وزارت علوم ، تحقیقات و فناوری

دانشگاه بین المللی امام خمینی

IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشکده علوم پایه

گروه فیزیک

تابع ویگنر در نمایش حالت های در هم تنیده

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته فیزیک
گرایش اتمی و مولکولی

زینب یعقوبی

استاد راهنما:
دکتر الهه نحوی فرد

استاد مشاور:
دکتر محمدرضا بذرافکن

دی ۹۱

چکیده

پایه حالت های در هم تنیده دو مدی نمایشی طبیعی برای سیستم های دو مدی است. به دلیل اینکه در هم تنیدگی کوانتمی در شاخه های مختلف فیزیک کاربرد پیدا کرده است بیان حالت ها بر این پایه نه تنها باعث سهولت ریاضی در محاسبات می شود بلکه ویژگی های اصلی حالت های کوانتمی را نیز آشکار می کند. تابع ویگنر در نمایش حالت های در هم تنیده، تعمیم تابع ویگنر متعارف به سیستم های دو بعدی در هم تنیده است. اگر چه از نمایش حالت های درهم تنیده برای حل معادلات تحول زمانی سیستم های کوانتمی (مانند معادله مستر) استفاده شده است ولی علیرغم وجود چند مقاله از این نوع تابع ویگنر، بخاطر تازگی موضوع ، کمتر برای حل مسائل استفاده شده است. ما در این کار برای حالت های کوانتومی درهم تنیده تئوری تابع ویگنر در هم تنیده را معرفی کردیم. ابتدا فرم اپراتور ویگنر در هم تنیده را از روی اپراتور ویگنر دو مدی به دست آوردیم و فرم نرمال اپراتور ویگنر درهم تنیده را نیز محاسبه کردیم. خواص ریاضی این اپراتور از جمله رابطه ی بستاری و تعامد را بررسی کردیم و همچنین اندازه ی تابع ویگنر در هم تنیده را به دست آوردیم. از روی اپراتور ویگنر در هم تنیده معادله تحول زمانی را برای سیستم هایی که دو ذره ای هستند و پتانسیل آن ها تابعی از فاصله ی نسبی بین دو ذره است مطالعه کردیم. همچنین به کمک این ویگنر جدید اپراتور را در ترتیب وایل بررسی کردیم و نشان دادیم فرم ضرب دو اپراتور در ترتیب وایل چگونه خواهد بود.این کار زیبایی حالت های درهم تنیده را بیشتر نشان می دهد.

کلید واژه : عملگر ویگنر ، حالت درهم تنیده ، عملگر ویگنر درهم تنیده ، نماد وایل ویگنر درهم تنیده ، ضرب اپراتورها در ترتیب وایل

فهرست مطالب

فصل اول :نمایش فضای فازعملگر چگالی و حل مسئله سیستم های باز

فصل دوم :نمایش حالت در هم تنیده

فهرست مطالب

فهرست مطالب

مقدمه

در مکانیک کوانتومی حالت یک سیستم به وسیله ی عملگر چگالی $\hat{\rho}$ توصیف می شود.از روزگار دور و تقریبا چند سالی بعد از ظهور مکانیک کوانتمی روش‌های رقیب برای نمایش حالات کوانتمی یکی پس از دیگری اختراع شدند. این روش ها نمایش‌های جدیدی را از مکانیک کوانتمی معرفی می‌کنند که هم درک آنها از نظر روانی آسانتر است و هم در بعضی از شاخه های فیزیک، مثل اپتیک کوانتمی، سهولت قابل ملاحظه‌ای در محاسبات ایجاد می‌کنند.از جمله ی این نمایش ها که حالت کوانتومی یک سیستم را به صورت مستقیم به نمایش می گذارد، و بر فضای فاز کلاسیک قرار می گیرد، نمایش حالت به وسیله توابع ویگنر، هوسیمی- کانو و تابع گلاوبر- سودارشان است.

نمایش تابع ویگنری مکانیک کوانتمی که اخیرا بسیار مورد توجه واقع شده است در واقع اولین رقیب فرمالیزم متعارف مکانیک کوانتمی بود. تابع ویگنر یک تبدیل خطی معکوس‌پذیر از عناصر ماتریسی عملگر چگالی بر پایه مکان (و بنا بر این هر ویژه‌پایه دلخواه دیگر) است طوری که نتیجه تبدیل همواره یک تابع حقیقی خواهد بود. این تابع نخستین بار در مقاله‌ای از ویگنر و در سال ۱۹۳۲ میلادی به منظور اعمال تصحیحاتی بر روی تابع توزیع توام کلاسیکی مکان و تکانه $W_c\,(q,p)$ ، معرفی شد. قصد ویگنر آن بود که با اعمال این تصحیحات از تابع توزیع توام کلاسیکی مکان و تکانه نتایج مربوط به مکانیک کوانتمی را به‌دست آورد.

یک شیوه نمایش دیگر حالت های کوانتومی توابع ویگنر در هم تنیده می باشد. که به طور عمده برای سیستم های دو ذره ای مفید می باشد. پایان نامه حاضر تلاشی برای آشنائی و بکارگیری نمایش اپراتور ویگنر درهم تنیده می باشد.

فصل های اول و دوم به معرفی مختصر تابع ویگنر تک مدی و بـه معرفـی نمـایش حالـت هـای درهم تنیده و ویژگی های ریاضی آن می پردازد. فصل سوم ابتدا معادله راهبر را در نمایش حالت

درهم تنیده معرفی می کنیم و سپس روش حل آنرا نمایش می دهیم سپس تکنیک های ریاضی و قضایای مورد نیاز برای باز سازی عملگر چگالی سیستم را معرفی می کنیم. فصل چهارم ابتدا اپراتور ویگنر در هم تنیده را از روی ایراتور ویگنر دو مدی محاسبه می کنیم. و کلیه ی خواص ریا ضی آن را بررسی کر ده ایم. در ادامه برای این که توان این اپراتور جدید را نشان دهیم معادله ی فون نویمن را برای یک سیستم دو ذره ای به کمک تابع ویگنر در هم تنیده نوشته ایم. فصل پنجم ضرب ستاره ای دو تابع ویگنر درهم تنیده می باشد که در واقع برای تکمیل خواص تابع ویگنر درهم تنیده عنوان شده است.

فصل اول

نمایش فضای فاز عملگر چگالی

و حل مسئله سیستم های باز

۱-۱ نمایش های شبه احتمالی در مکانیک کوانتمی

در مکانیک کوانتومی حالت یک سیستم بوسیله عملگر چگالی $\hat{\rho}$ توصیف می شود. به علت درهم تنیدگی حالت سیستم مرکب (سیستم- محیط) این نوع توصیف حالت در مورد سیستم های باز الزامی به نظر می رسد. اگرچه نمایش ماتریسی عملگر چگالی بر ویژه پایه های مشاهده پذیر های مختلف، مانند انرژی ، در مکانیک کوانتمی متداول است اما نمایش های فضای فاز کلاسیک مانند نمایش حالت بوسیله تابع ویگنر که با اختصار در این فصل بررسی می شود برای کاربرد در حوزه سیستم های باز مفید تر هستند. در اینجا با یکی از این نمایش ها و کاربرد آن برای حل معادله تحول زمانی حالت سیستم در برهم کنش با محیط اتلافی به اختصار بحث خواهیم کرد.

۱-۲ عملگر ویگنر

در بحث مکانیک کوانتمی نوسانگر هماهنگ، عملگرهای مکان و تکانه بی بعد، برحسب عملگرهای خلق و فنای نوسانگر هماهنگ با جابجایی $\left[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}\right]=\hat{1}$، به شکل $\hat{q}=\left(\hat{a}+\hat{a}^{\dagger}\right)/\sqrt{2}$ و $\hat{p}=\left(\hat{a}-\hat{a}^{\dagger}\right)/i\sqrt{2}$ تعریف شوند. لذا رابطه جابجاگری بین مکان و تکانه بی بعد $[\hat{q},\hat{p}]=i$ خواهد بود. همینطور اگر $\{|q\rangle \mid q\in\mathbb{R}\}$ ها ویژه بردارهای عملگر مکان بی بعد $\hat{q}$ باشند آنگاه نمایش عملگر تکانه بی بعد بر پایه مکان بی بعد به شکل $\langle q|\hat{p}\cdots=-i\partial_q\langle q|\cdots\rangle$ خواهد بود.

عملگر ویگنر[۱] را بر حسب انتگرالی از حاصلضرب های (کت- برا) ها به شکل زیر تعریف می شود :

$$\hat{W}(q,p)\triangleq\int du e^{-iup}|q-u/2\rangle\langle q+u/2|. \quad (۱,۱)$$

که در این تعریف $\langle q|$پایه مکان است. به سادگی می توان دید که $\hat{W}(q,p) = \hat{W}^{\dagger}(q,p)$ عملگری هرمیتی است. مجموعه عملگرهای ویگنر تعریف شده بر فضای فاز سیستم اتحاد مهم زیر را ارضاء می کنند. تریس حاصلضرب دو عملگر ویگنر در دو نقطه دلخواه از فضای فاز بوسیله فرمول زیر (رابطه تعامد) معین می شود

$$\mathrm{Tr}\ \hat{W}\ \ q,p\ \ \hat{W}\ \ q\ ,p \qquad 2 \quad q \quad q \qquad p \quad p\ \ . \tag{۲,۱}$$

ساده ترین روش برای نمایش درستی رابطه (۲.۱) شروع از تعریف (۱.۱) است

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\Big\{\hat{W}(q,p)\hat{W}(q',p')\Big\} = \cdots \\
&\cdots = \int dudv e^{-ivp'} e^{-iup} \mathrm{Tr}\left\{|q-u/2\rangle\langle q+u/2||q'-v/2\rangle\langle q'+v/2|\right\}, \\
&\cdots = \int dudv e^{-iup-ivp'} \delta\Big(q-q'+\frac{u+v}{2}\Big)\delta\Big(q-q'-\frac{u+v}{2}\Big).
\end{aligned}$$

با تغییر متغیر زیر انتگرالگیری ساده می شود

$$\begin{aligned}
&u' \equiv (u+v)/2, \qquad v' \equiv u-v, \qquad dudv = du'dv' \\
&u = u'+v'/2, \qquad\quad v = u'-v'/2,
\end{aligned}$$

آنگاه داریم

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\Big\{\hat{W}(q,p)\hat{W}(q',p')\Big\} = \cdots \\
&\cdots = \int du'dv' e^{-i(u'+v'/2)p-i(u'-v'/2)p'} \delta(q-q'+u')\delta(q-q'-u'), \\
&\cdots = \int du'dv' e^{-iu'(p+p')-iv'(p-p')/2} \delta(q-q'+u')\delta(q-q'-u'), \\
&\cdots = 4\pi\delta(p-p')\int du' e^{-iu'(p+p')} \delta(q-q'+u')\delta(q-q'-u'), \\
&\cdots = 2\pi\delta(p-p') e^{-i(q-q')(p+p')} \delta(q-q'), \\
&\cdots = 2\pi\delta(q-q')\delta(p-p').
\end{aligned}$$

که فرایند اثبات را کامل می کند. اغلب با تعریف متغییر مختلط $\alpha(q,p) \equiv (q+ip)/\sqrt{2}$ صفحه مختلط $\alpha \in \mathbb{C}$ و فضای فاز را یکی می کنیم. در این حالت یک فرم متداول بیان عملگر ویگنر[۲] به شکل

$$\hat{W}(q,p) \triangleq \hat{U}_{\circ}(\alpha)\Big|_{\alpha=(q+ip)/\sqrt{2}}$$

است. به سادگی می توان دید که در این نماد گذاری رابطه تعامد بالا به شکل زیر بازنویسی می شود

$$\mathrm{Tr}\left\{\hat{U}_{\circ}(\alpha)\hat{U}_{\circ}(\beta)\right\} = \pi\delta^{(2)}(\alpha-\beta)$$

۱-۳ نماد وایل- ویگنر برای عملگر

بر حسب عملگر ویگنر ، نماد وایل- ویگنر یک مشاهده پذیر $\hat{A}$ به شکل زیر تعریف می شود

$$W_{\hat{A}}(q,p) = \mathrm{Tr}\left\{\hat{A}\,\hat{W}(q,p)\right\} \triangleq \int du e^{-iup}\left\langle q+\frac{u}{2}\middle|\hat{A}\middle|q-\frac{u}{2}\right\rangle. \qquad (۳,۱)$$

این رابطه نگاشتی تعریف می کند که به مشاهده پذیر $\hat{A}$ تابع $W_{\hat{A}}(q,p)$ را بر فضای فاز نظیر می کند. نشان می دهیم این تناظر یک به یک است. در هر نقطه فضای فاز، نماد وایل- ویگنر همیوغ هرمیتی یک عملگر دلخواه برابر است با مزدوج نماد وایل- ویگنر خود آن عملگر یعنی $W_{\hat{A}}(q,p) = W^{*}_{\hat{A}^{\dagger}}(q,p)$، بنا بر این فقط در حالتی که عملگر مورد نظر هرمیتی باشد نماد وایل- ویگنر آن تابعی حقیقی بر فضای فاز خواهد بود.

۱-٤ رابطه عملگر ویگنر با عملگر انتقال در فضای فاز

اکنون نشان می دهیم که عملگر ویگنر تبدیل فوریه عملگر یکانی انتقال در فضای فاز یعنی

$$\exp\left(\alpha\hat{a}^{\dagger}-\alpha^{*}\hat{a}\right)=\hat{D}(\alpha)$$

است. با توجه به (ضمیمه الف) رابطه زیررا ، که در واقع نوعی بسط ویژه پایه مکان برحسب ویژه پایه انرژی است، داریم

$$|q\rangle=\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\exp\left\{-\frac{q^{2}}{2}+\sqrt{2}q\hat{a}^{\dagger}-\frac{\hat{a}^{\dagger 2}}{2}\right\}|0\rangle_{\text{coh.}}$$

با استفاده از اتحاد : $|0\rangle\langle 0| =: e^{-\hat{a}^{\dagger}\hat{a}}$:،(ضمیمه ب) می توان نوشت

$$\begin{aligned}\hat{W}(q,p)&\triangleq\int du e^{-iup}\left|q-\frac{u}{2}\right\rangle\left\langle q+\frac{u}{2}\right|\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int du e^{-iup}\exp\left\{-\frac{\left(q-u/2\right)^{2}}{2}+\sqrt{2}\left(q-u/2\right)\hat{a}^{\dagger}-\frac{\hat{a}^{\dagger 2}}{2}\right\}\cdots\\&\cdots : e^{-\hat{a}^{\dagger}\hat{a}} : \exp\left\{-\frac{\left(q+u/2\right)^{2}}{2}+\sqrt{2}\left(q+u/2\right)\hat{a}-\frac{\hat{a}^{2}}{2}\right\}\end{aligned}$$

اکنون همه جملات را داخل عملگر بازآرایی نرمال : : می بریم

$$\begin{aligned}\hat{W}(q,p)=\frac{1}{\sqrt{\pi}} : \int du\exp\Bigg\{&-iup-\frac{\left(q-u/2\right)^{2}}{2}+\sqrt{2}\left(q-u/2\right)\hat{a}^{\dagger}-\frac{\hat{a}^{\dagger 2}}{2}-\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\cdots\\&\cdots-\frac{\left(q+u/2\right)^{2}}{2}+\sqrt{2}\left(q+u/2\right)\hat{a}-\frac{\hat{a}^{2}}{2}\Bigg\} :\end{aligned}$$

با مرتب کردن جملات در نما، عبارت انتگرال گاوسی زیر بدست می آید

$$\hat{W}(q,p) = \cdots$$
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} : \int du \exp\left\{-\frac{u^2}{4} + \left(\frac{\hat{a}+\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} - ip\right)u - q^2 + 2q\left(\frac{\hat{a}+\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\hat{a}^2}{2} - \frac{\hat{a}^{\dagger 2}}{2} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\right\} :$$

اکنون می توان بدون دغدغه ناجابجایی عبارت درون علامت : : و با استفاده از فرمول انتگرال گاوسی نتیجه زیر را نوشت

$$\hat{W}(q,p) = 2 : \exp\left\{\left(\frac{\hat{a}-\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} - ip\right)^2 - q^2 + 2q\left(\frac{\hat{a}+\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{\hat{a}+\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}\right)^2\right\} :$$

نهایتا بر حسب عملگر های مکان و تکانه بی بعد عبارت فشرده زیر را برای عملگر ویگنر داریم.

$$\hat{W}(q,p) = 2 : \exp\left\{-(q-\hat{q})^2 - (p-\hat{p})^2\right\} :$$

همینطور بعد از کمی مرتب کردن جملات در نمای تابع نمایی داریم

$$\hat{W}(q,p) = 2 : \exp\left\{-2\hat{a}^\dagger\hat{a} - \left(p^2+q^2\right) + 2q\left(\frac{\hat{a}+\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}\right) + 2p\left(\frac{\hat{a}-\hat{a}^\dagger}{i\sqrt{2}}\right)\right\} :$$

$$\hat{W}(q,p) = 2 : \exp\left[-2(\alpha-\hat{a})\left(\alpha^*-\hat{a}^\dagger\right)\right] : \triangleq \hat{U}_\circ(\alpha) \qquad (٤,١)$$

با استفاده از این فرم آخری نشان می دهیم در واقع عملگر ویگنر تبدیل فوریه عملگر انتقال در فضای فاز است. از تعریف انتگرال فوریه مختلط استفاده می کنیم ، $\xi \equiv \xi_1 + i\xi_2$، (ضمیمه پ)

$$g(\alpha) = \int \frac{d^2\xi}{\pi} \exp\left(\alpha\xi^* - \alpha^*\xi\right) f(\xi), \qquad f(\xi) = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \exp\left(\xi\alpha^* - \xi^*\alpha\right) f(\alpha)$$

بنابر این داریم :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int e^{\left(\alpha\xi^* - \alpha^*\xi\right)} \hat{U}_\circ(\xi) d^2\xi = \\
&= \frac{2}{\pi} : \int d^2\xi e^{\left(\alpha\xi^* - \alpha^*\xi\right)} \exp\left\{-2\hat{a}^\dagger\hat{a} - 2|\xi|^2 + 2\left(\xi\hat{a}^\dagger + \xi^*\hat{a}\right)\right\} : \\
&= \frac{2}{\pi} : \int d^2\xi \exp\left\{-2|\xi|^2 + \xi\left(2\hat{a}^\dagger - \alpha^*\right) + \xi^*(2\hat{a} + \alpha) - 2\hat{a}^\dagger\hat{a}\right\} :
\end{aligned}$$

انتگرال را می توان با استفاده از فرم مختلط انتگرال گوسی (ضمیمه ت) محاسبه کرد

$$\begin{aligned}
\int \cdots &= 2 : \int \frac{d^2\xi}{\pi} \exp\left\{-2|\xi|^2 + \xi\left(2\hat{a}^\dagger - \alpha^*\right) + \xi^*(2\hat{a} + \alpha) - 2\hat{a}^\dagger\hat{a}\right\} : \\
&=: \exp\left\{\frac{1}{2}\left(2\hat{a}^\dagger - \alpha^*\right)(2\hat{a} + \alpha) - 2\hat{a}^\dagger\hat{a}\right\} : \\
&=: \exp\left\{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right)\right\} := \exp\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right) = \hat{D}(\alpha)
\end{aligned}$$

بنابر این

$$\hat{D}(\alpha) = \int \frac{d^2\xi}{\pi} e^{\left(\alpha\xi^* - \alpha^*\xi\right)} \hat{U}_\circ(\xi) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{U}_\circ(\xi) = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{\left(\xi\alpha^* - \xi^*\alpha\right)} \hat{D}(\alpha) \qquad (۵,۱)$$

۱–۵ قضیه عمومی محاسبه نماد وایل– ویگنر

برای بدست آوردن قضیه ای عمومی تر، نماد وایل– ویگنر عملگری به فرم نمایی $\exp\left(\zeta\hat{a}^\dagger + \zeta^*\hat{a}\right)$ را که در آن ζ عددی مختلط است محاسبه می کنیم[۳]. اگر $\hat{A} \equiv \exp\left(\zeta\hat{a}^\dagger + \zeta^*\hat{a}\right)$ آنگاه

$$W_{\hat{A}}(\alpha,0) = 2\mathrm{Tr}\left\{\exp\left(\zeta\hat{a}^{\dagger} + \zeta^{*}\hat{a}\right) : \exp\left\{-2(\alpha - \hat{a})\left(\alpha^{*} - \hat{a}^{\dagger}\right)\right\} :\right\}$$

که در آن بنا بر قرارداد

$$\alpha = (q + ip)/\sqrt{2} \;\; \Leftrightarrow \; W_{\hat{A}}(\alpha,0) \triangleq W_{\hat{A}}(q,p)$$

با تجزیه عملگر نمایی به فرم پاد نرمال داریم

$$\exp\left(\zeta\hat{a}^{\dagger} + \zeta^{*}\hat{a}\right) = e^{\zeta^{*}\hat{a}}e^{\zeta\hat{a}^{\dagger}}e^{-\frac{\zeta\zeta^{*}}{2}}$$

بنا بر این کل عبارت داخل علامت تریس را به شکل بازترتیب نرمال می نویسیم

$$W_{\hat{A}}(\alpha,0) = 2e^{-\frac{\zeta\zeta^{*}}{2}}\mathrm{Tr}\left\{: e^{\zeta\hat{a}^{\dagger}} \exp\left\{-2(\alpha - \hat{a})\left(\alpha^{*} - \hat{a}^{\dagger}\right)\right\}e^{\zeta^{*}\hat{a}} :\right\}$$

اکنون به سادگی بر پایه حالت های همدوس مقدار تریس، از طریق یک انتگرال گوسی[٤] مختلط، قابل محاسبه است

$$W_{\hat{A}}(\alpha,0) = 2e^{-\frac{\zeta\zeta^{*}}{2}}\int\frac{d^{2}\beta}{\pi}\langle\beta| : e^{\zeta\hat{a}^{\dagger}} \exp\left\{-2(\alpha - \hat{a})\left(\alpha^{*} - \hat{a}^{\dagger}\right)\right\}e^{\zeta^{*}\hat{a}} : |\beta\rangle$$

$$\begin{aligned} W_{\hat{A}}(\alpha,0) &= \frac{2}{\pi}e^{-\frac{|\zeta|^{2}}{2}}\int d^{2}\beta \exp\left\{-2|\alpha - \beta|^{2} + \beta\zeta^{*} + \beta^{*}\zeta\right\} \\ &= \exp(\zeta\alpha^{*} + \zeta^{*}\alpha) \end{aligned}$$

بنابر این قاعده جالب و پربار زیر بدست می آید

$$\hat{A} = \exp\left(\zeta\hat{a}^{\dagger} + \zeta^{*}\hat{a}\right) \quad \mapsto \quad W_{\hat{A}}(\alpha,0) = \exp(\zeta\alpha^{*} + \zeta^{*}\alpha)$$

از آنجایی که

$$\text{If} \qquad \zeta = \frac{\mu + i\nu}{\sqrt{2}}, \qquad \text{Then} \qquad \zeta \hat{a}^{\dagger} + \zeta^{*} \hat{a} = \mu \hat{q} + \nu \hat{p}$$

قاعده بالا را به شکل زیر نیز می توان نوشت

$$\hat{A} = \exp\{\mu \hat{q} + \nu \hat{p}\} \rightarrow \text{W.W.} \rightarrow W_{\hat{A}}(q,p) = \exp\{\mu q + \nu p\}$$

که در آن مانند گذشته رابطه $\alpha(q,p) \equiv (q + ip)/\sqrt{2}$ صفحه مختلط $\alpha \in \mathbb{C}$ و فضای فاز را یکی می کند. یک نتیجه بلافاصله که با قرار دادن $\mu = r\mu_{\circ}$ و $\nu = r\nu_{\circ}$ بدست می آید عبارت است از

$$\hat{A} = \exp\{r(\mu_{\circ} \hat{q} + \nu_{\circ} \hat{p})\} \rightarrow \text{W.W.} \rightarrow W_{\hat{A}}(q,p) = \exp\{r(\mu_{\circ} q + \nu_{\circ} p)\}$$

سپس با گرفتن مشتقات متوالی نسبت به r داریم

$$\partial_r^n \hat{A}\Big|_{r=0} = (\mu_{\circ} \hat{q} + \nu_{\circ} \hat{p})^n \qquad \rightarrow \qquad (\mu_{\circ} q + \nu_{\circ} p)^n$$

بنابراین نماد وایل- ویگنر هر تابع دلخواه از یک ترکیب خطی عملگرهای مکان و تکانه (یا خلق و فنا) با اسکالر کردن اپراتورهای مرتبط (قاعده متعارف) بدست می آید، یعنی

$$\hat{F} = f(\mu_{\circ} \hat{q} + \nu_{\circ} \hat{p}) \qquad \rightarrow \qquad W_{\hat{F}}(q,p) = f(\mu_{\circ} q + \nu_{\circ} p)$$

یا

$$\hat{F} = f\left(\zeta \hat{a}^{\dagger} + \zeta^{*} \hat{a}\right) \quad \mapsto \quad W_{\hat{A}}(\alpha,0) = f(\zeta \alpha^{*} + \zeta^{*} \alpha)$$

البته این قاعده تنها هنگامی درست است که آرگومان تابع f حتما یک ترکیب خطی عملگرهای مکان و تکانه (یا خلق و فنا) باشد. یک نگاه عمیق تر به این قاعده با معرفی ترتیب وایل برای عملگر ها میسر می شود. عملگر نظیر m فاکتور q و n فاکتور p در ترتیب وایل، که آنرا با کروشه وایل $\widehat{\{q^m p^n\}}_W$نشان خواهیم داد بوسیله رابطه زیر تعریف می شود

$$\widehat{\{q^m p^n\}}_W \triangleq \partial_\lambda^m \partial_\mu^n e^{\lambda \hat{q} + \mu \hat{p}} \Big|_{\lambda=\mu=0}$$

با تعریف $L_{\mu\circ} L_{\nu\circ} f(\mu,\nu) \triangleq f(\circ,\circ)$، می توانیم رابطه بالا را به شکل زیر باز نویسی کنیم

$$\widehat{\{q^m p^n\}}_W = L_{\mu\circ} L_{\nu\circ} \partial_\lambda^m \partial_\mu^n e^{\lambda \hat{q} + \mu \hat{p}}$$

مثلا

$$\begin{aligned}
\widehat{\{qp\}}_W &= L_{\mu\circ} L_{\nu\circ} \partial_\lambda \partial_\mu e^{\lambda \hat{q} + \mu \hat{p}} \\
&= L_{\mu\circ} L_{\nu\circ} \left\{ \partial_\lambda \partial_\mu \left[1 + (\lambda \hat{q} + \mu \hat{p}) + \frac{1}{2} (\lambda \hat{q} + \mu \hat{p})^2 + \cdots \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} (\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q})
\end{aligned}$$

در حالت کلی $\widehat{\{q^m p^n\}}_W$ برابر است با جمع همه تک جمله ای ها متشکل از m فاکتور $\hat{q}$ و n فاکتور $\hat{p}$ در همه آرایش های ممکن و متمایز، تقسیم بر تعداد آنها. ویژگی اساسی ترتیب وایل $\widehat{\{q^m p^n\}}_W$این است که نماد وایل- ویگنر آن برابر $q^m p^n$ است. این ادعا به سادگی با توجه به خطی بودن نگاشت های درگیر اثبات می شود .

$$\mathrm{Tr}\Big(\hat{W}(q,p)\widehat{\{q^m p^n\}}_W\Big) = \mathrm{Tr}\Big(\hat{W}(q,p)L_{\mu\circ}L_{\nu\circ}\partial_\lambda^m\partial_\mu^n\, e^{\lambda\hat{q}+\mu\hat{p}}\Big),$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\Big(\hat{W}(q,p)\widehat{\{q^m p^n\}}_W\Big) &= L_{\mu\circ}L_{\nu\circ}\partial_\lambda^m\partial_\mu^n\mathrm{Tr}\Big(\hat{W}(q,p)e^{\lambda\hat{q}+\mu\hat{p}}\Big),\\ &= L_{\mu\circ}L_{\nu\circ}\partial_\lambda^m\partial_\mu^n e^{\lambda q+\mu p},\\ &= q^m p^n\end{aligned}$$

بنابر این در حالت کلی اگر عملگر $\hat{F}$ ترتیب وایل داشته باشد یعنی به فرم $\hat{F}=\sum_{m,n} f_{m,n}\widehat{\{q^m p^n\}}_W$ قابل بسط باشد آنگاه $W_{\hat{F}}(q,p)=\sum_{m,n} f_{m,n}q^m p^n$ با قاعده متعارف جاینشانی $q\mapsto -p\ \&\ p\mapsto q$ بدست می آید. البته اشاره به این نکته مهم است که معنی دقیق قاعده متعارف جانشانی، تبدیل $\widehat{\{q^m p^n\}}_W$(به معنی یک عملگر) به $q^m p^n$ است و ترتیب هندسی عملگرها در $\widehat{\{q^m p^n\}}_W$ مهم نیست.

۱–٦ رابطه بستاری برای مجموعه همه عملگرهای انتقال در فضای فاز

در اینجا نشان می دهیم که مجموعه $\Big\{\hat{D}(\xi)=e^{\xi\hat{a}^\dagger-\xi^*\hat{a}}\Big\}_{\xi\in\mathbb{C}}$ یک مجموعه کامل است. چون حالت های همدوس شرط بستاری را ارضا می کنند لذا برای هر عملگر $\hat{F}$ بسط زیر را داریم

$$\hat{F}=\int\frac{d^2\alpha}{\pi}\frac{d^2\beta}{\pi}|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{F}|\beta\rangle\langle\beta| = \int\frac{d^2\alpha}{\pi}\frac{d^2\beta}{\pi}\langle\alpha|\hat{F}|\beta\rangle|\alpha\rangle\langle\beta| \qquad (٦,١)$$

نشان می دهیم که می توان $|\alpha\rangle\langle\beta|$ ها را بر حسب عملگر انتقال بسط داد و درواقع

$$\int\frac{d^2\xi}{\pi}\langle\beta|\hat{D}(\xi)|\alpha\rangle\hat{D}(-\xi)=|\alpha\rangle\langle\beta|.$$

برای اثبات، طرف چپ معادله فوق را به شکل زیر بازنویسی می کنیم

$$\int \frac{d^2\xi}{\pi} \langle\beta|\hat{D}(\xi)|\alpha\rangle \hat{D}(-\xi) = \int \frac{d^2\xi}{\pi} \langle\beta| e^{\xi\hat{a}^\dagger - \xi^*\hat{a}} |\alpha\rangle e^{-\xi\hat{a}^\dagger + \xi^*\hat{a}}$$

از سوی دیگر چون $e^{\xi\hat{a}^\dagger - \xi^*\hat{a}} = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} e^{\xi\hat{a}^\dagger} e^{-\xi^*\hat{a}}$ بنابر این داریم

$$\text{L.H.S.} = \int \frac{d^2\xi}{\pi} e^{-|\xi|^2} e^{\xi\beta^*} e^{-\xi^*\alpha} \langle\beta|\alpha\rangle e^{-\xi\hat{a}^\dagger} e^{\xi^*\hat{a}}$$

ضرب داخلی حالت های همدوس نیز از رابطه $\langle\beta|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\beta|^2}{2} - \frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\beta^*\alpha}$ بدست می آید لذا

$$\text{L.H.S.} = e^{-\frac{|\beta|^2}{2} - \frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\beta^*\alpha} : \int \frac{d^2\xi}{\pi} \exp\left\{-|\xi|^2 + \xi\left(\beta^* - \hat{a}^\dagger\right) - \xi^*\left(\alpha - \hat{a}\right)\right\} :$$

اکنون با استفاده از تکنیک انتگرالگیری درون حاصلضرب های نرمال و فرمول انتگرال گوسی دوبعدی در فرم مختلط (ضمیمه پ) داریم

$$\begin{aligned}\text{L.H.S.} &= e^{-\frac{|\beta|^2}{2} - \frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\beta^*\alpha} : e^{-\left(\beta^* - \hat{a}^\dagger\right)(\alpha - \hat{a})} : \\ &= e^{-\frac{|\beta|^2}{2} - \frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\beta^*\alpha} e^{-\beta^*\alpha} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} : e^{-\hat{a}^\dagger\hat{a}} : e^{\beta^*\hat{a}}\end{aligned}$$

با توجه به اتحاد $|0\rangle\langle 0| =: e^{-\hat{a}^\dagger\hat{a}}:$ (ضمیمه ب) و تعریف حالت همدوس به عنوان حالت خلا انتقال یافته داریم

$$\text{L.H.S.} = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} |0\rangle\langle 0| e^{\beta^*\hat{a}} e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} = |\alpha\rangle\langle\beta|$$

و قضیه ثابت شده است. در ادامه از(٦,١) می توان نوشت

$$
\begin{aligned}
\hat{F} &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\frac{d^2\beta}{\pi}\frac{d^2\xi}{\pi}\langle\alpha|\hat{F}|\beta\rangle\langle\beta|\hat{D}(\xi)|\alpha\rangle\hat{D}(-\xi) \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\frac{d^2\xi}{\pi}\langle\alpha|\hat{F}\hat{D}(\xi)|\alpha\rangle\hat{D}(-\xi) = \int \frac{d^2\xi}{\pi}\mathrm{Tr}\left\{\hat{F}\hat{D}(\xi)\right\}\hat{D}(-\xi)
\end{aligned}
$$

یعنی هر اپراتور $\hat{F}$ را می توان برحسب $\hat{D}(-\xi) = \hat{D}^\dagger(\xi)$ ها بسط داد. آشکارا رابطه بالا را می توان به فرم زیر نیز نوشت

$$
\hat{F} = \int \frac{d^2\xi}{\pi}\mathrm{Tr}\left\{\hat{F}\hat{D}^\dagger(\xi)\right\}\hat{D}(\xi). \qquad (۷,۱)
$$

۱-۶-۱ رابطه بازسازی برای نمایش ویگنر

اکنون نشان می دهیم چگونه با داشتن نماد وایل- ویگنر یک عملگر می توان آنرا بازسازی کرد.

از آنجا که $\hat{U}_\circ(\alpha) = \hat{U}_\circ^\dagger(\alpha)$ و عملگر انتقال و عملگر ویگنر بوسیله تبدیل فوریه زیر به یکدیگر مرتبط هستند یعنی

$$
\hat{D}(\xi) = \int \frac{d^2\alpha}{\pi}e^{(\xi\alpha^*-\xi^*\alpha)}\hat{U}_\circ(\alpha), \quad \hat{D}^\dagger(\xi) = \int \frac{d^2\beta}{\pi}e^{-(\xi\beta^*-\xi^*\beta)}\hat{U}_\circ(\beta),
$$

لذا با استفاده از نتیجه (۱-۷) بسط مشابهی را می توان بر حسب عملگر ویگنر به شکل زیر نوشت

$$
\begin{aligned}
\hat{F} &= \int \frac{d^2\xi}{\pi}\frac{d^2\alpha}{\pi}\frac{d^2\beta}{\pi}e^{-(\xi\beta^*-\xi^*\beta)}e^{(\xi\alpha^*-\xi^*\alpha)}\mathrm{Tr}\left\{\hat{F}\hat{U}_\circ(\beta)\right\}\hat{U}_\circ(\alpha), \\
&= \int d^2\alpha\frac{d^2\beta}{\pi}\left(\frac{d^2\xi}{\pi^2}e^{\xi(\alpha^*-\beta^*)-\xi^*(\alpha-\beta)}\right)\mathrm{Tr}\left\{\hat{F}\hat{U}_\circ(\beta)\right\}\hat{U}_\circ(\alpha), \\
&= \int \frac{d^2\beta}{\pi}d^2\alpha\delta^{(2)}(\alpha-\beta)\mathrm{Tr}\left\{\hat{F}\hat{U}_\circ(\beta)\right\}\hat{U}_\circ(\alpha),
\end{aligned}
$$