بسم الله الرحمن الرحيم

بسمه تعالی

دانشگاه علم و صنعت ایران

دانشکده ریاضی

خواص توپولوژیک ضرب در یک گروه لی پوچ توان

ناصره آژیر

پایان نامه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

استاد راهنما: دکتر ابراهیم اسرافیلیان

مهر ماه ۸۰

بسمه تعالی

در آرامش حاکم بر کتابخانه ها و آزمایشگاههایتان بمانید، نخست از خود بپرسید من برای خودآموزی چه کرده ام؟ و همچنان که پیشتر می روید، بپرسید برای کشورم چه کرده ام؟ و این پرسش را انقدر ادامه دهید تا شاید سهم کوچکی در پیشرفت و اعتلای بشریت داشته باشید.

زندگی خواه به تلاشهایتان پاسخ دهد یا ندهد، هر کدامتان باید جرأت آنرا داشته باشید که در انتهای جاده زندگی با صدای بلند بگویید « من آنچه در توان داشته ام ، به انجام رساندم».

« لوئی پاستور»

تقدیم به

روان پاک پدر و مادرم

چکیده

این مقاله به خواص توپولوژیکی ضرب در یک گروه لی پوچ توان می پردازد، بــه طـوری کـه اگر G یک گروه لی پوچ توان و به طور ساده همبند باشد و K و H زیرگروههای همبند و بســته ای از G باشند که فقط در یک عنصر خنثی مشترک باشند، نگاشت ضربی $K \times H \to G$ یک نگاشــت سره می باشد.

همچنین عمل $K \times H$ بر G را به صورت $g.(k,h) = k^{-1}gh$ در نظر گرفته و تحــت فرضیـات مشخصی، نشان می دهیم که این عمل سره است اگر و تنها اگر آزاد باشد. در انتها از سره بودن و یـا آزاد بودن عمل $K \times H$ بر G ، ثابت می شود که $K\backslash G/H$ که یک منیفلد دو خـارج قسمتی و قـابل انقبـاض[1] است، دیفئومورف با R^d است که d بعد $K\backslash G/H$ می باشد.

فهرست

فصل ۱ـ تعاریف

فصل ۲

فصل ٤

فصل ٥

فصل ٦

مقدمه

نیاز درونی و عمیق بشر برای دریافت حقایق و اسرار پنهان جهان و ذرات و اتمهای آن موجب پیدایش علوم از جمله علوم ریاضی گردید. به گونه ای که اولین قدمها در راه تحقیق در یونان و مصر قدیم برداشته شدسقراط، افلاطون، اقلیدس، خواجه نصیرالدین طوسی و فیثاغورث از جمله پایه گذاران اولیه این علم بودند. اما هندسه منیفلدها، عمل جدیدی از هندسه است که تاریخچه آن به مقالاتی بعد از سالهای ۱۹٤۵ میلادی برمی گردد و کاربردهای متنوع و فراوانی در علوم و فنون مختلف، از جمله نظریه نسبیت عام و نظریه کوانتوم در فیزیک، تئوری معادلات دیفرانسیل، بیولوژی، زمین شناسی و مخابرات و کنترل و ... دارد. مهمتر از همه، هندسه منیفلدها بعنوان پل ارتباطی بین ریاضیات محض و کاربردی است. این مقاله که به خواص توپولوژیکی ضرب در یک گروه لی پوچ توان می پردازد، به شاخه جبرلی در هندسه منیفلدها مربوط می شود و در امتداد مقاله ای است که آقای سینخوف (singhof) ناشر این مقاله در سال ۱۹۹۳ تحت عنوان توپولوژی منیفلدهای خارج قسمتی[1] منتشر نمودند.

این مقاله شامل شش فصل می باشد. فصل اول که مربوط به تعاریف و پیش نیازهاست.

فصل دوم کلیاتی مربوط به گروههای لی پوچ توان ارائه می دهد و فصل سوم که یکی از قضایای اساسی مقاله را مطرح می کند، به این سوال پاسخ می دهد که:

برای دو زیرگروه همبند و بسته K و H از یک گروه لی G که $K\times H$ بر G به صورت $g.(k,h) = K^{-1}gh$ عمل می کند، چه وقت و تحت چه شرایطی نگاشت $G\times K\times H \rightarrow G$ سره است؟

1- On The Toplolgy Of Double Coset Manifold. [11] بخش مراجع

فصل چهارم کلیاتی بر گروههایی که به طور سره عمل می کنند و یک قضیـه اساسی در ایـن خصوص مطرح می کند که حالت بسیار ضعیفی از آن در توپولوژی عمومی بورباکی [1] موجود است.

فصل پنجم به این پرسش، پاسخ می دهد که:

اگر G یک گروه لـی حـل پذیـر و یـا بـه طـور سـاده همبنـد و پـوچ تـوان باشـد و K و H زیرگروههای همبند و بسته از G بوده که $K \times H$ بر G به طور آزاد عمل نماید. آیـا عمـل $K \times H$ بـر G سره است؟

پاسخ این سوال را تحت عنوان قضیه ای پاسخ داده و در دو مرحله ابتدا برای گروهـهای یـک پارامتری و بعد برای گروه لی پوچ توان از مرتبه ۲ ، آن را ثابت می کند.

فصل آخر مقاله، راجع به فضای مدار K\G/H بدست آمده از کنـش آزاد و سـره $K \times H$ بـر G است و بررسی می کند کـه تحـت چـه شـرایطی K\G/H بـا R^d کـه $d = \dim K\backslash G/H$ اسـت، دیفئومورف می باشد و با استفاده از قضایای فصول **قبل** و قضیه ای از استالینگ [2](stalling) ایـن مطلب را ثابت می کند.

1- Bourb Aki , General Topology . Chap . III S . 4

2 - مراجعه شود به فصل ۱- قضیه (۵-۱۰-۱)

فصل اول

۱ـ چارتهای موضعی ـ اطلس ماکزیمال ـ منیفلد دیفرانسیل پذیر [۱]

تعریف (۱-۱-۱) اگر U یک مجموعه باز در V و $F: V \to W$ پیوسته باشد F را از کلاس C^k بر U می نامیم اگر برای هر $u \in U$ ، $D^kF(u)$ وجود داشته باشد بعلاوه

$$D^kF: U \to L^k(V,W): U \to D^kF(U)$$

به ازا K و ... و $V = 1$ پیوسته باشد که $L(V,W)$ مجموعه ترکیبات خطی از V به W می باشد و $L^k(V,W) = L^{k-1}oL(V,W)$ است .

وقتی $W = R$ باشد مجموعه توابع از کلاس C^k بر U را به $C^k(U)$ نمایش می دهیم.

همچنین نگاشت $F: U \to W$ را از کلاس C^∞ نامیم هرگاه F از کلاس C^k به ازاء .... و $K=1$ باشد.

تعریف (۲-۱-۱) اگر U و W فضاهای اقلیدسی باشند به طوری که U در V باز باشد تابع $F:U \to W$ بر U تحلیلی [۲] است اگر:

الف ـ F بر U از کلاس C^∞ باشد.

ب ـ برای هر $P \in U$ گوی باز $B \subset U$ به مرکز P وجود داشته باشد به طوری که به ازاء هر $q=P+X$ در B سری تیلور $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} D^rF(p)X^{(r)}$ به $F(q)$ همگرا باشد.

---

۱ locally chart _ complet atlas

۲ Analytic

مجموعه توابع تحلیلی $F : U \to W$ بر U را به صورت $C^{w}(U, W)$ یا (U و W) A نمایش می دهیم.

تعریف (۳-۱-۱) فرض کنیم M یک مجموعه ناتهی ، V زیر مجموعه بازی از R^n و $U \subseteq M$ باشد. نگاشت دوسویی $X : U \to X(U) = V \subset R^n$ را یک چارت n بعدی ، U را حوزه چارت و زوج مرتب (U و X) را یک چارت موضعی می نامیم.

اگر تابع $P^i : R^n \to R$ به صورت $p^i : (t^1, \ldots, t^n) \to t^i$ تعریف شود آنگاه توابع $x^i = p^i o x : U \to R$ را توابع مختصاتی می گویند. به همین دلیل زوج مرتب (U و X) را دستگاه مختصات موضعی نیز می نامند.

تعریف (٤-۱-۱) فرض کنیم (U وx) و (V وy) دو چارت موضعی n بعدی روی M باشند. گوییم دو چارت C^K- مرتبط هستند اگر نگاشت $yox^{-1} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$ که آنرا نگاشت تغییر چارت یا تابع تبدیل مختصاتی می گویند و نیز معکوسش توابعی از کلاس C^K باشند.

تعریف (٥-۱-۱) یک خانواده از چارتهای C^K مرتبط $\{(X_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ تشکیل یک اطلس C^K ، n بعدی روی M می دهند اگر حوزه تعریف آنها M را بپوشاند یعنی

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

تعریف (٦-۱-۱) یک اطلس C^K از M را ماکزیمال یا کامل نامیم اگر زیر مجموعهٔ هیچ اطلس C^K دیگری نباشد.

تعریف (۷-۱-۱) مجموعه M همراه با یک اطلس C^K ماکزیمال n بعدی را یک منیفلد دیفرانسیل پذیر n بعدی از کلاس C^K می گوییم. اطلس ماکزیمال M را ساختار دیفرانسیل پذیری نیز می نامیم.

تعریف (۸-۱-۱) منیفلدهای C^∞، M و N را همیومورف نامیم هر گاه یک تابع یک به یک $f:M \to N$ وجود داشته باشد که پیوسته و باز باشد در این صورت f را همیومورفیسم می نامیم.

تعریف (۹-۱-۱) منیفلدهای C^∞، M و N را دیفئومورف[۱] نامیم اگر یک همیومورفیسم $f:M \to N$ وجود داشته باشد به طوری که f و f^{-1} از کلاس C^∞ باشند. در این صورت f را دیفئومورفیسم می نامیم.

تعریف (۱۰-۱-۱) فرض کنیم M و N منیفلدهای C^∞ به بعد m و n و $F : M \to N$ نگاشتی C^∞ باشد. در این صورت:

الف ـ F را یک ایمرشن[۲] (جادهنده) از M به N نامیم هر گاه به ازاء هر $P\in M$، یک همسایگی U از P در M و یک چارت (y و V) از $F(p)$ در N وجود داشته باشدبه طوری که اگر $y = (y_1$ و ... و $y_n)$ توابع مختصاتی باشد آنگاه $x_i = y_i \times F|u$ به ازاء m و ... و $i=1$ توابعی مختصاتی از U در M باشند.

ب ـ F را یک نشاننده[۳] نامیم اگر F یک به یک و ایمرشن باشد.

---

[۱] Diffeomorphic

[۲] Immersion

[۳] Embedding

ج - زیرمجموعه $F(M)$ ساختار C^{∞} دیفرانسیل پذیر داشــته باشـد بـه طـوری کـه نگاشـت $F : M \to F(M)$ دیفئومورفیسم باشد.

همچنین اگر M یک زیرمجموعه از N باشد که ساختار C^{∞} و دیفرانسیل پذیر داشــته باشـد آنگاه M را یک زیر منیفلد N نامیم اگر نگاشت شمول $x \to x$ و $j : M \to N$ یک نشاننده باشد.

تعریـف (۱۱-۱-۱) مینفلـد n بعـدی M را مینفلـد تحلیلـی نـامیم اگـر توابـــع مختصــاتی $X_{\alpha} \circ X_{\beta}^{-1}$ توابعی تحلیلی بر مجموعه های باز $U_{\alpha} \cap U_{B}$ از R^{n} باشند.

تعریـف (۱۲-۱-۱) منیفلـد M را یـک زیـر منیفلـد همـوار نـامیم اگــر توابــع مختصـــاتی $X_{\alpha} \circ X_{\beta}^{-1}$ از چارتــهاسی $(X_{\alpha}.U_{\alpha}),(x_B,V_B)$ بـــر مجموعـــه هـــای‌باز $U_{\alpha} \cap U_{B}$ از R^{n} ، دیفئومورفیسم باشندو درجه دیفرانسیل پذیری این توابع مختصاتی را درجه هموارى منیفلد M مـی نامیم .

۲ـ گروه توپولوژی ـ فضای همگن.[1]

تعریف (۱-۲-۱) ساختار توپولوژی بر مجموعهٔ X که به وسیلهٔ D از زیرمجموعه های X داده می شود، دارای خواص زیر می باشد:

a) اجتماع هر تعداد از مجموعه های D در D باشد.

b) اشتراک هرتعداد متناهی از مجموعه های D، مجموعه ای از D باشد.

c) Φ و X در D باشند .

تعریف (۲-۲-۱) اگر X یک فضای برداری بر میدان اعداد حقیقی یا مختلط باشد نرم[2] بر X که به صورت $\| \|$ نوشته می شود، تابعی با مقدار حقیقی بر X با خواص زیر می باشد:

a) $\forall x \in X \ , \ \|x\| \geq 0$

b) $x \neq 0 \Rightarrow \|x\| \neq 0$

c) $\|ax\| = |a| \ \|x\|$

d) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

فضای برداری X با یک نرم بر X را یک فضای خطی نرمیده[3] می نامیم.

تعریف (۳-۲-۱) اگر X' و Y' فضاهای خطی نرمیده و T عملگر خطی[4] باشد، T را کراندار نامیم. اگر:

---

[1]- Topological group –Homogeneous spa ces

[2]- norm

[3]- normed linear space

[4]- Linear operator

$\exists M \qquad \forall x \in X \qquad \|Tx\| \leq M\|x\|$

و نرم عملگرهای خطی کراندار به صورت $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\| = \sup\limits_{x \neq 0}\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$ می باشد.

تعریف (٤-٢-١): فضای توپولوژیکی G را هاسدورف[۱] نامیم اگر هر دو نقطه x و y متعلق به G همسایگی های بازی داشته باشند که یکدیگر را قطع نکنند.

تعریف (٥-٢-١) گروه توپولوژی G عبارتست از مجموعهٔ G به طوری که :

a) G یک فضای توپولوژی هاسدورف باشد

b) G گروه باشد.

c) نگاشتهای $G\times G \to G$ و $G \to G$.

با ضابطه های $(x,y) \to xy$ و $x \to x^{-1}$

پیوسته باشند .

همچنین اگر Gیک گروه توپولوژی و $a \in G$ آنگاه نگاشت $L(a): G \to G$ با ضابطه $x \to ax$ را یک انتقال چپ[۲] و نگاشت $R(a): G \to G$ با ضابطه $x \to xa$ را یک انتقال راست[۳] می نامیم.

تعریف (٦-٢-١) اگر G یک گروه توپولوژی و H زیرمجموعه ای از آن باشد به طوری که $HH^{-1} \subset H$ آنگاه H را یک زیرگروه G می نامیم. توپولوژی G یک توپولوژی بر H القا می کند به این صورت که $U \subset H$باز است اگر و تنها اگر $V = H \cap V$ که V در G باز باشد. اگر H با این توپولوژی، یک گروه توپولوژی تعریف نماید آن را زیرگروه توپولوژی[٤] می نامیم.

---

[۱]- Housdorff

[۲]- left translation

[۳]- Right translation

[٤]- Topological subgraup