بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نورشیراز

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته فیزیک

گروه علمی فیزیک

عنوان پایان نامه

دینامیک سالیتون های سینوسی گوردون در محیط های ناهمگن

استاد راهنما

دکتر عبد الرسول قرائتی

استاد مشاور

دکترپرویز الهی

نگارش

طاهره خیراتی

اسفند ماه 1387

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان : دینامیک سالیتون های سینوسی گوردون در محیط های ناهمگن

که توسط طاهره خیراتی در مرکز شیراز تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأیید می باشد. تاریخ دفاع: 87/12/3 نمره: 19 (نوزده) درجه ارزشیابی : عالی

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
1- دکتر عبدالرسول قرائتی	استاد راهنما	استاد یار	
2-دکتر پرویز الهی	استاد مشاور	استاد یار	
3- دکتر محسن حاتمی	استاد داور	استادیار	
4- دکتر حسین یزدی	نماینده تحصیلات تکمیلی	استادیار	

تقدیم به همسر مهربانم

که در طول این دوره همراه من بود، و با حمایت های بی دریغش مرا یاری نمود .

هر کس به من جمله ای بیاموزد

مرا بنده خود ساخته است.

حضرت علی(ع)

از تمام کسانی که در این راه مرا یاری نموده اند، بخصوص استاد ارجمند جناب آقای دکتر قرائتی که همیشه از کمک ها وحمایت ها ی بی دریغ شان برخورداربوده ام ،و همچنین جناب آقای دکتر الهی بخاطر زحمات فراوانشان، سپاسگزارم. خدا را شکر وشما را سپاس که همواره با لطف خود چراغ هدایت و روشنی را بر کوچه های تاریک ذهنم به من هدیه کردید و فانوس محبت شما باعث روشنتر شدن افکارم گردید.

گر بر تن من زبان شود هر مویی یک شکر تو از هزار نتوانم کرد

چکیده

حرکت نوسانی پاندول ها در زنجیره ای از پاندول هارا با طول L_0،جرم m_0، شـتاب جاذبـه g_0 کـه بـه وسیله فنری با سختی ثابت k_0 با یکدیگرجفت شده اند،منجر به معادله دیفرانسیل غیرخطی بامشتقات جزیی می شود،این سیستم انتگرال پذیر اسـت از ایـن رو دارای پاسـخ هـای سـالیتونی معـروف بـه سالیتون های معادله سینوسی گوردون می باشد.برای کنترل وهدایت سالیتون ها نیاز به محیط ناهمگن است،در ایـن پایـان نامـه حرکـت سـالیتون هـا درمحیطـی نـاهمگن بـا متغیـر گـرفتن کمیـت هـای طول $L(x)$،جرم $m(x)$،شتاب جاذبه $g(x)$وسختی فنر $k(x)$که تـابعی ازمکـان هسـتند راموردبررسـی قرارمی دهیم وپاسخهای تحلیلی و عددی درحالات فوق رابدست می آوریم.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست جدول ها

عنوان **صفحه**

فهرست شکل ها

عنوان **صفحه**

پیش گفتار

توصیف وتفسیر پدیده ها در جهان با استفاده از فیزیـک غیرخطـی، کـم و بـیش تقریبـی اسـت .پدیده هایی در طبیعت وجود دارند که به دلیل غیرخطی بودن معادلات حاکم بـر آن هـا، بـه آسـانی قابل تفسیر و تعبیر نیستند. از این رو، برای فهم بهتر طبیعت باید به مطالعه فیزیک غیرخطی پرداخت.

در تلاش برای فهم بهتر برخی از این پدیده های فیزیکی، نظیرآب و هوا، زلزله و...، دانشمندان مدل های ریاضی مفیدی را یافته اند، که تحول زمانی آن ها می تواند نشان دهنده خـواص فیزیکـی این پدیده های طبیعی باشد. این مدل ها اغلب شامل معادلات دیفرانسیل با nمتغیر وابسـته هسـتند که معمولا توابعی از متغیرهای مستقل x، y، z و t می باشند. این مـدل هـای ریاضـی بایـد قـادر بـه توجیه رفتارهای منظم ونا مـنظم پدیـده هـای فیزیکـی باشـند، در ایـن میـان دسـتگاهی بـا معادلـه دیفرانسیل معمولی باید بتواند حرکت های پایدار و ناپایدار و شرایطی که منجر به گذار بـین آن هـا می شود، را توصیف کند. در حالی که اگر بخواهیم اطلاعاتی در مورد پدیده های آشوبی[1] به دسـت آوریم، به یک معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی[2] نیاز داریم که بتوانـد بـی نظمـی الگوهـای فضـا- زمانی را توصیف کند[1].

با این وجود بنا به دلایلی تا حدود یک قرن پس از تولد فیزیک غیرخطی پیشـرفت چشـمگیری در آن مشاهده نشد. از دلایل عمده این تاخیر یکی هم زمانی آن با مکانیک کوانتمی بود، که به خـاطر نتایج موفقیت آمیزش توجه بیشتر فیزیکدان ها را به سـمت خـود جلـب کـرد و دیگـری محاسـبات پیچیده و دست و پاگیر آن بود. خوشبختانه دردو دهه اخیر پیشرفت ها ی قابل ملاحظه ی رایا نه هـا و تکنیک محاسبات عددی در این زمینه باعث انتشار مقالات قابل توجهی شده است[2].

یکی از مهم ترین موضوعاتی که در این روند مورد توجه قرار گرفته است، سالیتون[3] است. دردودهـه اخیر این موضوع گستره وسیعی از مقالات را به خود اختصاص داده است. آن ها بـه صـورت پاسـخ های جایگزیده یا تپ هائی هستند که شکل شان حتـی بعـد از برخوردبـا یکـدیگر ثابـت مـی مانـد، بنابراین شبیه ذرات عمل می کنند. سـالیتون هـا پاسـخ هـای گـروه خاصـی از معـادلات غیـر خطـی می باشند.

در این پایان نامه سعی شده است با بیان مفاهیمی ازدستگاه های غیر خطـی، بـرای کنتـرل و هـدایت سالیتون ها حرکت نوسانی پاندول ها در زنجیره ای از پاندول ها در یک محیط ناهمگن مورد بررسی

[1] Chaotic
[2] Non-linear partial differential equation
[3] Soliton

قرار گیرد.برای این منظوردر فصل اول به آشنایی با دستگاه های غیر خطی پرداخته و مفهوم فیزیکی انتگرال پذیری را بررسی می کنیم. در فصل دوم، به بیان مثال هایی از دستگاه هایی با درجات آزادی محدود وچند نمونه از معادلات غیر خطی پرداخته ایم. فصل سوم، معادله سینوسی گوردون را معرفی کرده وپاسخ های آن را معرفی می کنیم. در فصل چهارم حرکت سالیتون ها ی زنجیره پاندول ها در محیطی نا همگن با متغییر گرفتن کمیت های طول $L(x)$، جرم $m(x)$، شتاب جاذبه $g(x)$و سختی فنر $k(x)$ که تابعی از مکان هستند، را مورد بررسی قرار می دهیم و پاسخ های تحلیلی و عددی را در حالات فوق را به دست می آوریم.

فصل ۱

آشنايي با دستگاه هاي غير خطي

1-1 دستگاه ها ی دینامیکی

دستگاه های دینامیکی به دستگاه های گفته می شود که در گذر زمان دستخوش تحول می شوند. لذا یک دستگاه دینامیکی را می توان توسط سه پارامتر زمان، مکان و پارامتر هایی که بیانگر نحوه تحول آن ها ست، شکل داد. برای درک دستگاه دینامیکی باید بر شرایط اولیه و شرایط مرزی حاکم بر آن احاطه داشت[4].

دستگاه های دینامیکی با توجه به معادله دیفرانسیل حاکم بر آن ها ، به دو گروه دستگاه های دینامیکی خطی وغیر خطی تقسیم می شوند.

اگر معادله ای شامل چند متغیر مشتقات آن باشد، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی نامیده می شود. فرم کلی معاد لات دیفرانسیل با مشتقات جزیی به صورت زیر می باشد:

$$f(u,u_x,u_{xx},\mathbf{K},u_y,u_{yy},\mathbf{K},u_{xy},\mathbf{K})=0 \qquad (1\text{-}1)$$

معمولاً معاد لات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم خطی به فرم کلی زیر می باشند:

$$Au_{xx}(x,y)+Bu_{xy}+Cu_{yy}(x,y)+Du_x(x,y)+Eu_y(x,y)+Fu(x,y)+G=0 \qquad (2\text{-}1)$$

که $A,B,\mathbf{K},G$ ضرایب معادله هستند، که تابعی از x و y می باشند.

اگر چنانچه $A,B,\mathbf{K},G$ توابعی از u یا مشتقات آن باشند معادله دیفرانسیل غیر خطی نامیده می شود[5].

2-1 دستگاه های دینامیکی خطی

دستگاه هایی که معادله دیفرانسیل حاکم بر آن ها خطی باشد، دستگاه های خطی به شمار می آیند. اگر دو جواب برای دستگاه خطی داشته باشیم مجموع آنها نیز جواب دستگاه است. همچنین دستگاه های خطی از این قابلیت برخوردار هستند که آنها را می توان با تجزیه مسئله به اجزای کوچکتر، مورد بررسی قرار داده و سپس با جمع بندی نتایج، به تحلیل کلی آنها اقدام کرد و این از جمله مواردی است که تحلیل ان ها را آسان می سازد، مانند آنالیز فوریه، مباحث برهم نهی و.... در نهایت می توان گفت که تجزیه تحلیل معاد لات مربوط به این دستگاه ها اغلب شناخته شده هستند.

1-3دستگاه های دینامیکی غیر خطی

دستگاه هایی که معادله دیفرانسیل حاکم بر آن ها غیر خطی باشد دستگاه های غیر خطی نامیده می شوند. در چنین دستگاهی اگر دو جواب داشته باشیم مجموع آنها جواب دستگاه نمی باشد. دستگاه دینامیکی غیر خطی را نمی توان به اجزای کوچکتر تقسیم نموده و هر یک را جداگانه حل کرد، بلکه باید کل آن را با هم و یکجا مطالعه و بررسی کرد. برای مثال، وقتی که قسمتهایی از یک دستگاه تداخل می کنند یا با هم کار می کنند یک بر هم کنش غیر خطی اتفاق می افتد واصل بر هم نهی شکست می خورد. پس می توان گفت که حل تحلیلی معادلات مربوط به تحول در این دستگاه ها بسیار مشکل است. به طور کلی دستگاه های دینامیکی غیر خطی شامل دستگاه های انتگرال پذیر و انتگرال ناپذیر می باشند[1]. پدیده آشوب یک نمونه از پاسخ دستگاه انتگرال ناپذیر می باشد که بطور خلاصه در زیر مطرح می شود.

1-3-1آشوب

«آشـــوب» در لغت به معنای هرج و مرج و بی‌نظمـی اسـت. ریشـه لغـوی آشـوب بـه کلمـه رومـی «کائـــوس» برمی‌گردد که مفهوم آن متعلق به شاعر روم باستان به نام «اویـــد» مـی‌باشـد. بـه نظـر او کائوس، بی‌نظمی و ماده بی‌شکل اولیه که دارای فضا و بعد نامحدودی بوده، می باشد. به طـوری کـه فرض شده ، قبل از این که جهان منظم شکل بگیرد، وجود داشته است و سپس خالق هستی، جهـان منظم را از آن ایجاد نموده است.

از لحاظ تاریخی پس از آن که قوانین نیوتـــن در مورد حرکت ارائه شد، افـــراد زیـادی بـا تکیـه بـر قطعیت ذاتی این قوانین آنهـــا را ماشین حساب خدا نامیدند و بـرای پیشـگویی آینـــــده بـر حسـب مقادیر فعلی کافی دانستند؛ به طـور کلـی تصـور بـر ایـن بـود کـه اگـر وضـعیت فعلـی را بـا دقـت بالایی بدانیم می توانیم آینـــده را هم با همین دقت پیشگویی کنیم. این باور هم چنان پا بر جا بود تا این که در اواخر قـــرن نوزدهم، «هانـــری پوانکاره» در بـــررسی های خود گفت که بـا کـاهش عـدم قطعیت در شـــرایط اولیه لزوما عدم قطعیت کاهش نمی‌یابد. این مسئله نمـودی از رفتـــار آشـــوبی بود که در آن زمان شنـــاخته شـــده نبود. تقریبـــا اولیـــــن تحقیقـات عـددی کـه بـه معرفـی فراگیـر آشوب انجامید توسط «ادوارد لورنتـــس» ارائه شد.

باید دانست که تاکنون تعریف کلی پذیرفته شده برای آشوب ارائه نشده است و تعریف زیر از جملـه تعاریف پذیرفته شده مطرح می‌باشد:

« آشـــوب، یک رفتـــار طولانی مدت غیرپریـــودیک در یک سیستم دترمینیســـتیک اســت کـه وابستـگی حســـاس به شـــرایط اولیـــه را نشان می‌دهد»

- منظور از رفتار طولانی مدت غیرپریودیک در دستگاه های دینامیکی آن است که مسـیرهایی وجـود دارند که وقتی زمان به بی‌نهایت میل می‌کند، مسیر این دستگاه ها به نقاط ثابت، مدارهای پریودیک و یا مدارهای شبه پریودیک منتهی نمی‌شوند.

- دترمینیســـتیک گویای آن است که دستگاه دارای پارامترها یـا ورودی‌هـای تصـادفی نیسـت ولـی رفتار بی نظم این دستگاه ها از غیرخطی بودن ناشی می‌شود.

- منظور از حساس بودن به شرایط اولیه در دستگاه های دینامیکی این است که مسیرهای مجـاورهم با سرعت و به طور نمایی از هم جدا می‌شوند. در واقع این خصوصیت، تفاوت اصلی دسـتگاه هـای دینامیکی آشوبناک با دستگاه های دینـامیکی غیـرآشـوبناک اسـت. در دسـتگاه هـای دینـامیکی غیـر آشوبناک، اختلاف کوچک اولیه در دو مسیر به عنوان خطای اندازه‌گیری بوده و به طور خطی با زمان افزایش پیدا می‌کنند در حالی که در دستگاه های دینامیکی آشوبناک، اختلاف بین دو مسیر بـا فاصـله بسیار اندک همان طوری که گفته شد، به طور نمایی افزایش می‌یابد.

محیط عمل پدیده آشـوب، دستگاه های دینامیکی است. یک دستگاه دینامیکی شامل یک فضای فـــاز است که مختصاتش، حالت دینامیکی دستگاه را مشخص می‌کند. یـک دسـتگاه دینـامیکی مـی توانـد منظم یا آشوبناک باشد[6].

1-4مفهوم فیزیکی انتگرال پذیری

برای بررسی دستگاه های فیزیکی می توان آن ها را به دو گروه دستگاه های با درجات آزادی محدود و نامحدود، تقسیم بندی کرد.

از دیدگاه کلاسیک، انتگرال پذیری به معنای پیدا کردن ثابت های حرکت و در نتیجه مشـخص شـدن مسیر حرکت است[7].

در حالت کلی در دستگاهی با N درجه آزادی، با مشخص شدن یک ثابت حرکت، دستگاه از قید یک بعد رها می شود وبا وجود دو ثابت حرکت از قید دو بعد،وبه همین ترتیب به ازاء هر ثابت حرکـت، دستگاه یک درجه آزادی را از دست می دهد و مسیر دستگاه در فضای فاز محـدودتر مـی شـود[5]. پس چنانچه این دستگاه دارای N ثابت حرکت مستقل باشد، مسیر آن در فضای فـاز کـاملا مشـخص شده و به صورت یک منحنی در خواهد آمد. این دستگاه را انتگرال پـذیر گوینـد. و در صـورتی کـه

کمتر از N ثابت حرکت وجود داشته باشد، حرکت دستگاه در ناحیه ای از فضای فاز قرار می گیرد و نمی توان مسیر مشخّصی را برای آن تعیین نمود، پس دستگاه انتگرال ناپذیر است. در مورد دستگاه های با درجات آزادی محدود، پیدا کردن ثابت های حرکت و در نتیجه مشخص نمودن مسیر حرکت کار دشواری نیست. اما اگر دستگاه درجات آزادی نامحدود داشته باشد یا به عبارتی دستگاه پیوسته باشد، یافتن بی نهایت ثابت حرکت کار دشواری است، در چنین دستگاه هائی در صورتی که پاسخ معادله حاکم بر آن ها، به صورت سالیتون باشد، به معنای وجود بی نهایت ثابت حرکت مستقل و دستگاه انتگرال پذیر است.

از دیدگاه کوانتومی مفهوم انتگرال پذیری بسیار پیچیده تر است. چون در مکانیک کوانتمی مفهومی به نام مسیر حرکت وجود ندارد، و بحث راجع به طیف انرژی دستگاه است. در دستگاه های کوانتومی وجود N ثابت حرکت معادل N عدد کوانتومی است. تابع موج و سطوح انرژی دستگاه با این اعداد کوانتومی مشخص می شود. سطوح انرژی دستگاه های انتگرال پذیر کوانتومی دارای طیف منظم است[8].

ما در اینجا انتگرال پذیری را فقط از دید کلاسیکی بررسی می کنیم، که ابتدا به بیان چند مفهوم اساسی که در این بررسی مورد نیاز است می پردازیم.

1-4-1فضای فاز

فضائی است که نقاط آن با مولفه های مکان q_i واندازه حرکت p_i مشخص می شود.

2-4-1کمیت های پواسنی

کمیت های دینامیکی $f_1(q,p),\ f_2(q,p),\mathbf{K},\ f_N(q,p)$ ، پواسنی هستند، هرگاه کروشه پواسون هر جفت از آن ها صفر شود[9].

بنابراین با در نظر گرفتن کروشه پواسون به صورت زیر،

$$\{F(p,q),G(p,q)\}=\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial F}{\partial p_j}\cdot\frac{\partial G}{\partial q_j}-\frac{\partial F}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial G}{\partial p_j}\right) \qquad (3\text{-}1)$$

خواهیم داشت؛

$$\{f_i(q,p),\ f_k(q,p)\}=0 \qquad i,k=1,2,\mathbf{K},N \qquad (4\text{-}1)$$

در فضای فاز داریم؛

$$\{p_i,p_j\}=\{q_i,q_j\}=0 \qquad (5\text{-}1)$$
$$\{q_i,p_j\}=d_{i,j}$$

1-4-3 ثابت های حرکت

ثابت های حرکت کمیت هائی هستند که در دستگاه های فیزیکی با گذشت زمان تغییر نمی کنند، و ثابت باقی خواهند ماند. عدم تغییر در آن ها باعث می شود که دستگاه در مناطق محدودی از فضای فاز محصور شود. پس هر چه تعداد ثابت های حرکت بیشتر باشد، دستگاه محدودترخواهد شد[5].

1-5دستگاه های با درجات آزادی محدود

یک دستگاه فیزیکی با Nدرجه آزادی که با هامیلتونی Hو متغیرهای دینامیکی p_i و q_i در فضای فاز توصیف می شود، را در نظر می گیریم. تحول زمانی آن به صورت زیر می باشد[9]؛

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad i = 1,2,\ldots,N \tag{1-6}$$

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

اگر f_i ثابت حرکت باشد، چون مستقل از زمان است، داریم؛

$$\frac{df_i}{dt} = 0 \tag{1-7}$$

$\frac{df_i}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\partial f_i}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial f_i}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial p_i}{\partial t}$باستفاده از معادلات (1-6) داریم؛

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f_i}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial q_i} = \{f_i, H\} = 0 \tag{1-8}$$

اگر دستگاه در لحظه $t = 0$، شرایط اولیه $q_i(0) = q_{0i}$ و $p_i(0) = p_{0i}$ داشته باشد، از حل معادلات فوق می توان $q_i(t)$ و $p_i(t)$ را به دست آورد.

(1-9)

$$p_i = p_i(p_0, q_0, t)$$
$$q_i = q_i(p_0, q_0, t)$$

این معادلات از $2N$تابع p_{0i} و q_{0i}تشکیل شده است که در طول مسیر ثابت هستند. اگر زمان tرا بین آن ها حذف کنیم، تعداد معادلات به $2N-1$تابع تقلیل می یابد. بنابراین می توان گفت، هر دستگاه فیزیکی با Nدرجه آزادی، حداکثردارای $2N-1$ثابت حرکت است. اگر به هر کدام از این ثابت های حرکت یک مقدار عددی نسبت دهیم، مسیر دستگاه در فضای فاز کاملا مشخص می شود.

در صورتی که اگر با استفاده از تبدیلات کانونیک هامیلتونی دستگاه را با مختصات جدید (Q,P) بیـان نمائیم، همواره می تـوان دسـتگاه مختصـاتی یافـت کـه در آن همـه مختصـات بـه صـورت دوره ای (قابل اغماض) درآیند[5]. یعنی آن که هامیلتونی دستگاه به طور صریح به آن ها وابسته نباشد، در این حالت اندازه حرکت تعمیم یافته مربوط به این مختصات، ثابت حرکت است. در اغلب مـوارد انـدازه حرکت تعمیم یافته P را متغیر عمل، J، و Q را زاویه، w، می نامند. در این حالت داریم

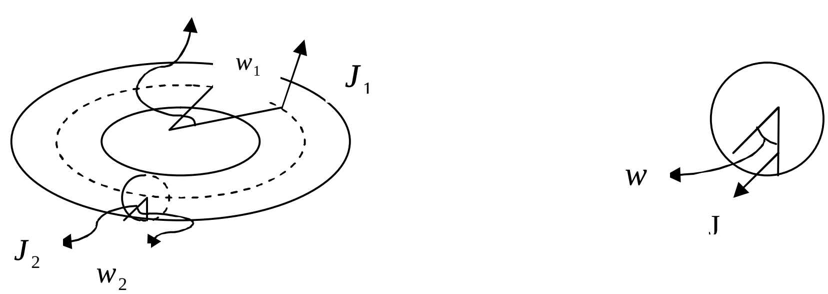
$$\dot{P}_k = -\frac{\partial H}{\partial Q_k} = 0 \;\Rightarrow\; P_k = J_k = const \qquad k = 1,2,\mathbf{K},N$$

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial J}{\partial P_i} = u_k \;\Rightarrow\; Q_k = w_k = u_k t + b_k \tag{10-1}$$

$$\Rightarrow H = H(P_1, P_2, \mathbf{K}, P_k) = H(J_1, J_2, \mathbf{K}, J_k)$$

که در آن u_k ها توابعی از J ها هستند، بنا براین نسبت به زمان ثابت می باشند. b_k ها نیـز ثابـت هـای انتگرال گیری اند که توسط شرایط اولیه مشخص می شوند، بـه ایـن ترتیـب P_k هـا کـه ثابـت بـوده و Q_k ها نیز از طریق انتگرال گیری به دست می آیند، در نتیجه حرکت دستگاه مشخص می شود[9].

فضای فاز چنین دستگاه هائی را می توان روی سطح چنبره ای N بعدی نشان داد کـه دارای N شـعاع عمل ثابت و N زاویه w می باشند. برای مثال در مورد $N=1$، این فضا به صورت محیط دایـره ای بـه شعاع J_1 است. ودر حالت $N=2$ به صورت یک سطح چنبره ای در فضای سه بعدی است. مطابق آن چه در شکل (1-1) مشاهده می شود.



(ب) (الف)

شکل (1-1): فضای فاز دو دستگاه فیزیکی با درجات آزادی (الف) $N=1$ و (ب) $N=2$.

بنابراین با توجه به تحول زمانی دستگاه، یک مسیر در فضای فاز ایجـاد مـی شـود کـه ایـن مسـیر را می توان محل برخورد $2N-1$ ابررویه دانست، که هرکدام معرف یک ثابت حرکت یا به عبارت دیگـر انتگرال حرکت هستند[7]. حال اگر از $2N-1$ ثابت حرکـت دسـتگاهی N ثابـت حرکـت مسـتقل آن