تقریبی از جواب معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم خطی مراتب بالاتر با تأخیر زمانی

توسط

میترا جزمحتشمی

رسالهٔ ارائه شده به عنوان بخشی از ملزومات برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد ریاضیات کاربردی

زیر نظر

دکتر اردوخانی

پاییز ۱۳۸۹

دانشکدهٔ علوم پایه

دانشگاه الزهراء (س)

تهران

قدردانی

در اینجا دوست دارم از همه تشکر کنم

چکیده

هدف اصلی در این رساله، حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم خطی با تأخیر زمانی به صورت

$$\sum_{k=0}^{m} P_k(x)y^{(k)}(x)+\sum_{r=0}^{n} P_r^*(x)y^{(r)}(x-\tau)=f(x)+\int_a^b K(x,t)y(t-\tau)dt,\ \tau\geq 0,$$

با شرایط آمیخته

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_{ik}y^{(k)}(a)+b_{ik}y^{(k)}(b)+c_{ik}y^{(k)}(c)=\mu_i,\quad i=0,1,\cdots,m-1,\ a\leqslant c\leqslant b,$$

با استفاده از روش های تیلور، هم محلی چبیشف و هم محلی لژاندر می‌باشد. که در آن y تابع مجهول، P_k، P_r^* و f توابع معلوم در $L^2[a,b]$ و همچنین K تابع معلوم در $L^2([a,b]\times[a,b])$ و ضرایب a_{ik}، b_{ik}، c_{ik} و μ_i ها ثابت های معلوم می‌باشد.

در روش بسط تیلور، جواب را به صورت سری تیلور قطع شده تقریب می‌زنیم. به دنبال ضرایب بسط تیلور می‌باشیم که در نهایت از حل یک دستگاه معادلات خطی، ضرایب مجهول تیلور به دست می‌آیند.

در روش‌های هم محلی چبیشف و لژاندر، سری چبیشف و لژاندر قطع شده جواب معادله را در نظر گرفته و معادله انتگرال-دیفرانسیل و شرایط داده شده را به یک معادله ماتریسی تبدیل می‌کنیم، سپس با استفاده از نقاط هم محلی چبیشف در روش چبیشف و نقاط گاوس-لژاندر در روش لژاندر، معادله ماتریسی تبدیل به یک دستگاه از معادلات جبری خطی با ضرایب مجهول چبیشف و لژاندر می‌شود. در آخر کارایی روش را با مثال‌هایی مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم.

همچنین روش های فوق را برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم غیرخطی با تأخیر زمانی

$$\sum_{k=0}^{m} P_k(x)y^{(k)}(x)+\sum_{r=0}^{l} P_r^*(x)y^{(r)}(x-\tau) = f(x)+\int_a^b K(x,t)[y(t-\tau)]^n dt,\ \tau \geq 0,$$

با شرایط آمیخته

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_{ik}y^{(k)}(a)+ b_{ik}y^{(k)}(b)+ c_{ik}y^{(k)}(c)=\mu_i,\ \ i=0,1,\cdots,m-1,\ a\leqslant c \leqslant b,$$

نیز به کار می‌بریم.

واژه‌های کلیدی: *معادلات انتگرال- دیفرانسیل فردهلم با تأخیر زمانی، بسط تیلور، هم محلی چبیشف، هم محلی لژاندر، نقاط گاوس-لژاندر.*

فهرست مطالب

مقدمه

معادلات انتگرال-دیفرانسیل ابتدا در اوایل سال ۱۹۰۰ توسط ولترا[۱] معرفی شد [۳-۱].
این معادلات در شاخه های مختلف علوم و مهندسی مطرح می‌شوند [۶-۴].
امروزه استفاده از توابع متعامد برای حل معادلات انتگرال مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. ویژگی اصلی این تکنیک آن است که این گونه معادلات را به دستگاه‌هایی با معادلات جبری تبدیل می‌کند. برای این منظور سری قطع شده توابع متعامد را با ضرایب مجهول به عنوان تقریبی از جواب مسأله در نظر گرفته، سپس با استفاده از نقاط مناسب، دستگاه را به یک دستگاه جبری خطی یا غیرخطی تبدیل می‌کنند.
بحث اصلی در این رساله حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم با تأخیر زمانی از مراتب بالا می‌باشد.
ولک[۲] در سال ۱۹۸۵ از روش‌های تصویری [۷]، ایاد[۳] در سال ۱۹۹۶ از روش‌های هم محلی و توابع اسپلاین [۸]، یال سین باس[۴] در سال ۲۰۰۰ به کمک چندجمله‌ای های تیلور [۹] و بهیری[۵] در سال ۲۰۰۲ به کمک موجک دابیشز به همراه روش‌های هم محلی و گالرکین [۱۰]، به حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم پرداختند. هم چنین در مرجع [۱۱] در سال ۲۰۰۶ روش موجک شبه متعامد بی اسپلاین و در [۱۲] در سال ۲۰۱۰ روش والش برای حل این نوع معادلات مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته‌اند. ضمناً روش اسپلاین [۱۳]، روش شبه متعامد موجک اسپلاین [۱۴]، روش رونگه-گوتا [۱۵]،

---

[۱] Volterra
[۲] Volk
[۳] Ayad
[۴] Yalcinbas
[۵] Behiry

روش هار گویا شده [۱۶]، روش تیلور [۱۷ و ۱۸]، روش چبیشف [۱۹] و روش لژاندر [۲۰] برای حل معادلات انتگرال- دیفرانسیل با تأخیر زمانی به کار رفته است. محور کار در این مقاله بر اساس مرجع [۱۸] میباشد که توسط سزر[۶] ارائه شده است.

این رساله در چهار فصل تنظیم گردیده است. در فصل اول، مقدماتی از آنالیز حقیقی و عددی که مورد نیاز فصل های بعدی است، ارائه می‌گردد. در فصل دوم به معرفی معادلات انتگرال و معادلات انتگرال- دیفرانسیل پرداخته و قضایای وجود و یکتایی جواب و چند روش تحلیلی و عددی مرسوم جهت حل انواع خاصی از معادلات انتگرال- دیفرانسیل فردهلم را مورد توجه قرار می‌دهیم. در فصل سوم، حل عددی معادلات انتگرال- دیفرانسیل فردهلم خطی با تأخیر زمانی از مراتب بالا با استفاده از روش سری تیلور، هم محلی چبیشف و هم محلی لژاندر بیان و با ارائه مثال های عددی، این روش ها مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. در فصل چهارم به حل عددی معادلات انتگرال- دیفرانسیل فردهلم غیرخطی با تأخیر زمانی از مراتب بالا با استفاده از روش‌های ذکر شده و ارائه چند مثال عددی می‌پردازیم.حاصل این تلاش منجر به چاپ یک مقاله در مجله علمی پژوهشی ($J.\ Sci.\ Tarbiat\ Moallem\ University,\ Vol$ ۹, $No.$ ۱, $Winter$ ۲۰۱۰) گردیده است که این مجله در لیست ISC قرار دارد.

[۶] Sezer

فصل ۱

پیش نیازها

به منظور درک بهتر مطالب در این پایان نامه، تعاریف و قضایایی مورد نیاز است که در این فصل آورده شده است [۲۳-۲۱] . همچنین این تعاریف و قضایا نقش مهمی در تحلیل روش‌های عددی به کار رفته در حل معادلات انتگرال - دیفرانسیل دارند.

۱.۱ مفاهیم پایه در آنالیز حقیقی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری (خطی) حقیقی یا مختلط باشد. تابع $\|.\| : X \to \mathbb{R}^+$ را یک نرم می‌نامیم هرگاه

۱) به ازای هر $x \in X$، $\|x\| \geq 0$ و $x = 0$ اگر و تنها اگر $\|x\| = 0$.

۲) به ازای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ ، $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$.

۳) به ازای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

تبصره. *نرم در رابطه زیر صدق می‌کند*

$$| \, \|x\| - \|y\| \, | \leqslant \|x - y\|.$$

برهان [۲۲].

تعریف ۲.۱.۱. فضای برداری X، خطی نامیده می شود اگر

$$\forall x, y \in X, \quad \|x + y\| = \|x\| + \|y\|.$$

تعریف ۳.۱.۱. فضای خطی X، مجهز به نرم $\|.\|$ را یک فضای خطی نرم‌دار می‌نامند.

تعریف ۴.۱.۱. دنباله $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ را در فضای خطی نرم‌دار X همگرا به $x \in X$ گویند هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N; \quad \forall n \geq N \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

به عبارت دیگر $Lim\|x_n - x\| = 0$ وقتی که $n \to \infty$.

تعریف ۵.۱.۱. دنباله $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ را در فضای خطی نرم‌دار X دنباله کشی[1] می‌نامند هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N; \quad \forall n,m \geq N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

به آسانی می‌توان نشان داد که هر دنباله همگرا یک دنباله کشی است.

تعریف ۶.۱.۱. فضای نرم‌دار خطی X را کامل گوییم هرگاه هر دنباله کشی در X، به یک عضو X همگرا باشد.

تعریف ۷.۱.۱. هر فضای نرم‌دار کامل را فضای باناخ[2] گوییم.

تعریف ۸.۱.۱. اگر $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله ای در فضای نرم‌دار X باشد، گوییم سری $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ در X همگرا به x است، هرگاه دنباله $S_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_i$ همگرا به x باشد و در این صورت می‌نویسیم $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x$.

سری $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ را همگرای مطلق نامیم هرگاه $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

قضیه ۱.۱.۱. *فضای نرم‌دار X باناخ است، اگر و تنها اگر هر سری همگرای مطلق در آن همگرا باشد.*

تعریف ۹.۱.۱. یک فضای خطی مختلط (حقیقی) همانند X را فضای ضرب داخلی گوییم، هرگاه تابعی مختلط (حقیقی) مانند $(.,.)$ روی $X \times X$ تعریف شده باشد که برای هر $x, y, z \in X$ و هر عدد اسکالر مانند $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ در شرایط زیر صدق نماید

۱) $(x,x) \geq 0, x = 0 \Leftrightarrow (x,x) = 0$.

۲) $(x,y) = \overline{(y,x)}$.

۳) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$.

---

[1] Cauchy
[2] Banach

از روابط فوق داریم،

$$(z, \alpha x + \beta y) = \overline{\alpha}\ \overline{(x, z)}\ + \overline{\beta}\ \overline{(y, z)}\ = \overline{\alpha}\ (z, x) + \overline{\beta}\ (z, y).$$

تبصره. *توجه کنید که در فضای ضرب داخلی داریم* $0 = (x, 0) = (0, x)$.

تذکر. هر فضای ضرب داخلی با نرم $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ یک فضای خطی نرم‌دار است.

تعریف ۱.۱.۱۰. بهترین تقریب در فضای خطی نرم‌دار
فرض کنید $U \subseteq X$ یک زیر مجموعه از فضای خطی نرم‌دار X و $x \in X$ باشد، یک عضو $u^* \in U$ را بهترین تقریب x نسبت به U نامند اگر

$$\|x - u^*\| = Inf_{u \in U}\ \|x - u\|.$$

u^* کوچکترین فاصله را تا x دارد.

قضیه ۱.۱.۲. *فرض کنید $U \subset X$ زیر فضا با بعد متناهی از فضای خطی نرم دار X باشد، آنگاه برای هر عنصر $x \in X$ یک بهترین تقریب نسبت به U وجود دارد.*
برهان [۲۳].

قضیه ۱.۱.۳. *نامساوی کشی - شوارتز*[۳]
فرض کنید X فضای ضرب داخلی باشد، در این صورت

$$\forall x, y \in X, \quad |(x, y)| \leq \|x\|\ \|y\|.$$

و تساوی زمانی برقرار است که x, y وابسته ی خطی باشند.
برهان [۲۳].

تعریف ۱.۱.۱۱. فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی بوده و $x, y \in X$ متمایز باشند، x را بر y عمود گوییم، هرگاه $(x, y) = 0$ و آنرا با نماد $x \perp y$ نمایش می‌دهیم.

چنانچه x و y در فضای ضرب داخلی بر هم عمود باشند، رابطه ی زیر را داریم

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

---
[۳] Cauchy-Showartz

تعریف ۱۲.۱.۱. زیر مجموعه S از فضای ضرب داخلی X را متعامد گوییم هرگاه

$$\forall x, y \in S; \quad (x, y) = ۰, \quad x \neq y.$$

هم‌چنین زیر مجموعه S از فضای ضرب داخلی X را متعامد یکه گوییم هرگاه

$$\forall x \in S; \quad \|x\| = ۱.$$

تعریف ۱۳.۱.۱. مکمل متعامد زیر مجموعه S از فضای ضرب داخلی X را با $S^{\perp}$ نمایش می‌دهیم و شامل همه‌ی عناصری از X است که بر S عمود باشد. به عبارت دیگر داریم

$$S^{\perp} = \{y \in X | y \perp S\}.$$

تعریف ۱۴.۱.۱. تابع $f : X \to R$ را اندازه پذیر می‌نامیم هرگاه برای هر مجموعه باز $A \subseteq R$، $f^{-۱}(A)$ مجموعه‌ای اندازه‌پذیر باشد.

تعریف ۱۵.۱.۱. فضای $L^p(a, b)$ برای $۱ \leq p \leq \infty$، شامل توابع اندازه‌پذیر $f(t)$، حقیقی (مختلط) می‌باشد که

$$\int_a^b |f(t)|^p dt < +\infty.$$

با فرض $p = ۲$، اگر $f, g \in L^۲(a, b)$ باشد، آنگاه حاصلضرب داخلی دو تابع f, g به شکل زیر تعریف می‌شود

$$(\, f(t), g(t)\,) = \int_a^b f(t)\, \overline{g(t)}\, dt.$$

قضیه ۴.۱.۱. *فضای $L^۲(a, b)$ تشکیل یک فضای برداری نرم دار کامل می‌دهد.*

برهان [۲۱].

تعریف ۱۶.۱.۱. فضای ضرب داخلی H را یک فضای هیلبرت[۴] گوییم هرگاه H نسبت به نرم تولید شده از ضرب داخلی $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ یک فضای باناخ باشد.

[۴] Hilbert

فضای مورد بحث، فضای $L^{۲}(a,b)$ است که یک فضای هیلبرت است و نرم تابع $f(t)$ متعلق به $L^{۲}(a,b)$ در آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|f(t)\|^{۲} = (\int_a^b |f(t)|^{۲} dt)^{\frac{۱}{۲}}.$$

تعریف ۱.۱.۱۷. اگر $\kappa(x,y)$ تابعی در $L^{۲}((a,b)\times(a,b))$ باشد، آنگاه تابع

$$\|\kappa\|_{۲} = (\int_a^b \int_a^b |\kappa(x,y)|^{۲} dxdy)^{\frac{۱}{۲}}$$

یک نرم است.

قضیه ۱.۱.۵. *اگر A یک زیر مجموعه‌ی متعامد یکه از فضای هیلبرت H باشد، آنگاه سری فوریه $\sum_{x\in A}(y,x)x$ مستقل از ترتیب جملات همگراست.*

تعریف ۱.۱.۱۸. اگر X یک فضای ضرب داخلی و A زیر مجموعه‌ی X باشد، A را کامل نامیم، هرگاه برای $y\in X$، اگر $(y,x)=۰$ برای هر $x\in X$، آنگاه $y=۰$ یعنی

$$A^{\perp} = ۰.$$

تعریف ۱.۱.۱۹. اگر X یک فضای ضرب داخلی و A یک زیر مجموعه‌ی متعامد یکه از X باشد، آنگاه A را پایه متعامد یکه برای X نامیم هرگاه به ازای هر $y\in X$ داشته باشیم

$$y \doteq \sum_{x\in A}(y,x)x,$$

که در آن $\doteq$ به معنی تقریباً همه جا می‌باشد.

قضیه ۱.۱.۶. *اگر A یک زیر مجموعه متعامد یکه از فضای هیلبرت H باشد، آنگاه شرایط زیر معادل هستند*

۱) *برای هر $y\in H$، اتحاد پارسوال[۵] $\|y\|^{۲} = \sum_{x\in A}|(x,y)|^{۲}$ برقرار است.*

۲) *A کامل است.*

[۵] Parseval

۳) A *یک پایه متعامد یکه است.*

برهان [۲۳].

با توجه به این قضیه، اگر A یک زیر مجموعه متعامد نرمال (یکه) کامل از فضای هیلبرت H باشد، آنگاه هر عنصر $y \in H$ را می‌توان به صورت سری فوریه $\sum_{x\in A}(y,x)x$ بسط داد که سری فوریه مذکور مستقل از ترتیب جملات به y همگراست.

تعریف ۲۰.۱.۱. تابع w را بر $[a,b]$ یک تابع وزن گوییم هرگاه

۱) w بر (a,b) نامنفی باشد.

۲) w بر $[a,b]$ انتگرال پذیر باشد.

۳) w بر هیچ زیر بازه (a,b) متحد با صفر نباشد.

قبلاً در $L^۲$ ضرب داخلی را تعریف کردیم، حال ضرب داخلی وزن دار دو تابع fو g نسبت به تابع وزن w را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f,g)_w = \int_a^b w(t)f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

فرض کنیم $f \in C[a,b]$ و w یک تابع وزن بر $[a,b]$ باشد و $\{f_i(x)\}_{i=۰}^n$ یک خانواده از توابع روی $[a,b]$ باشد، تقریب کمترین مربعات وزن دار f از درجه n، تابع

$$P_n(x) = \sum_{k=۰}^{m} a_k f_k(x),$$

است که در آن a_kها به گونه‌ای هستند که خطای کمترین مربعات، یعنی

$$E = \int_a^b w(x)|f(x)-P_n(x)|^۲ dx = \|f-P_n\|_۲^۲,$$

حداقل شود. می‌دانیم شرط لازم برای به حداقل رساندن E آن است که

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = ۰, \qquad j = ۰, ۱, \ldots, n.$$

در این صورت داریم

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b w(x)f_j(x)f_k(x)\,dx = \int_a^b w(x)f(x)f_j(x)\,dx, \qquad j = 0, 1, \ldots, n,$$

که رابطه بالا، یک دستگاه $(n+1)$ معادله با $(n+1)$ مجهول است.

۲.۱ سیستم های متعامد

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید دنباله $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله از توابع در $L^2[a,b]$ باشد، این دنباله را متعامد گوییم هرگاه برای f_i و f_j داشته باشیم

$$(f_i, f_j) = 0, \qquad i, j = 1, 2, \ldots \qquad i \neq j.$$

بعلاوه اگر داشته باشیم $(f_i, f_i) = 1$ یعنی $\|f_i\| = 1$، آنگاه دنباله‌ی فوق را یک دنباله‌ی متعامد یکه یا نرمال گوییم.

مثال ۱: دنباله‌ی مثلثاتی $e^{2\pi inx}$ برای $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ در بازه $0 \leqslant x \leqslant 1$، یک دنباله متعامد یکه است.

مثال ۲: دنباله چند جمله‌ای‌های لژاندر $\{L_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ در بازه $-1 \leqslant x \leqslant 1$ با تابع وزن $w(x) = 1$، متعامدند.

مثال ۳: دنباله چند جمله‌ای‌های چبیشف $\{T_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ در بازه $-1 \leqslant x \leqslant 1$ با تابع وزن $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$، متعامدند.

قضیه ۱.۲.۱. *دنباله توابع متعامد یکه، مستقل خطی هستند.*

تعریف ۲.۲.۱. دستگاه متعامد نرمال $\{f_i\}$ را یک دستگاه متعامد نرمال کامل می‌نامیم، هرگاه هیچ دستگاه نرمال گسترده‌تری از آن وجود نداشته باشد. به عبارت دیگر، اگر

$$\exists f, \quad \forall i, \quad (f, f_i) = 0 \Rightarrow f \doteq 0.$$

قضیه ۲.۲.۱. *تقریب میانگین مربعات*
اگر $\{f_i(t)\}_{i=1}^{n}$ دنباله ای از توابع متعامد نرمال (یکه) در $L^2(a,b)$ باشند و $f \in L^2(a,b)$،

آنگاه $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ *وجود دارند به طوری‌که* $\|f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\|$ *حداقل است و به* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ *تقریب میانگین مربعات یا تقریب کمترین مربعات* f *گوییم.*

اثبات:

فرض کنیم $\eta_i = (f, f_i)$*، لذا داریم*

$$\begin{aligned}
\|f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\|^2 &= (f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \,, f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i) \\
&= (f\,, f) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (f_i\,, f) - \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_i (f\,, f_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha}_j (f_i\,, f_j) \\
&= \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\eta}_i - \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_i \eta_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha}_i + \sum_{i=1}^{n} \eta_i \overline{\eta}_i - \sum_{i=1}^{n} \eta_i \overline{\eta_i} \\
&= \|f\|^2 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \eta_i)(\overline{\alpha}_i - \overline{\eta}_i) - \sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^2 \\
&= \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \eta_i|^2
\end{aligned}$$

این عبارت زمانی مینیمم است که برای $i = 1, 2, \cdots, n$*،* $\alpha_i = \eta_i$*. در این صورت*

$$\|f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^2.$$

بنابراین اگر $f \in L^2(a, b)$ *و* $\{f_i\}_{i=1}^{n}$ *یک سیستم متعامد نرمال در* L^2 *باشد آنگاه*

$$\|f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\|,$$

حداقل است. به عبارت دیگر اگر $f \simeq \sum_{i=1}^{n} (f\,, f_i) f_i$*، آنگاه* $\|f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\|$ *حداقل است.*

۱.۲.۱ چندجمله‌ای های چبیشف

دنباله چندجمله‌ای های چبیشف $\{T_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ روی فاصله $[-1, 1]$ نسبت به تابع وزن $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ متعامدند و یک سیستم متعامد کامل در فضای $L^2[-1, 1]$ می‌باشند

که در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کنند،

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = x,$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \cdots .$$

این چند جمله‌ای‌ها را به صورت زیر نیز می‌توان تعریف کرد

$$T_n(x) = cos(ncos^{-1}x), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots .$$

$T_n(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n است که ضریب بزرگترین توان آن 2^{n-1} است. ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف را صفرهای چبیشف یا نقاط چبیشف می‌نامیم. لذا داریم

$$T_n(x) = 0 \to x_j = cos(\frac{j\pi}{2n}), \qquad j = 0, 1, \cdots , n.$$

همچنین خاصیت تعامدی این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر است:

$$< T_n, T_m >= \int_{-1}^{1} w(x)T_n(x)T_m(x)dx = \begin{cases} \pi, & n = m = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & n = m \neq 0, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

اگر چندجمله‌ای‌های چبیشف را روی بازه $[a, b]$ در نظر بگیریم، به آن چندجمله‌ای‌های چبیشف انتقال یافته گوییم که برای هر $x \in [a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$T_n^*(x) = T_n(\frac{2x - a - b}{b - a}), \qquad n = 0, 1, \cdots .$$

چندجمله‌ای‌های چبیشف در خاصیت های زیر نیز صدق می‌کنند

$$\star T_n(x) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{T'_{n+1}(x)}{n+1} - \tfrac{T'_{n-1}(x)}{n-1}), \qquad n \geq 2,$$

$$\star\ 2T_n(x)T_m(x) = T_{n+m}(x) + T_{|n-m|}(x),$$

$$\star\, T_n^2(x) - T_{n+1}(x)T_{n-1}(x) = 1 - x^2, \qquad n \geq 1,$$

$$\star \int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)dx = \begin{cases} \frac{1}{1-(n+m)^2} + \frac{1}{1-(n-m)^2}, & n+m = 2k, \\ 0 & , \quad n+m = 2k+1, \end{cases}$$

$$\star \int_a^b T_n^*(x)T_m^*(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)dx,$$

$$\star \int_{-1}^{1} T_n(x)dx = \begin{cases} \frac{2}{1-n^2}, & n = 2k, \\ 0 \quad , & n = 2k+1. \end{cases}$$

۲.۲.۱ چندجمله‌ای‌های لژاندر

دنباله چندجمله‌ای‌های لژاندر $\{L_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ روی فاصله $[-1,1]$ نسبت به تابع وزن $w(x)=1$ متعامدند و یک سیستم متعامد کامل در فضای $L^2[-1,1]$ می‌باشند که در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کنند

$$L_0(x) = 1,$$

$$L_1(x) = x,$$

$$L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xL_n(x) - \frac{n}{n+1}L_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

چندجمله‌ای‌های لژاندر در شرایط زیر صدق می کنند

۱) به ازای هر n، چندجمله‌ای لژاندر L_n از درجه n است.

۲) به ازای هر چندجمله‌ای $L(x)$ از درجه کمتر از n داریم $\int_{-1}^{1} L(x)L_n(x)dx=0$.

اگر بازه انتگرال گیری، بازه دلخواه (a,b) باشد با تغییر متغیر $t = \dfrac{2x-a-b}{b-a}$ به بازه $(-1,1)$ قابل تغییر است.

برخی از خواص مهم چند جمله‌ای‌های لژاندر عبارت‌اند از:

۱) چند جمله‌ای‌های لژاندر را می‌توان از رابطه زیر که به فرمول ردریگز[۶] معروف است به دست آورد

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}; \qquad L_n(1) = 1.$$

۲) ریشه های این چندجمله‌ای‌ها، متمایز، متقارن نسبت به صفرند و در بازه $(-1,1)$ قرار دارند.

۳) نقاط گاوسی در (a,b) ریشه های $L_n(\frac{2x-a-b}{b-a})$ هستند.

۳.۱ انتگرال‌گیری عددی

در انتگرال‌گیری عددی اغلب لازم است که انتگرال معین تابعی محاسبه شود که هیچ پاد مشتق صریحی نداشته باشد و یا مقادیر پاد مشتق آن به آسانی به دست نمی‌آید [۲۴]. روش تقریب $I(f) = \int_a^b f(x)dx$، روش انتگرال‌گیری عددی نامیده می‌شود و عموماً شامل فرمولی از نوع $I_{n+1}(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$ برای تقریب $I(f)$ است. خطای این تقریب را به صورت

$$E_{n+1}(f) = I(f) - I_{n+1}(f),$$

نمایش می‌دهیم و هدف مینیمم سازی این خطا می‌باشد. در روش‌های انتگرال‌گیری عددی تقریب ارائه شده به ازای چند رده از چندجمله‌ای‌ها نتیجه دقیق می‌دهند. تعریف زیر برای این منظور ارائه شده است.

تعریف ۱.۳.۱. درجه دقت یا صحت یک فرمول انتگرال‌گیری، عدد صحیح و مثبت n است بطوریکه به ازای هر چندجمله‌ای p_k از درجه نابیشتر از n، $E(p_k) = 0$ ولی به ازای چندجمله‌ای از درجه $n+1$، $E(p_{n+1}) \neq 0$. با توجه به خطی بودن انتگرال می‌توان تعریف فوق را به صورت زیر بیان نمود.

[۶] Rodrigues