
بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

گیلان

گروه ریاضی

(گرایش محض)

نتایجی پیرامون گراف مقسوم علیه های صفر یک حلقه

از

شکوفه حبیبی

استاد راهنما

دکتر احمد عباسی

شهریور ۸۸

تقدیم به

آنکه جان را فکرت آموخت و به احساس بیاراست

و

آنکه به رسم حضور، غایب است ولی به رسم دل فاصله ای با او نیست

تقدیر و تشکر

الهی!

جز آستان توأم درجهان پناهی نیست   سر مرا بجز این در حواله گاهی نیست

در اینجا بر خود لازم می دانم که از خانواده عزیزم، بویژه پدر و مادر مهربانم، که در تمام مراحل زندگی حامی و پشتیبان من بوده اند، قدر دانی نمایم.

از استاد راهنمای گرامی وارجمند، جناب آقای دکتر احمد عباسی که با مهربانی و سعه صدر، مرا در تدوین این پایان نامه، یاری رسانده اند، تشکر و سپاسگزاری می نمایم.

بویژه مراتب سپاسگزاری خود را، به خاطر آنچه که از کلاسهای درس ایشان و اساتید گرانقدر گروه جبر و سایر اساتید محترم گروه ریاضی، که در این دو سال آموخته ام، دارم.

از داوران گرامی، جناب آقای دکتر شهاب الدین ابراهیمی آتانی و جناب آقای دکتر فرهاد درستکار، و ناظر محترم، جناب آقای دکتر عباس سهله و گروه ریاضی دانشکده علوم، کمال تشکر را دارم.

فهرست مندرجات

چکیده

نتایجی پیرامون گراف مقسوم علیه های صفر یک حلقه

شکوفه حبیبی

در این پایان نامه، ما گراف مقسوم علیه های صفر را برای حلقه های جابجایی که شرایط بخش پذیری معینی بین اعضای حلقه یا شرایط مقایسه پذیری بین ایده آل ها، یا ایده آل های اول حلقه ها برقرار است مطالعه می کنیم.

واژه های کلیدی: گراف مقسوم علیه های صفر، ایده آل های اول مرتب خطی، حلقه های زنجیری.

Abstract

The results related to the zero-divisors graph of a ring.

Shokoofe Habibi

In this thesis we study the zero- divisors graph for commutative rings which satisfy certain divisibility conditions between elements of ring or comparability conditions ideals or prime ideals of rings.

Key Words: zero- divisors graph, linearly ordered primes, chained rings.

مقدمه

ایده گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه ی جابجایی اولین بار توسط شخصی به نام *I.Beck*، در سال ۱۹۸۸ معرفی شد. که موضوع مورد علاقه و مطالعات ایشان در زمینه رنگ آمیزی حلقه ها بود. در سال ۱۹۹۳ ، دو ریاضیدان دیگر به نام های *D.D.Anderson* و *M.Naseer* به موضوع علاقه مند شدند و این کار را ادامه دادند.

اما تعاریف این ریاضی دانان از گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه متفاوت است. *I.Beck*، گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه را به این شکل تعریف می کند، که تمام اعضای حلقه R را به عنوان رئوس گراف در نظر گرفته و دو راس x و y، مجاورند اگر و تنها اگر $xy=0$.

این گراف مقسوم علیه صفر را با $\Gamma_0(R)$ نمایش می دهیم، که در $\Gamma_0(R)$، 0 با تمام رئوس مجاور است. اما *D.D.Anderson* مجموعه رئوس گراف را برابر با مجموعه مقسوم علیه های صفر R فرض کرد و دو راس x و y، مجاورند اگر و تنها اگر $xy=0$. که در این پایان نامه ما با این تعریف کار می کنیم و گراف مقسوم علیه صفر حلقه R را با $\Gamma(R)$ نشان می دهیم، پس $\Gamma(R)$ زیر گراف القایی $\Gamma_0(R)$ است.

این نتایج در مورد $\Gamma(R)$ به صورت طبیعی با $\Gamma_0(R)$ تطابق دارد. با این وجود احساس می شود که تعریف دوم بهتر ساختار مقسوم علیه های صفر حلقه R را توضیح می دهد.

در فصل صفر تعاریف و مطالب پیشنیاز را ارائه می کنیم و در فصل اول ویژگی های مهمی از گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه جابجایی را در دو بخش بیان می کنیم.

در فصل دوم به بررسی گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه جابجایی R، که در آن ایده آل های اول R مشمول در $Z(R)$، مرتب خطی هستند، می پردازیم.

در فصل سوم به بررسی گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه زنجیری می پردازیم و در فصل چهارم گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه جابجایی را که در آن $R\in H$ (قرارداد ۰-۵۷)، بررسی می کنیم.

فصل صفر

تعاریف و مطالب پیشنیاز

در سراسر این پایان نامه R یک حلقه جابجایی با یکه مخالف صفر است.

۰-۱تعریف: گراف G یک سه تایی مرتب به صورت $\left(V(G),E(G),\psi_G\right)$ است که مختص اول آن $V(G)$ یک مجموعه غیرخالی از رئوس، مختص دوم یک مجموعه مانند $E(G)$ و متفاوت با $V(G)$ از یالها و مختص سوم تابع وقوع ، ψ_G است که به هر یال گراف G، یک زوج نامرتب از راسهای G را که الزاماً متمایز نیستند، نسبت می دهد.

۰-۲ تعریف: اگر e یک یال و x و y دو راس باشند، $e\in E(G)$ و $x,y\in V(G)$، بطوریکه $\psi_G(e)=\{x,y\}$، در اینصورت گفته می شود که یال e راس های x و y را به یکدیگر وصل کرده است، و راسهای x و y دو سر یال نامیده می شوند.

۰-۳ تعریف: دو راس که بر روی یال مشترکی واقعند، مجاور نامیده می شوند.

۰-۴ تعریف: اگر $\psi_G(e)$ را بصورت زوج مرتب بنویسیم، $\psi_G(e)=(x,y)$ یعنی یال e از x شروع و به y ختم می شود، و e را یال جهت دار می نامند.

۰-۵ تعریف: گرافی که یال های آن جهت دار باشند را گراف جهت دار یا سودار می نامند.

۰-۶ تعریف: گراف G را کامل می گویند، هرگاه هر دو راس آن مجاور باشند.

۰-۷ تعریف: گرافی که بتوان مجموعه رئوس آن را به دو زیر مجموعه X و Y چنان افراز کرد که یک سر تمام یالهای آن در X و یک سر دیگر آنها در Y باشد، گراف دو بخشی نامیده می شود.

۰-۸ تعریف: گراف دو بخشی G، با بخشهای X و Y که در آن هر راس X با هر راس Y مجاور باشد، گراف دو بخشی کامل نامیده می شود و با $K_{m,n}$ نشان داده می شود بطوریکه $|X|=m$ و $|Y|=n$. اگر G یک گراف کامل باشد آن را با K_n نشان می دهند بطوریکه $|G|=n$.

۰-۹ تعریف: گراف دو بخشی G، با بخشهای X و Y، که $|X|=۱$ گراف ستاره ای نامیده می شود و $x\in X$ مرکز گراف ستاره ای نامیده می شود.

۰-۱۰ تعریف: مسیر بین دو راس متمایز و ناصفر $x_۰, x_n \in G$ را به صورت یک دنباله ناصفر و متناهی $x_۰ --- x_1 ...... x_i --- x_{i+1} ...... x_n$ از راس های متمایز G نشان می دهند به طوریکه به ازای هر عدد صحیح $۰ \le i \le n-۱$، راسهای x_i, x_{i+1} مجاورند.

۰-۱۱ تعریف: دو راس x و y از گراف G را همبند گویند هرگاه حداقل یک مسیر بین این دو راس وجود داشته باشد.

۰-۱۲ تعریف: گراف G را تماماً ناهمبند گویند هرگاه هیچ مسیری بین هر دو راس متمایز آن وجود نداشته باشد.

۰-۱۳ تعریف: طول کوتاهترین مسیر بین دو راس x و y از گراف G، را با $d(x,y)$ نمایش می دهند و اگر هیچ مسیری بین x و y وجود نداشته باشد تعریف می کنند $d(x,y)=\infty$.

۰-۱۴ تعریف: قطر گراف G عبارت است از سوپرمم فاصله بین رئوس گراف G و با $diam(G)$ نشان می دهند:

$$diam(G) = Sup\{d(x,y) \mid x,y \in G\}$$

۰-۱۵ تعریف: یک دور در گراف G عبارت است از مسیر بین دو راس ناصفر و متمایز $x_۰, x_n \in G$، بطوریکه این مسیر حداقل از سه راس متمایز و ناصفر تشکیل شده باشد و $x_۰$ و x_n نیز مجاور باشند.

۰-۱۶ تعریف: کمر (محیط) گراف G طول کوتاهترین دور در G می باشد، که با $gr(G)$ نمایش داده می شود. اگر G هیچ دوری نداشته باشد، کمر G طبق تعریف بی نهایت خواهد بود.

۰–۱۷ تعریف: دو گراف G و G' یکریخت نامیده می شوند $(G \cong G')$ ، اگر نگاشت های دو سویی $\theta : V(G) \to V(G')$ و $\phi : E(G) \to E(G')$ وجود داشته باشند بطوریکه $\psi_G(e) = \{x, y\}$ اگر و تنها اگر $\psi_{G'}(\phi(e)) = \{\theta(x), \theta(y)\}$، این زوج (θ, ϕ) از نگاشت ها، یک یکرختی بین G و G' خوانده می شود.

۰–۱۸ تعریف: گفته می شود گراف H زیر گراف G است (نوشته می شود $H \subseteq G$)، اگر $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ و $\psi_H = \psi_G\big|_{E(H)}$.

۰–۱۹ تعریف: راس های متمایز x و y در گراف G، متعامد گفته می شوند و با $x \perp y$ نمایش داده می شوند، هرگاه x و y مجاور باشند و راسی مانند z، وجود نداشته باشد که با x و y مجاور باشد، یعنی یال $x---y$ بخشی از یک مثلث در گراف G نباشد.

۰–۲۰ تعریف: اگر x و y راس های متمایز از گراف باشند تعریف می کنیم $x \leq y$ ، اگر x و y مجاور نباشند و هر راس از G که با y مجاور باشد با x نیز مجاور باشد.

۰–۲۱ تعریف : اگر x و y راس های متمایز گراف G باشند تعریف می کنیم $x \sim y$ اگر $x \leq y$ و $y \leq x$. به عبارتی $x \sim y$ اگر و تنها اگر x و y دقیقاً با راس های یکسانی مجاور باشند واضح است که $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی G است.

۰-۲۲ تعریف: گراف G، مکمل شده[1] گفته می شود هرگاه به ازای هر راس x از G، یک راس y از G باشد بطوریکه $x \perp y$. در اینصورت گفته می شود که y یک مکمل برای x است.

۰-۲۳ تعریف: گراف G، به طور یکتا مکمل شده [2] گفته می شود هرگاه G مکمل شده باشد و هنگامی که $x \perp y$ و $x \perp z$ (x و y و z راس های متمایز G می باشند)، آنگاه y و z دقیقاً با راس های یکسانی مجاور باشند (واضح است که در اینصورت y و z مجاور نمی باشند).

۰-۲۴ تعریف: راس x از G پایان[3] گفته می شود هرگاه فقط با یک راس از G، مجاور باشد.

۰-۲۵ تعریف: اگر R یک حلقه و M یک R-مدول باشد حلقه ای به صورت $(R\times M,+,.)$ که به ازای هر $(r,m),(s,n)\in R\times M$ ، $(r,m)+(s,n)=(r+s,m+n),\ (r,m)(s,n)=(rs,rn+sm)$ ، را ایده ال سازی[4]، مدول M روی حلقه R گویند و این حلقه را با $R(+)M$ نشان می دهند.

۰-۲۶ تذکر: بررسی حلقه بودن $R(+)M$ با اعمال فوق ساده می باشد و اگر R یک حلقه جابجایی و یکدار باشد $R(+)M$ نیز جابجایی و با عضو واحد $(۱,۰)$ است.

[1] Complemented
[2] Uniquely Complemented
[3] End
[4] Idealization

۰-۲۷ **تعریف:** فرض کنید R حلقه ای تعویض پذیر باشد. یک مقسوم علیه صفر R عضوی چون $x \in R$ است که به ازای آن عضوی ناصفر چون $y \in R$ موجود باشد که $xy = 0$. مجموعه مقسوم علیه های صفر R ، با $Z(R)$ نمایش داده می شود.

۰-۲۸ **تعریف:** فرض کنید R حلقه ای تعویض پذیر باشد. عضو $x \in R$ را پوچتوان گویند هرگاه به ازای عدد صحیح مثبت $n \geq 1$ ، $x^n = 0$. اگر n کوچکترین عدد صحیح مثبتی باشد، به طوریکه $x^n = 0$، گفته می شود که درجه پوچتوانی x، n می باشد. مجموعه همه اعضای پوچتوان حلقه R را با $Nil(R)$ نشان می دهند و بوضوح یک ایده آل R است.

۰-۲۹ **تعریف:** مجموعه همه اعضای پوچتوان حلقه R را که درجه پوچتوانی آنها دو می باشد با $N(R)$ نمایش می دهند. این مجموعه لزوماً یک ایده آل R نمی باشد.

۰-۳۰ **تعریف:** فرض کنید R حلقه ای تعویض پذیر باشد. رادیکال جیکبسن حلقه R را اشتراک همه ایده آل های ماکسیمال R تعریف می کنند، و آن را با $Jac(R)$ نشان می دهند.

۰-۳۱ **تعریف:** فرض کنید I و J ایده آل های حلقه تعویض پذیر R باشند تعریف می کنیم $(I:J)$ را به صورت $(I:J) = \{a \in R \mid aJ \subseteq I\}$. واضح است که $(I:J)$ یک ایده آل حلقه R است. در حالت خاص $I = 0$، $(0:J) = \{a \in R | aJ = 0\} = \{a \in R | ab = 0$ ، به ازای هر $b \in J\}$، پوچساز J نامیده می شود و با

$Ann_R(J)$ یا $Ann(J)$ نمایش داده می شود. به ازای $d \in R$، به جای $(I:\{d\})$ به اختصار می نویسیم $(I:d)$ و به همین نحو $(\circ:\{d\})$ را به اختصار $(o:d)$ نمایش می دهیم.

۰-۳۲ تعریف: ایده آل I از حلقه R را یک ایده آل پوچساز گویند هرگاه به ازای یک ایده آل J از R، $I = Ann(J)$.

۰-۳۳ نکته: اگر $Z(R)$ یک ایده آل پوچساز باشد، آنگاه به ازای یک ایده آل J از R، $Z(R) = Ann(J)$. در این صورت به ازای هر $\circ \neq x \in J$، $Z(R) = Ann(x)$. اگر $y \in Ann(x)$، آنگاه $y \in Z(R)$. لذا $Ann(x) \subseteq Z(R) = Ann(J)$. واضح است که $Ann(J) \subseteq Ann(x)$. بنابراین $Z(R) = Ann(x)$.

۰-۳۴ تعریف: عضو ناصفر x از حلقه تعویض پذیر و یکدار R را یکال گویند، هرگاه عضو ناصفر $y \in R$ موجود باشد بطوریکه $xy = ۱$. مجموعه تمام عناصر یکال R را با $U(R)$ نشان می دهند که تحت عمل ضرب حلقه R، یک گروه آبلی است.

۰-۳۵ لم: فرض کنید R حلقه ای تعویض پذیر باشد و $r \in R$. در این صورت $r \in Jac(R)$ اگر و تنها اگر به ازای هر $a \in R$ ، $۱-ra$ یکال باشد. از آنجاییکه $Nil(R) \subseteq Jac(R)$، بنابراین به ازای هر $r \in Nil(R)$، $۱+r$ یکال است.

برهان: لم ۳-۱۷ از مرجع [۱۵].

۰-۳۶ **تعریف:** فرض کنید R حلقه ای تعویض پذیر و $Z(R)$ مجموعه همه مقسوم علیه های صفر حلقه R باشد. گراف مقسوم علیه صفر حلقه R در واقع آن گرافی است که $Z(R)^*$ مجموعه رئوس گراف بوده، و دو راس x و y توسط یک یال به هم وصل می شوند اگر و تنها اگر $xy=0$.

۰-۳۷ **تعریف:** حلقه تعویض پذیر R را شبه موضعی گویند هر گاه تنها یک ایده آل ماکسیمال داشته باشد و حلقه R را موضعی گویند هرگاه شبه موضعی و نوتری باشد.

۰-۳۸ **تعریف:** زیر مجموعه S از حلقه تعویض پذیر R ضربی بسته است اگر

۱) $1 \in S$

۲) اگر $s_1, s_2 \in S$ ، آنگاه $s_1 s_2 \in S$.

۰-۳۹ **تعریف:** فرض کنید R یک حلقه تعویض پذیر باشد، با در نظر گرفتن مجموعه ضربی بسته $S = R \setminus Z(R)$، حلقه کسرهای $S^{-1}R$ را با $T(R)$ نمایش می دهند و آن را حلقه خارج قسمتی تام می گویند.

۰-۴۰ **تعریف:** فرض کنید P یک ایده آل اول حلقه تعویض پذیر R باشد. با در نظر گرفتن مجموعه ضربی بسته $S = R \setminus P$، حلقه کسرهای $S^{-1}R$ را با R_p نمایش می دهند و آن را موضعی سازی R در P می گویند.

۰-۴۱ **تعریف:** فرض کنید I یک ایده آل حلقه تعویض پذیر R باشد. رادیکال ایده آل I را با $Rad(I)$ نشان می دهند و عبارت است از:

$$Rad(I)=\{x|x^n \in R \text{ ، به ازای عدد صحیح } n\geq ۱\}$$

۰-۴۲ تعریف: حوزه صحیح D را یک حوزه ارزیابی[1] گویند هرگاه به ازای هر $x,y\in D$ ، $x|y$ یا $y|x$.

۰-۴۳ تعریف: حلقه تعویض پذیر R را مک کوی[2] گویند، هرگاه هر ایده آل متناهیاً تولید شده مشمول در $Z(R)$ ، پوچساز ناصفر داشته باشد.

۰-۴۴ [قضیه مک کوی]: فرض کنید R یک حلقه تعویض پذیر باشد. چند جمله ای $f(x)\in R[x]$ یک مقسوم علیه صفر است اگر و تنها اگر عضو ناصفر $r\in R$ وجود داشته باشد. بطوریکه $rf=۰$.

برهان: فرض کنید f یک مقسوم علیه صفر حلقه $R[x]$ باشد و $g=b_۰+b_۱x+...+b_mx^m$ چند جمله ای مینیمالی با این خاصیت باشد که $fg=۰$ و $b_m\neq ۰$. از اینکه $fg=۰$، نتیجه می شود که ضریب x^{n+m} صفر است. بنابراین $a_nb_m=۰$. $a_nfg=۰$ ، در نتیجه $f(a_ng)=۰$. در a_ng، داریم $a_nb_m=۰$. لذا $\deg(a_ng)<m=\deg(g)$. از آنجاییکه g چند جمله ای مینیمال با این خاصیت است که $fg=۰$، بنابراین $a_ng=۰$. لذا به ازای هر عدد صحیح $۰\leq j\leq m$، $a_nb_j=۰$.

$fg=(a_۰+a_۱x+...+a_nx^n)g=a_۰g+a_۱xg+...+a_{n-۱}x^{n-۱}g=۰$. بزرگترین درجه x در چند جمله ای fg، x^{n-1+m} است. $fg=۰$ ، بنابراین ضریب $x^{n-۱+m}$ صفر است یعنی $a_{n-۱}b_m=۰$.

$\deg(a_{n-۱}g)<m$ و $f(a_{n-۱}g)=۰$. لذا $a_{n-۱}g=۰$. در نتیجه به ازای هر عدد صحیح $۰\leq j\leq m$ ، $a_{n-۱}b_j=۰$. با ادامه همین روند، به ازای اعداد صحیح $۰\leq i\leq n$ و $۰\leq j\leq m$ ، $a_ib_j=۰$. قرار می دهیم $b=b_m$. در این صورت به ازای هر عدد صحیح $۰\leq i\leq n$ ، $a_ib=۰$.

---

[1] Valuation Domain
[2] McCoy Ring

$\Rightarrow$ عکس قضیه واضح است.

۰-۴۵ نکته: بر پایه این قضیه، توجه به این نکته جالب است که چه ارتباطی بین حلقه مک کوی و قضیه مک کوی وجود دارد. اگر I یک ایده آل متناهیاً تولید شده مشمول در $Z(R)$ باشد که $Ann(I)\neq 0$، آنگاه یک چند جمله ای مانند f یافت می شود که مقسوم علیه صفر $R[x]$ است یعنی در قضیه مک کوی صدق می کند.

فرض کنید $I=<a_0,a_1,\dots,a_n>$، ایده آل متناهیاً تولید شده مشمول در $Z(R)$ باشد. $Ann(I)\neq 0$. لذا $0\neq r\in Ann(I)$، وجود دارد بطوریکه $ra_0=ra_1=\dots=ra_n=0$. قرار می دهیم $f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$. در این صورت $rf=0$.

بر عکس، فرض کنید چند جمله ای $f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$، یک مقسوم علیه صفر باشد یعنی $0\neq a\in R$ وجود دارد بطوریکه $0=aa_0=aa_1=\dots=aa_n$. قرار می دهیم $I=<a_0,\dots,a_n>$. آنگاه $0\neq a\in Ann(I)$. کافی است نشان دهیم که $I\subseteq Z(R)$. $x\in I$. در نتیجه $x=r_0a_0+r_1a_1+\dots+r_na_n$. لذا $ax=0$. در نتیجه $x\in Z(R)$. یعنی یک ایده آل متناهیاً تولید شده مشمول در $Z(R)$، وجود دارد که پوچساز ناصفر دارد.

۰-۴۶ تعریف: حلقه تعویض پذیر R را، یک حلقه زنجیری [1] گویند هرگاه به ازای هر $x,y\in R$، $x\mid y$ یا $y\mid x$.

۰-۴۷ لم: فرض کنید R یک حلقه زنجیری باشد. در این صورت هر دو ایده آل اول R، قابل مقایسه اند.

[1] Chained Ring

برهان: فرض کنید P_1 و P_2، دو ایده آل اول حلقه زنجیری R باشند. فرض کنید $x \in P_1$. اگر $y \in P_2$ وجود داشته باشد به طوریکه $y|x$، آنگاه $r \in R$ وجود دارد به طوریکه $x = yr \in P_2$. در نتیجه $P_1 \subseteq P_2$. در غیر این صورت به ازای هر $y \in P_2$، $x|y$. در نتیجه $P_2 \subseteq P_1$.

۰–۴۸ نکته: هر حلقه ای که در آن هر دو ایده آل اول قابل مقایسه اند، شبه موضعی است.

۰–۴۹ تعریف: ایده آل اول P از حلقه تعویض پذیر R ، یک ایده آل اول تقسیم شده[۱] گفته می شود هرگاه به ازای هر $x \in R \setminus P$ ، $P \subseteq xR$.

۰–۵۰ تعریف: حلقه تعویض پذیر R، حلقه تقسیم شده [۲] گفته می شود هرگاه هر ایده آل اول R، تقسیم شده باشد.

۰–۵۱ لم: : فرض کنید R یک حلقه تقسیم شده باشد. در این صورت هر دو ایده آل اول R،قابل مقایسه اند.

برهان: فرض کنید P_1 و P_2، دو ایده آل اول تقسیم شده حلقه R باشند. اگر $P_1 \subseteq P_2$، آنگاه چیزی برای اثبات نداریم. در غیر این صورت $x \in P_1$، وجود دارد به طوریکه $x \in P_2$. لذا $x \in R \setminus P_2$. در نتیجه $P_2 \subseteq xR \subseteq P_1$. برهان فوق نشان می دهد که یک ایده آل اول تقسیم شده در حلقه R با هر ایده آلی از R قابل مقایسه است. به راحتی می توان مشاهده کرد که Z یک حلقه تقسیم شده نمی باشد زیرا ایده آل های اول آن قابل مقایسه نمی باشند، زیرا هر ایده آل اول آن ماکسیمال است.

---

[۱] Divided Prime Ideal
[۲] Divided Ring