دانشکده علوم پایه

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

عنوان

آشوب‌های منفرد برای مسائل مقدار مرزی چند نقطه‌ای غیرخطی مرتبه سوم

نگارش

داوود دیانتی فرد

استاد راهنما

دکتر باقر کرامتی

استاد مشاور

دکتر رضا معمار باشی

بهمن ۱۳۸۸

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

قدردانی

محبوب من کلامم را با تو آغاز می کنم با تو که کران بالای رحمتی ،آغاز با نام حق برتر است و اگر دنبال شد به پایان خواهد رسید. شکر وسپاس خدای را که به انسان نعمت تفکر و قدرت اندیشه را عطا نمود تا بر اساس آن از فقر تا رفاه واز جهل تا کمال دانش و معنویت گام بر دارد. سپاس خداوند یکتا را که فرصتی بخشید تا من بتوانم خویشتن را در صف سربازان اعتلای دانش و فرهنگ این مرز و بوم کهن قرار دهم چرا که برای من تلاش در عرصهٔ دانش و فرهنگ وعرصهٔ آخرین دستاوردهای علمی،افتخاری بس عظیم محسوب می شود. لازم است در ابتدا ازتمام کسانی که مرا در نوشتن این پایان نامه کمک نموده‌اند، خصوصاً استاد ارجمند جناب آقای دکترباقر کرامتی که در تمام این مدت با صبر و شکیبایی ایشان توانستم از تجربیات‌شان بهره مند شوم ودکتر رضا معمار باشی و دکتر مجید اسحاقی گرجی به خاطر راهنمایی های مفیدشان و دیگرعزیزانی که در مراحل مختلف انجام این پایان نامه با مساعدتها و راهنمایی های بی‌دریغ خود مرا یاری کردند، تشکر کنم.باری تلاش من همیشه‌براین بوده که شایستگی توجه و محبت ادب اساتید ودوستان و توان به انجام رساندن وظیفه ای را که بر عهده گرفته ام را داشته باشم ، پس با خرسندی از آنچه که توانسته‌ام و پوزش از آنچه نتوانسته‌ام.

تقدیم به :

مادر

و

دستان پر مهرش

چکیده

در این پایان نامه هدف ما بررسی وجود و یکتایی جواب و تخمین مجانبی و بدست آوردن یک جواب برای مسائل مقدار مرزی غیرخطی مرتبه سوم با استفاده از شرایط نیگومو ، جواب‌های بالا و پایین و تکنیک نا معادلات دیفرانسیل‌پذیر می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: مسائل مقدار مرزی مرتبه سوم ؛ شرایط نیگومو ؛ جواب‌های بالا و پایین ؛ آشوب‌های منفرد ؛ وجود و یکتایی ؛ تخمین مجانی

مقدمه

از بیش از سه دهه گذشته ریاضیدانان و اساتید زیادی همچون وانگ [1]، هووز [2] ،نیگومو [3] و غیره در زمینهٔ مسائل مقدار مرزی، با تحقیق و پژوهش مطالعات گسترده‌ای را داشته‌اند تا جایی که کتاب‌ها و مقالات زیادی در این زمینه‌ارایه شده است. و همچنان این موضوع مورد توجه می‌باشد.
این مسائل در زمینهٔ های مختلف همچون دینامیک، شیمی کاربردی، جریان اتمسفر و غیره کاربردهای فراوانی دارند.
ما در این پایان نامه به بررسی چند دسته از این مسائل می پردازیم.

پایان نامه حاضر در چهار فصل تهیه و تنظیم شده است که شرح مختصری از هر فصل را در زیر بیان می‌کنیم:

فصل اول در فصل اول به معرفی مفاهیم و قضایای مورد نیاز پرداخته‌ایم. مراجع اصلی استفاده شده در این فصل، [۱۸] ، [۲۶] ، [۲۷] ، [۲۸] ، [۲۹] و [۳۰] می‌باشند.

فصل دوم در فصل دوم به بررسی وجود جواب برای مسالهٔ مقدار مرزی زیر می پردازیم

$$x'''(t) + f(t, x(t), x'(t), x''(t)) = 0 \quad , \quad 0 < t < 1$$

$$x(0) = 0, \quad g(x'(0), x''(0)) = A, \quad h(x'(1), x''(1)) = B,$$

که در آن Aو$B \in R$ ، $f : [0, 1] \times R^3 \longrightarrow R$ و $g, h : R^2 \longrightarrow R$ پیوسته باشند. این فصل شامل سه بخش است. در بخش اول مقدمه‌ای بیان می کنیم. در بخش دوم وجود جواب برای این مساله را اثبات می کنیم. در بخش سوم دو مثال ارائه می دهیم. مراجع اصلی استفاده شده در این فصل، [۷] و [۱۳] می‌باشند.

فصل سوم در فصل سوم مشابه فصل دوم به بررسی دسته‌ای از مسائل مقدا مرزی چند نقطه‌ای غیرخطی مرتبه سوم می پردازیم. که این فصل نیز سه بخش دارد. مرجع اصلی استفاده شده در این فصل، [۶] می باشد.

---

[1] $G.Wange$
[2] $F.A.Howes$
[3] $Nagumo$

فصل چهارم   در فصل چهارم در ادامهٔ فصل سوم به بررسی وجود، یکتایی و تخمین مجانبی از جواب برای مسالهٔ مقدار مرزی چند نقطه‌ای غیرخطی آشوبی منفرد زیر می پردازیم

$$\varepsilon x'''(t) + f(t, x(t), x'(t), x''(t), \varepsilon) = ۰ \quad , \quad ۰ \ \leq \ t \ \leq \ ۱ \quad , \quad ۰ < \varepsilon << ۱$$

$$\begin{cases} x(۰, \varepsilon) = ۰, \\ ax'(۰, \varepsilon) - bx''(۰, \varepsilon) + \sum_{i=۱}^{n-۲} \alpha_i x(\zeta_i, \varepsilon) = A, \\ cx'(۱, \varepsilon) + dx''(۱.\varepsilon) + \sum_{i=۱}^{n-۲} \beta_i x(\eta_i, \varepsilon) = B, \end{cases}$$

که در آن

$$\begin{cases} a, b, c, d \geq ۰ \\ A, B \in R \\ a + b > ۰ \ , \ c + d > ۰ \\ \alpha_i \leq \ , \ \ \beta_i \leq ۰ \quad , \quad i = ۱, ۲, ۳, ..., n - ۲ \\ ۰ < \zeta_۱ < \zeta_۲ < ... < \zeta_n - ۲ < ۱ \ \ , \ \ ۰ < \eta_۱ < \eta_۲ < ... < \eta_n - ۲ < ۱ \end{cases}$$

این فصل شامل چهار بخش می باشد. در بخش اول مقدمه‌ای بیان می شود و در بخش دوم به اثبات وجود، یکتایی و تخمین مجانبی از جواب برای این مساله می پردازیم و در بخش سوم یک مثال بررسی می شود و در بخش چهارم نتایج عددی مثال بخش قبل ارائه وکارائی و قابلیت روش بکار رفته آشکار می گردد. مرجع اصلی استفاده شده در این فصل، [٦] می باشد.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل با تعاریف و قضایای مورد نیاز آشنا خواهیم شد

۱.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم E یک فضای برداری حقیقی یا مختلط باشد. یک نرم روی E نگاشتی مانند $||\cdot|| : E \longrightarrow R$ است که در شرایط زیر صدق می کند.

$$(i).||x|| \geq \circ \quad ,||x|| = \circ \iff x = \circ$$

$$(ii).||\lambda x|| = |\lambda|||x||, \quad \forall x \in E, \quad \forall \lambda \in R$$

$$(iii).||x+y|| \leq ||x|| + ||y||, \quad \forall x, y \in E$$

فضای نرم دار، زوج $(E \ , \ ||\cdot||)$ است که در آن E فضای برداری حقیقی و$||\cdot||$ یک نرم روی E است.

تعریف ۲.۱.۱ نرم دلخواه x را در یک فضای ضرب داخلی با $(x.x)^{\frac{1}{p}}$ تعریف، و با $||x||_p$ نشان می دهیم. به عنوان مثال برای $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in C^n$

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

به‌عنوان مثال برای $p = 2$ و $p = \infty$ می توان نوشت

$$\begin{aligned} ||x||_2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ ||x||_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \end{aligned}$$

و برای $f \in C[a,b]$ با ضرب داخلی $(f,g) = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)dx$ داریم:

$$||x||_p = \left\{\int_a^b |f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

مثلاً برای $P = 2$ و $p = \infty$ داریم

$$\begin{aligned} ||x||_2 &= \left\{\int_a^b |f(x)|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \\ ||X||_\infty &= \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| \end{aligned}$$

تذکر ۳.۱.۱ می توان نشان داد $||x||_2$ و $||x||_\infty$ در رابطهٔ زیر صدق می کنند.

$$||x||_\infty \leq ||x||_2$$

تعریف ۴.۱.۱ ضرب داخلی روی فضای مختلط برداری V ، نگاشتی است به صورت زیر

$$(\cdot,\cdot) : V \cdot V \longrightarrow \mathbb{C}$$

بطوریکه به ازای هر x، y و z و هر λ متعلق به $\mathbb{C}$ رابطه های زیر برقرار باشند:

$$(i) : (x,x) > 0 \;\; ; (x \neq 0) \quad , \quad (ii) : (\lambda x, y) = \lambda(x,y)$$

$$(iii) : (x+y,z) = (x,z)+(y,z) \quad , \quad (iv) : (x,y) = \overline{(y,x)}$$

تعریف ۵.۱.۱ فضای ضرب داخلی، زوج $(V,(\cdot,\cdot))$ است که در آن V یک فضای برداری مختلط و $(\cdot,\cdot)$ یک ضرب داخلی روی V است.

تعریف ۶.۱.۱ $C[0,1]$ فضای تمام توابع پیوسته بر بازهٔ $[0,1]$ می باشد.

تعریف ۷.۱.۱ $C^n[0,1]$ فضای تمام توابع پیوستهٔ مشتق پذیر از مرتبه n می باشد که مشتق مرتبه n ام آنها پیوسته و کراندار می باشد.

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنیم E و F فضاهای برداری روی میدان K باشند. یک عملگر خطی از E به F، نگاشتی مانند

$$T: \; E \longrightarrow F$$

است به گونه‌ای که به ازای هر λ در K و هر y و x از E داشته باشیم:

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$$

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنیم E و F دو فضای نرمدار باشند. عملگر خطی $T : E \longrightarrow F$ را کراندار گوییم، هر گاه $M > 0$ وجود داشته باشد بطوریکه به ازای هر $x \in E$ داشته باشیم

$$||T|| = \sup\{||Tx||; x \in E, ||x|| \leq 1\}$$

تعریف ۱۰.۱.۱ عملگر خطی T از V در W، معکوس پذیر نامیده می شود، هرگاه یک عملگر خطی U از W در V یافت شود به طوری که UT تابعی همانی روی V و TU یک تابع همانی روی W باشد. اگر T معکوس پذیر باشد، تابع U یکتا و با T^{-1} نشان داده می شود. بعلاوه T معکوس پذیر است اگر وتنها اگر

الف) T یک به یک باشد؛ یعنی از $T\alpha = T\beta$ نتیجه شود $\alpha = \beta$ ؛

ب) T پوشا باشد؛ یعنی برد T (تمام) W باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنیم S یک فضای متری باشد. گوییم دنباله ی x_k در S کشی است هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$، عدد صحیح n_0 موجود باشد بطوریکه اگر $m > n \geq n_0$ آنگاه

$$d(x_m , x_n) < \epsilon$$

تعریف ۱۲.۱.۱ فضای متری (S, d) را کامل گویند هر گاه هر دنباله کشی در S همگرا باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱ فضای هیلبرت یک فضای ضرب داخلی است که نسبت به متر تعریف شده توسط ضرب داخلی خود، یک فضای متری کامل باشد. فضای هیلبرت را با H نشان می دهیم.

نکته ۱۴.۱.۱ فرض کنیم f تابعی پیوسته باشد و $a \geq 0$ باشد. اگر

$$\int_a^c f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$$

آنگاه $c \leq b$.

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای نرم دار باشند، $T : X \longrightarrow Y$ را عملگر خطی فشرده (یا عملگر خطی به طور کامل پیوسته) می نامیم اگر T خطی باشد وبرای هر زیر مجموعه کراندار M از X، تصویر $T(M)$ نسبتاً فشرده باشد، یعنی اینکه $\bar{T}(M)$ فشرده باشد.

لم ۱۶.۱.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای نرم دار باشند آنگاه:
الف) هر عملگر فشردهٔ $T : X \longrightarrow Y$ کراندا و پیوسته است.
ب) اگر $\dim T = \infty$،آنکاه عملگر همانی $I : X \longrightarrow X$ (که پیوسته است) فشرده نخواهد بود.
برهان: لم ۸.۱.۲ از [۱۸]. □

نکته ۱۷.۱.۱ در فضای هیلبرت، کرانداری یک عملگر با پیوستگی آن یکسان است.

قضیه ۱۸.۱.۱ هرگاه α، β و γ ریشه های حقیقی معادلهٔ درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ باشند روابط زیر که به روابط ویت معروف است ، بین ضرایب و ریشه های معادله برقرار است.

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}\ ,\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a}\ ,\ \alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$$

برهان: [۳۰]. □

تعریف ۱۹.۱.۱ به هر معادلهٔ درجهٔ سوم به شکل $X^3 + pX + q = 0$ یک معادلهٔ درجه سوم ناقص گویند.

تذکر ۲۰.۱.۱ معادلهٔ درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d =$ را در نظر می گیریم، تغیرمتغیر $x = X - \frac{b}{3a}$ را بر این معادله اعمال می کنیم، در این صورت به معادلهٔ $X^3 + pX + q = 0$ می رسیم که در آن p و q بر حسب a، b، c و d می باشند.

قضیه ۲۱.۱.۱ معادلهٔ درجه سوم ناقص $X^۳ + pX + q = ۰$ را در نظر بگیرید و قرار بدهید $\Delta = ۴P^۳ + ۲۷q^۲$ (Δ را مبین معادله می نامند). احکام زیر برقرارند:

الف) اگر $\Delta > ۰$ معادله فقط یک ریشه حقیقی دارد؛ اگر $q > ۰$ آن ریشه منفی، واگر $q < ۰$ آن ریشه مثبت است، واگر $q = ۰$ آن ریشه صفر است.

ب) اگر $\Delta = ۰$، معادله یک ریشه ساده و یک ریشه مضاعف دارد؛ که اگر $q > ۰$ ریشهٔ مضاعف مثبت و ریشهٔ ساده منفی، و اگر $q < ۰$ ریشهٔ مضاعف منفی و ریشهٔ ساده مثبت است، اگر $q = ۰$ لزوماً $p = ۰$ و لذا معادله ریشهٔ سه گانه صفر دارد.

ج) اگر $\Delta < ۰$ ، معادله سه ریشه حقیقی دارد؛ اگر $q > ۰$ دو ریشه مثبت و یک ریشه منفی، و اگر $q < ۰$ دو ریشه منفی و یک ریشه مثبت است، اگر $q = ۰$ یک ریشه صفر و دو ریشه قرینه اند.

برهان: [۳۰]. □

قضیه ۲۲.۱.۱ اگر معادلهٔ درجه سوم $x^۳ + px + q = ۰$ سه ریشهٔ حقیقی داشته باشد ($\Delta < ۰$)، ریشه های معادله از دستور $x = h \cos \alpha x$ به دست می آیند، که در آن

$$h = ۲\sqrt{\frac{-p}{۳}} \quad , \quad \cos ۳\alpha = \frac{۳q}{۳p\sqrt{\frac{-p}{۳}}}$$

برهان: [۳۰]. □

فصل ۲

خلاصه‌ای از مسائل مقدار مرزی غیرخطی مرتبه سوم

۱.۲ مقدمه

در این فصل وجود جواب برای مسالهٔ مقدار مرزی غیرخطی به شکل زیر، بررسی می گردد:

$$x'''(t) + f(t, x(t), x'(t), x''(t)) = 0 \quad , \quad 0 < t < 1 \tag{۱.۲}$$

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ g(x'(0), x''(0)) = A, \\ h(x'(1), x''(1)) = B, \end{cases} \tag{۲.۲}$$

که در آن $A \in R$ و B، $f : [0, 1] \times R^3 \longrightarrow R$ و $g, h : R^2 \longrightarrow R$ پیوسته باشند.
در سالهای اخیر مقالاتی در خصوص مسائل مقدار مرزی مرتبه سوم ارائه گردیده است که به عنوان مثال می توانید به [۲۳، ۱۹، ۱۷، ۱۳، ۴، ۳، ۲] مراجعه نمائید، البته شرایط مرزی مراجع ذکر شده همه خطی هستند واشاره ای به مسائل غیر خطی نشده است.

رودروا [1] در [۲۰] وجود جواب را برای مسالهٔ مقدار مرزی زیر به اثبات رسانده است

$$y''' = f(t, y, y', y'') = ۰ \quad , \quad ۰ < t < ۱$$

$$\begin{cases} y(۰) = A, \\ y''(۰) = \sigma(y'(۰)), \\ y'(۱) = \tau(y(\tau)), \end{cases}$$

که f ، $\frac{\partial f}{\partial y}$، $\frac{\partial f}{\partial y'}$ و $\frac{\partial f}{\partial y''}$ توابعی پیوسته بر $[o, ۱] \times R^۳$ می باشند و

$$\tau(v) \in C(R, R) \quad , \quad \sigma(v) \in C^۱(R, R)$$

در این مقاله به چگونگی وجود جواب برای مسالهٔ مقدار مرزی (۱.۲)—(۲.۲)، با شرط پیوسته و صعودی بودن $f(t, x, y, z)$ روی $[۰, ۱] \times R^۳$ پی می بریم. این شرط به همراه محدودیتی روی f، شرط ضعیفتری از شرط داده شده در [۲۰] است. در این مقاله همچنین نتیجه [۱۳] را که مسائل مقدار مرزی مرتبه سوم با شرایط مجزای خطی را مورد مطالعه قرار می دهد و توسط گروسنیهو [2] و مینیهوس [3] ارائه شده ، توسعه می دهیم . ابزار اصلی که در این فصل مورد استفاده قرار داده ایم، جواب‌های بالا و شرایط نیگومو هستند.

۲.۲ اثبات وجود جواب برای مسالهٔ مقدار مرزی غیرخطی مرتبه سوم

در این بخش ابتدا چند تعریف و یک لم مهم را بیان و سپس به قضیه اصلی می پردازیم.

تعریف ۱.۲.۲ تابع $\alpha(t) \in C^۳[۰, ۱]$ یک جواب پایین از مسالهٔ مقدار مرزی (۱.۲)—(۲.۲) است، اگر در شرایط زیر صدق کند

$$\alpha'''(t) + f(t, \alpha(t), \alpha'(t), \alpha''(t)) \geq ۰ \qquad (۳.۲)$$

$$\begin{cases} \alpha(۰) = ۰, & (۴.۲) \\ g(\alpha'(۰), \alpha''(۰)) \leq A, & (۵.۲) \\ h(\alpha'(۱), \alpha''(۱)) \leq B & (۶.۲) \end{cases}$$

[1] $Rovderova$
[2] $Grossniho$
[3] $Minhos$

تعریف ۲.۲.۲ تابع $\beta(t) \in C^{3}[0,1]$ یک جواب بالا از مسالهٔ مقدار مرزی (۱.۲)—(۲.۲) است، اگر در شرایط زیر صدق کند

$$\beta'''(t) + f(t, \beta(t), \beta'(t), \beta''(t)) \leq 0 \qquad (۷.۲)$$

$$\begin{cases} \beta(0) = 0, & (۸.۲) \\ g(\beta'(0), \beta''(0)) \geq A, & (۹.۲) \\ h(\beta'(1), \beta''(1)) \geq B & (۱۰.۲) \end{cases}$$

تعریف ۳.۲.۲ فرض کنید D زیر مجموعه ای از $[0,1] \times R^{3}$ باشد. می گوییم که تابع $f(t,x,y,z)$ در شرایط نیگومو در D صدق می کند اگر f پیوسته باشد و برای $a > 0$ یک تابع مثبت مانند $\phi : [0,\infty) \longrightarrow [a,\infty)$ به ازای هر $(t,x,y,z) \in D$ دلخواه، وجود داشته باشد بطوریکه

$$|f(t,x,y,z)| \leq \phi(|z|) \qquad (۱۱.۲)$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{s}{\phi(s)} ds = +\infty \qquad (۱۲.۲)$$

لم ۴.۲.۲ فرض کنیم $f(t,x,y,z) : [0,1] \times R^{3} \longrightarrow R$ تابعی پیوسته باشد که در شرایط نیگومو در ناحیه D به شکل زیر صدق نماید

$$D = \{(t,x,y,z) \in [0,1] \times R^{3} : \Gamma_{1}(t) \leq x \leq \Gamma_{2}(t) \ , \ \Upsilon_{1}(t) \leq y \leq \Upsilon_{2}(t)\}$$

که در آن $\Gamma_{1}, \Gamma_{2}, \Upsilon_{1}, \Upsilon_{2} : [0.1] \longrightarrow R$ توابعی پیوسته و در شرایط $\Gamma_{1}(t) \leq \Gamma_{2}(t)$ و$\Upsilon_{1}(t) \leq \Upsilon_{2}(t)$ برای هر $t \in [0,1]$ صدق نماید، آنگاه ثابتی مانند $r > 0$ (که تنها به $\Upsilon_{1}, \Upsilon_{2}, \phi$ وابسطه است) وجود دارد بطوریکه برای هر جواب $x(t)$ از مسالهٔ مقدار مرزی (۱.۲)—(۲.۲) که برای آن داشته باشیم

$$\Gamma_{1}(t) \leq x(t) \leq \Gamma_{2}(t) \quad , \quad \Upsilon_{1}(t) \leq x'(t) \leq \Upsilon_{2}(t) \quad , \quad t \in [0,1]$$

در رابطهٔ زیر صدق می کند

$$||x''||_\infty \leq r \tag{۱۳.۲}$$

برهان: :عدد غیر منفی η را بشکل زیر در نظر می گیریم

$$\eta = \max\{\Upsilon_۲(۱) - \Upsilon_۱(۰) \ \ , \ \ \Upsilon_۲(۰) - \Upsilon_۱(۱)\} \tag{۱۴.۲}$$

$r > ۰$ را طوری در نظر می گیریم که داشته باشیم

$$\int_\eta^r \frac{s}{\phi(s)} ds \geq \max_{t\in[۰,۱]} \Upsilon_۲(t) - \min_{t\in[۰,۱]} \Upsilon_۱(t) \tag{۱۵.۲}$$

فرض کنیم $\bar{x}(t)$ جوابی از مسالهٔ مقدار مرزی (۱.۲)—(۲.۲) باشد که برای هر $t \in [۰,۱]$ در رابطه های زیر صدق کند

$$\Gamma_۱(t) \leq \bar{x}(t) \leq \Gamma_۲(t) \tag{۱۶.۲}$$

$$\Upsilon_۱(t) \leq \bar{x}'(t) \leq \Upsilon_۲(t) \tag{۱۷.۲}$$

اکنون برای اثبات از برهان خلف استفاده می نمائیم
فرض کنیم برای هر $t \in [۰,۱]$، $|\bar{x}''(t)| > \eta$ در اینجا دو حالت وجود دارد
حالت اول : برای هر $t \in [۰,۱]$، $\bar{x}''(t) > \eta$.
حالت دوم : برای هر $t \in [۰,۱]$، $\bar{x}''(t) < -\eta$.
از رابطه (۱۷.۲) داریم:

$$\Upsilon_۲(۱) \geq \bar{x}'(۱) \tag{۱۸.۲}$$

$$-\Upsilon_۱(۰) \geq -\bar{x}'(۰) \tag{۱۹.۲}$$

با جمع کردن دو طرف رابطه های (۱۸.۲) و (۱۹.۲) خواهیم داشت:

$$\Upsilon_۲(۱) - \Upsilon_۱(۰) \geq \bar{x}'(۱) - \bar{x}'(۰) \tag{۲۰.۲}$$

$$\int_۰^۱ \bar{x}''(t)dt > \int_۰^۱ \eta dt \geq \Upsilon_۲(۱) - \Upsilon_۱(۰)$$

که تناقضی آشکار است. در حالت دوم بطور مشابه نیز از رابطهٔ (۱۷.۲) داریم:

$$\Upsilon_{۲}(\circ) \geq \bar{x}'(\circ) \qquad (۲۱.۲)$$

$$-\Upsilon_{۱}(۱) \geq -\bar{x}'(۱) \qquad (۲۲.۲)$$

با جمع کردن رابطه های (۲۱.۲) و (۲۲.۲) داریم

$$\Upsilon_{۲}(\circ) - \Upsilon_{۱}(۱) \geq \bar{x}'(\circ) - \bar{x}'(۱) \qquad (۲۳.۲)$$

$$\int_{\circ}^{۱} -\bar{x}''(t)dt > \int_{\circ}^{۱} \eta dt \geq \Upsilon_{۲}(\circ) - \Upsilon_{۱}(۱)$$

$\int_{\circ}^{۱} \eta dt \geq \Upsilon_{۲}(\circ) - \Upsilon_{۱}(۱)$

و این نیز تناقضی آشکار است.
به این ترتیب نتیجه می گیریم که $t \in [\circ, ۱]$ وجود دارد که برای آن $|\bar{x}''(t)| \leq \eta$. اگر برای هر $t \in [\circ, ۱]$، $|\bar{x}''(t)| \leq \eta$، جهت اثبات لم کافی است $r := \eta$ قرار دهیم ، و اثبات کامل می شود. بنابراین فرض می کنیم که برای بعضی از t های که $t \in [\circ, ۱]$ ، $|\bar{x}''(t)| > \eta$. در اینجا نیز دو حالت A, B داریم.
حالت A: $t \in [\circ, ۱]$ وجود دارد که $\bar{x}''(t) > \eta$.
حالت B: $t \in [\circ, ۱]$ وخود دارد که $\bar{x}''(t) < -\eta$.
برای حالت A بازهٔ I رابه صورت زیر تعریف می کنیم $I = [t_{\circ}, t_{۱}]$ یا $I = [t_{۱}, t_{\circ}]$ بطوریکه برای هر $t \in I$، $\bar{x}''(t) \geq \circ$، $\bar{x}''(t_{\circ}) = \eta$ و $\bar{x}''(t) > \eta$ برای هر $t \in I \setminus \{t_{\circ}\}$. برای اثبات حالت A به شرح زیر عمل می نمائیم :
با تغیر متغیر مناسب و با توجه به روابط (۱۱.۲) و (۱۴.۲) می توان نوشت

$$\begin{aligned}
\int_{\bar{x}''(t_{\circ})}^{\bar{x}''(t_{۱})} \frac{s}{\phi(s)}ds &= \int_{t_{\circ}}^{t_{۱}} \frac{\bar{x}''(t)}{\phi(\bar{x}''(t))}\bar{x}'''(t)dt = \int_{t_{\circ}}^{t_{۱}} \frac{-f(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t), \bar{x}''(t))}{\phi(\bar{x}''(t))}\bar{x}''(t)dt \\
&\leq \int_{t_{\circ}}^{t_{۱}} \bar{x}''(t)dt = \bar{x}'(t_{۱}) - \bar{x}'(t_{\circ}) \\
&\leq \max_{t\in[\circ,۱]} \Upsilon_{۲}(t) - \min_{t\in[\circ,۱]} \Upsilon_{۱}(t) \\
&\leq \int_{\eta}^{r} \frac{s}{\phi(s)}ds
\end{aligned}$$