۶ = ۲۴۱۵۳۳۱۹۵۸۱۲۵۴۳۱۲۰۶۵۳۴۴$$

اعداد تاکسی کب بعدی هنوز ناشناخته‌اند.

برای اطلاعات بیشتر از جدول نتایج اعداد تاکسی کب و کب تاکسی به سایت www.chrisianboyer.com/taxicab/ مراجعه فرمایید.

تاکنون اعداد تاکسی کب تا $n = ۶$ و اعداد کب تاکسی تا $n = ۱۰$ بطور دقیق محاسبه شده‌اند.

[۱۳] Ajai choudhry

در ژانویه – سپتامبر ۲۰۰۶ روابط زیر توسط امیلیانو[۱۴] محاسبه گردید:

$$T_۷ = ۱۳۹^۳ R_۶ \quad / \quad T_۸ = ۷۲۷^۳ T_۷ \quad / \quad T_۹ = ۴۳۲۷^۳ T_۸$$

$$T_{۱۰} = ۳۸۶۲۳^۳ T_۹ \quad / \quad T_{۱۱} = ۴۵۲۹۴^۳ T_{۱۰}$$

در پایان سال ۲۰۰۶ امیلیانو نتایج سی.بویر[۱۵] کسی که برای اولین بار تاکسی‌کب‌های $T_۷ \cdots T_{۱۱}$، کوچکتر را بدست آورده بود، را مطالعه کرد و $T_{۱۲}$ را برای اولین بار در سپتامبر ۲۰۰۶ محاسبه کرد.

در ابتدای سال ۲۰۰۷ امیلیانو $T_{۱۳}, T_{۱۴}$ را نیز محاسبه کرد . ما در این پایان‌نامه ابتدا با گذاشتن یک معادله در یک فرم جدید شروع می‌کنیم و سپس خواص ساده معادله مورد نظر را استخراج می‌کنیم و در پایان یک الگوریتم جدید برای محاسبه اعداد تاکسی کب که ما از آن برای موارد جدید استفاده می‌کنیم ارائه می‌دهیم و در پایان نیز به ارتباط با خم های بیضوی و تعیین رتبه و زیر گروه خم بیضوی می‌پردازیم.

[۱۴] P. Emelyanov

[۱۵] C.Boyer

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ اعداد تاکسی‌کب و کب تاکسی

تعریف ۱.۱.۱. عدد تاکسی‌کب: کوچکترین عدد صحیحی را نشان می‌دهد که می تواند به صورت جمع دو مکعب صحیح مثبت به n روش متفاوت نوشته شود. این عدد را با نماد $Taxicab(n)$ و یا به صورت ساده تر با T_n نشان می دهیم.

مثال ۱.۱.۱.

$$T_۲ = Taxicab(۲) = ۱۷۲۹ = ۱۲^۳ + ۱^۳ = ۱۰^۳ + ۹^۳$$

$$T_۳ = Taxicab(۳) = ۸۷۵۳۹۳۱۹ = ۴۲۳^۳ + ۲۲۸^۳ = ۴۱۴^۳ + ۲۵۵^۳ = ۴۳۶^۳ + ۱۶۷^۳$$

برای مثال‌های بیشتر می‌توان به /www.chrisianboyer.com/taxicab و جدول شماره ۱.۱ مراجعه کرد.

جدول ۱.۱: اعداد تاکسی کب $k = 1$ تا $k = 7$

$T_1 = 2 = 1^3 + 1^3$	
$T_2 = 1729 = 10^3 + 9^3$ $= 12^3 + 1^3$	Bernard Frenicle de Bessy (France)، ۱۶۵۷
$T_3 = 87539319 = 414^3 + 255^3$ $= 167^3 + 436^3$ $= 228^3 + 423^3$	John Leech(UK)، ۱۹۵۷
$T_4 = 6963472309248$ $= 2421^3 + 19083^3$ $= 5436^3 + 18948^3$ $= 10200^3 + 18072^3$ $= 13322^3 + 16630^3$	Edwin Rosenstiel John A. Dardis Colin R.Rosenstiel (UK)،۱۹۸۹
$T_5 = 48988659276962496$ $= 38787^3 + 365757^3$ $= 107839^3 + 362753^3$ $= 205292^3 + 342952^3$ $= 221424^3 + 336588^3$ $= 231518^3 + 331954^3$	John A.Dardis (UK)،۱۹۹۴

$T_{۶} = ۲۴۱۵۳۳۱۹۵۸۱۲۵۴۳۱۲۰۶۵۳۴۴$ $= ۵۸۲۱۶۲^{۳} + ۲۸۹۰۶۲۰۶^{۳}$ $= ۳۰۶۴۱۷۳^{۳} + ۲۸۸۹۴۸۰۳^{۳}$ $= ۸۵۱۹۲۸۱^{۳} + ۲۸۶۵۷۴۸۷^{۳}$ $= ۱۶۲۱۸۰۶۸^{۳} + ۲۷۰۹۳۲۰۸^{۳}$ $= ۱۷۴۹۲۴۹۶^{۳} + ۲۶۵۹۰۴۵۲^{۳}$ $= ۱۸۲۸۹۹۲۲^{۳} + ۲۶۲۲۴۳۶۶^{۳}$	Randall L.Rathbun (US)، July ۲۰۰۲ Uwe Hollerbach (USA)، March ۲۰۰۸ (*)
$T_{۷} \leq ۲۴۸۸۵۱۸۹۳۱۷۸۸۵۸۹۸۹۷۵۲۳۵۹۸۸۵۴۴$	Christian Boyer (France) Dec ۲۰۰۶

توضیح *:$T_{۶}$ توسط راسبون شناخته و توسط هولرباخ ثابت شد.

تعریف ۲.۱.۱. عدد کب تاکسی: کوچکترین عدد صحیحی است که می‌تواند به صورت جمع دو تا مکعب صحیح منفی یا مثبت به n روش متفاوت نوشته شود. این عدد را با نماد $Cabtaxi(n)$ و یا به فرم ساده تر با C_n نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۱.۱.

$$C_{۲} = cabtaxi(۲) = ۹۱ = ۳^{۳} + ۴^{۳} = ۶^{۳} - ۵^{۳}$$

$$C_{۳} = ۷۲۸$$

$$C_{۴} = ۲۷۴۱۲۵۶$$

برای مثال بیشتر و دقیق به جدول شماره ۲.۱ مراجعه کنید.

جدول ۲.۱: اعداد کب‌تاکسی $k = ۲$ تا $k = ۱۱$

$c_۲ = ۹۱ = ۳^۳ + ۴^۳$ $= ۶^۳ - ۵^۳$	Francois Viete (France)؛ Pietro Bongo (Italy) indep ۱۵۹۱
$c_۳ = ۷۲۸ = ۶^۳ + ۸^۳ = ۹^۳ - ۱^۳$ $= ۱۲^۳ - ۱۰^۳$	Edward B. Escott (USA) ۱۹۰۲
$c_۴ = ۲۷۴۱۲۵۶ = ۱۰۸^۳ + ۱۱۴^۳$ $= ۱۴۰^۳ - ۱۴^۳$ $= ۱۶۸^۳ - ۱۲۶^۳$ $= ۲۰۷^۳ - ۱۸۳^۳$	Randall L. Rathbun (USA)،۱۹۹۲
$c_۵ = ۶۰۱۷۱۹۳ = ۱۶۶^۳ + ۱۱۳^۳$ $= ۱۸۰^۳ + ۵۷^۳$ $= ۱۸۵^۳ - ۶۸^۳$ $= ۲۰۹^۳ - ۱۴۶^۳$ $= ۲۴۶^۳ - ۲۰۷^۳$	Randall L. Rathbun (USA)، ۱۹۹۲
$c_۶ = ۱۴۱۲۷۷۴۸۱۱ = ۹۶۳^۳ + ۸۰۴^۳$ $= ۱۱۳۴^۳ - ۳۵۷^۳$ $= ۱۱۵۵^۳ - ۵۰۴^۳$ $= ۱۲۴۶^۳ - ۸۰۵^۳$ $= ۲۱۱۵^۳ - ۲۰۰۴^۳$ $= ۴۷۴۶^۳ - ۴۷۲۵^۳$	Randall L. Rathbun (USA)، ۱۹۹۲

$c_۷ = ۱۱۳۰۲۱۹۸۴۸۸ = ۱۹۲۶^۳ + ۱۶۰۸^۳$ $= ۱۹۳۹^۳ + ۱۵۸۹^۳$ $= ۲۲۶۸^۳ - ۷۱۴^۳$ $= ۲۳۱۰^۳ - ۱۰۰۸^۳$ $= ۲۴۹۲^۳ - ۱۶۱۰^۳$ $= ۴۲۳۰^۳ - ۴۰۰۸^۳$ $= ۹۴۹۲^۳ - ۹۴۵۰^۳$	Randall L. Rathbun (USA)، ۱۹۹۲
$c_۸ = ۱۳۷۵۱۳۸۴۹۰۰۳۴۹۶$ $= ۲۲۹۴۴^۳ + ۵۰۰۵۸^۳$ $= ۳۶۵۴۷^۳ + ۴۴۵۹۷^۳$ $= ۳۶۹۸۴^۳ + ۴۴۲۹۸^۳$ $= ۵۲۱۶۴^۳ - ۱۶۴۲۲^۳$ $= ۵۳۱۳۰^۳ - ۲۳۱۸۴^۳$ $= ۵۷۳۱۶^۳ - ۳۷۰۳۰^۳$ $= ۹۷۲۹۰^۳ - ۹۲۱۸۴^۳$ $= ۲۱۸۳۱۶^۳ - ۲۱۷۳۵۰^۳$	Daniel J. Bernstein (USA)، ۱۹۹۸

$C_{۹} = ۴۲۴۹۱۰۳۹۰۴۸۰۷۹۳۰۰۰$ $= ۶۴۵۲۱۰^{۳} + ۵۳۸۶۸۰^{۳}$ $= ۶۴۹۵۶۵^{۳} + ۵۳۲۳۱۵^{۳}$ $= ۷۵۲۴۰۹^{۳} - ۱۰۱۴۰۹^{۳}$ $= ۷۵۹۷۸۰^{۳} - ۲۳۹۱۹۰^{۳}$ $= ۷۷۳۸۵۰^{۳} - ۳۳۷۶۸۰^{۳}$ $= ۸۳۴۸۲۰^{۳} - ۵۳۹۳۵۰^{۳}$ $= ۱۴۱۷۰۵۰^{۳} - ۱۳۴۲۶۸۰^{۳}$ $= ۳۱۷۹۸۲۰^{۳} - ۳۱۶۵۷۵۰^{۳}$ $= ۵۹۶۰۰۱۰^{۳} - ۵۹۵۶۰۲۰^{۳}$	Duncan moore (VK) Feb. ۲۰۰۵
$c_{۱۰} = ۹۳۳۵۲۸۱۲۷۸۸۶۳۰۲۲۲۱۰۰۰$ $= ۷۷۴۸۰۱۳۰^{۳} - ۷۷۴۲۸۲۶۰^{۳}$ $= ۴۱۳۳۷۶۶۰^{۳} - ۴۱۱۵۴۷۵۰^{۳}$ $= ۱۸۴۲۱۶۵۰^{۳} - ۱۷۴۵۴۸۴۰^{۳}$ $= ۱۰۸۵۲۲۶۶۰^{۳} - ۷۰۱۱۵۵۰^{۳}$ $= ۱۰۰۶۰۰۵۰^{۳} - ۴۳۸۹۸۴۰^{۳}$ $= ۹۸۷۷۱۴۰^{۳} - ۳۱۰۹۴۷۰^{۳}$ $= ۹۷۷۳۳۳۰^{۳} - ۸۴۵۶۰^{۳}$ $= ۸۴۴۴۳۴۵^{۳} + ۶۹۲۰۰۹۵^{۳}$ $= ۸۳۸۷۷۳۰^{۳} + ۷۰۰۲۸۴۰^{۳}$ $= ۹۷۸۱۳۱۷^{۳} - ۱۳۱۸۳۱۷^{۳}$	Christian Boyer (France)، Dec ۲۰۰۶ Uwe Hollerbach (USA)، May ۲۰۰۸ (*)
$c_{۱۱} \leq ۲۶۱۸۵۸۳۹۸۰۹۸۵۴۵۳۷۲۲۴۹۲۱۶$	Duncan Moore،March ۲۰۰۶

توضیح *: $c_{۱۰}$ توسط بویر ابتدامعرفی شده است و سپس توسط هولرباخ ثابت شد.