بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض-هندسه توپولوژی

ساختارهای برپیچنده و محکم در هندسهٔ تماس

استاد راهنما:

دکتر حسین خورشیدی

استاد مشاور:

دکتر اکبر دهقان‌نژاد

پژوهش و نگارش:

نوشین عالی‌منش

مهر ۱۳۹۰

تقدیم به تو ای مهربان ترینم

برای تمام زمان هایی که به من اعتماد کردی

برای مهربانی چشم هایت که در هر ثانیه ی غربت، آرامم کرد

برای شانه های خسته و مهربانت که تکیه گاه همه ی خستگی هایم بود

برای تمام تپش های قلبت که دلیل دانه دانه نفسهایم بود

برای گرمی دستانت که پناه اشکهایم بود

برای بودنت، برای ماندنت

برای تو، مهدی نازنینم ...

«ابتدای هر سخن و افتتاح هر کلام به نام پروردگاری شایسته و سزاست که هر چه داریم از الطاف بی‌بدیل اوست.»

سپاس خدای بزرگ را که به این کمترین توفیق کسب اندک دانشی از دریای بیکران علم را عطا فرمود؛ امید است در سایه‌ی الطاف بی‌انتهایش سعادت عمل به آموخته‌های خویش را بیابم.

اکنون که به لطف و عنایت الهی، نگارش این رساله به انجام رسیده است؛ بر خود فرض می‌دانم مراتب تشکر و سپاس خود را به عرض همهٔ عزیزانی که راهنمایی‌هایشان، یاری‌گر من در تدوین این تحقیق بوده‌اند، برسانم.

از پدر و مادر عزیزم و برادر و خواهر مهربانم که در لحظه لحظهٔ زندگیم با حضور و دلگرمی‌هایشان تنها ملجأ غم‌ها و بی‌پناهی‌هایم بودند، از صمیم قلبم سپاسگزارم و از خداوند مهربان سلامتی و سعادت دائم ایشان را خواستارم.

از استاد علم و اخلاق، جناب آقای دکتر حسین خورشیدی که پرسش‌های مکرّر و گاه و بیگاهم را با سعهٔ صدر پاسخ گفتند و حمایت‌ها و رهنمودهای ایشان روشنگرِ مسیر پر تلاطم پژوهش‌های اینجانب در به ثمر رسیدن این پایان‌نامه بوده است، کمال تشکر را دارم.

از استاد فرهیخته، جناب آقای دکتر اکبر دهقان‌نژاد سپاس‌گزارم که به من چگونه فکر کردن را آموختند و با وجود مسئولیت‌های فراوان زحمت مشاورهٔ این پایان‌نامه را عهده‌دار شدند.

چکیده

هندسهٔ تماسی به بررسی ساختارهای تماسی روی منیفلدهای هموار می‌پردازد. در این پژوهش انواع ساختارهای تماسی و رابطهٔ آنها با یکدیگر را بررسی می‌کنیم.

در فصل اول ابتدا مفاهیم مورد نیاز را مطرح نموده و مباحثی از هندسه دیفرانسیل (نظیر برگ‌بندی، شار و جهت پذیری)، نکاتی از توپولوژی دیفرانسیل (نظیر تقاطع و عدد اشتراک) و مفاهیمی از توپولوژی جبری (همچون سادک‌ها و $CW-$مجتمع) را بیان می‌کنیم و در پایان این فصل به تعاریف مقدماتی هندسهٔ تماس و نظریهٔ گره اشاره می‌کنیم.

از آنجا که ساختارهای تماسی به دو نوع برپیچنده و محکم تقسیم می‌شوند، در فصل دوم ساختار تماسی برپیچنده را معرفی نموده و ثابت می‌کنیم که چگونه با استفاده از پیچش لوتز می‌توان هر ساختار تماسی را به یک ساختار تماسی برپیچنده تبدیل کرد. سپس قضیهٔ مهم و اساسی الیشبرگ را که به رابطهٔ بین ساختارهای تماسی برپیچنده و توزیعات مسطح دو بعدی می‌پردازد، مطرح نموده و با استفاده از مفاهیمی همچون برگ‌بندی مشخصه روی کره‌ها، برهان این قضیه را ارائه می‌دهیم. در پایان این فصل، چگونگی دستیابی به ساختارهای برپیچندهٔ تماسی را بیان می‌نماییم وآن را با استفاده از لم حذف اثبات می‌کنیم.

در فصل سوم، ابتدا به معرفی ساختار تماسی محکم پرداخته و برای درک بهتر آن،مثال‌هایی را ارائه می‌دهیم. سپس این ساختار را در فضای $\mathbb{R}^3$ مطرح می‌نماییم. در پایان منیفلد سفت و برگ‌بندی سفت را تعریف کرده و با اثبات قضیهٔ اصلی، رابطهٔ بین این نوع ساختار تماسی و برگ‌بندی سفت را بیان می‌کنیم.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی و پیش نیازها

در این فصل مفاهیم و نکات مورد نیاز در سایر فصل‌ها را مرور می‌کنیم. برای این منظور ابتدا مفاهیمی از هندسه دیفرانسیل، نظیر شار و برگ‌بندی را بیان می‌کنیم. سپس به اختصار نگاهی به نظریهٔ گره انداخته و پس از آن نکاتی از توپولوژی دیفرانسیل را بیان کرده و به بررسی مفاهیمی همچون تقاطع و ایزوتوپی می‌پردازیم. سپس مباحثی از توپولوژی جبری، نظیر سادک‌ها، $CW-$ مجتمع و اسکلت بندی n بعدی را عنوان می‌کنیم. در پایان این فصل به طور خلاصه، هندسهٔ تماس را شرح داده و مثالی از آن را ارائه می‌کنیم.

۱.۱ نکاتی از هندسه دیفرانسیل

تعریف ۱.۱.۱. (جادهنده [۱]) فرض کنیم M و N دو منیفلد[۲] هموار بوده و $p \in M$ و f نگاشتی از M در N باشد. گوییم f در p یک جادهنده (درنهش) است اگر دیفرانسیل f یک به یک باشد.

تعریف ۲.۱.۱. (نشاننده) فرض کنیم M و N دو منیفلد باشند. نگاشت $f : N \longrightarrow M$ را یک نشاننده گوییم اگر:

۱) f جادهنده باشد.

۲) f یک به یک باشد.

[۱] Immersion

[۲] در برخی از کتب منیفلد را خمینه می‌نامند. ما در اینجا با توجه به [۲۵] از کلمهٔ منیفلد استفاده می‌کنیم.

۳) $f(N)$ یک زیر منیفلد (منظم) M باشد.بنابر این تعریف، تصویر هر نگاشت نشاننده یک زیر منیفلد بوده و اصطلاحاً می‌گوییم $f(N)$ در M نشانده شده است و آن را زیر منیفلد نشانده نیز می‌گوییم.

تعریف ۳.۱.۱. (منحنی انتگرال) فرض کنیم f تابعی حقیقی از کلاس C^1 روی $\mathbb{R}^n$ باشد:

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, ..., x_n) \longmapsto f(x_1, ..., x_n)$$

اگر $(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ یک بردار مماس بر منحنی $C(t)$ در نقطهٔ p باشد که $C(0) = p$، آن را با v_p نمایش داده و مشتق جهت‌دار تابع f در جهت بردار v_p را توسط رابطهٔ زیر که از قاعدهٔ زنجیره‌ای حاصل می‌شود، تعریف می‌نماییم:

$$\frac{d(foC(t))}{dt}|_{t=0} = \Sigma_{i=1}^{n}(\frac{\partial f}{\partial x_i})\frac{dC^i}{dt}|_{t=0} = \Sigma^n{}_{i=1}(\frac{\partial f}{\partial x_i})v_i$$

v_iها مؤلفه‌های بردار v هستند. بنابراین داریم:

$$v_p f = v^1(\frac{\partial f}{\partial x_1})_p + ... + v^n(\frac{\partial f}{\partial x_n})_p$$

که بردار v و نقطهٔ p عبارتند از: $C(0) = p$ و $\frac{dC}{dt}(0) = v$

منحنی C را یک منحنی انتگرال بردار v_p نیز می‌گوییم. بنابراین $v_p.f$ در حقیقت عبارت است از تغییرات تابع f در طول منحنی انتگرال بردار v_p.

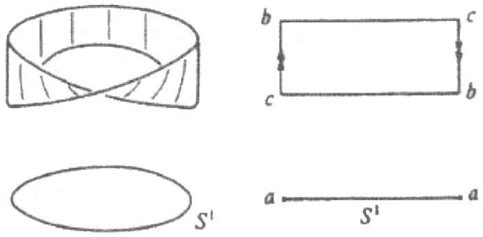
تعریف ۴.۱.۱. (تار) فرض کنیم M و N دو منیفلد هموار باشند. نگاشت $f : M \longrightarrow N$ را در نظر می‌گیریم. اگر $p \in N$ باشد، زیر مجموعهٔ $f^{-1}(p) \subset M$ را یک تار روی p می‌نامیم.

تعریف ۵.۱.۱. (کلاف) یک کلاف، یک سه تایی (E, π, M) است که E و M فضا های توپولوژیکی بوده و $\pi : E \longrightarrow M$ یک نگاشت پیوسته است. E را فضای کلی یا فضای کلاف و M رافضای پایه نامند. نگاشت π به نگاشت تصویری موسوم است. برای $x \in M$ مجموعه $\pi^{-1}(x) \subset E$ یک تار (یا فیبر) روی x نامیده می‌شود. اگر به ازای هر $x \in M$، $\pi^{-1}(x)$ با یک فضای مشترک F، همئومرف باشد (یعنی یک همئومرفیسم[3] از $\pi^{-1}(U)$ به $U \times F$ که $U \subset M$ وجود داشته باشد)، آن گاه F را تاری از

[3]در برخی از کتب همئومورفیسم را همسان‌ریختی می‌نامند. ما در اینجا با توجه به [۲۵] از کلمهٔ همئومورفیسم استفاده می‌کنیم.

کلاف و کلاف را، کلاف تاری می‌نامیم. توجه کنید که فضای کلی E را اغلب کلاف می‌نامند گرچه کلاف، اشاره به سه‌تایی (E, π, M) دارد.

مثال ۶.۱.۱. نوار موبیوس یک مثال از کلاف تاری است که از یک نوار تابیده شده با فضای پایهٔ $S^۱$ می‌باشد.



شکل ۱.۱: نوار موبیوس

تعریف ۷.۱.۱. (کلاف قائم) فرض کنیم Y یک منیفلد هموار نشانده شده در $\mathbb{R}^n$ باشد و $y \in Y$. مکمل متعامد T_yY در $\mathbb{R}^n$ را با N_yY نمایش داده و آن را فضای نرمال یا قائم بر Y در نقطهٔ y می‌نامیم.کلاف قائم را $N(Y)$ می‌نامیم که عبارت است از: $N(Y) = \cup_{y \in Y} N_yY$

تعریف ۸.۱.۱. (جمع ویتنی) جمع ویتنی یا جمع مستقیم کلاف‌های E و F روی فضای X عبارت است از کلاف برداری $E \oplus F$ روی X که تارهای آن به ازای $x \in X$ جمع مستقیم $E_x \oplus F_x$ از فضاهای برداری E_x و F_x می‌باشد.

تعریف ۹.۱.۱. (بدیهی سازی) فرض کنیم (E, B, π, F) یک کلاف تاری باشد که E ، B و F فضاهای توپولوژیکی، $\pi : E \longrightarrow B$ یک نگاشت تصویری پیوسته باشد، B فضای پایهٔ کلاف، E فضای کلی و F تار آن باشد و فرض کنیم برای هر $x \in E$ همسایگی باز $U \subset B$ و همئومورفیسم $\varphi : \pi^{-۱}(U) \longrightarrow U \times F$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که نمودار ۲.۱ جابجا شود.مجموعهٔ همهٔ (U_i, φ_i)ها یک بدیهی‌سازی موضعی برای کلاف نامیده می‌شود.

تعریف ۱۰.۱.۱. (بخش) اگر $\pi : A \longrightarrow B$ یک نگاشت پوششی باشد، یک بخش π عبارت است از نگاشت $f : B \longrightarrow A$ بطوریکه $\pi o f = id_B$.

قضیه ۱۱.۱.۱. [۲۵] (شار موضعی) فرض کنیم $X \in \chi(M)$ یک میدان برداری از کلاس C^k روی

$$
\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times F \arrow[dl, "Proj_1"] \\
U &
\end{tikzcd}
$$

شکل ۲.۱:

زیرمجموعهٔ باز Δ از $\mathbb{R}^n$ باشد، آن‌گاه به ازای هر $p \in M$ عدد مثبت ϵ، زیرمجموعهٔ باز U حول p و دیفئومورفیسم‌های[۴] $\varphi_t : U \longrightarrow \varphi_t(U) \subset M$ ،$|t| < \epsilon$ وجود دارد که در شرایط زیر صدق کند:

۱) نگاشت φ از کلاس C^k است:

$$
\begin{gathered}
\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \longrightarrow M \\
(t, x) \longmapsto \varphi_t(x)
\end{gathered}
$$

۲)

$$
\begin{cases}
\varphi_\circ = Id \\
\varphi_{t+s} = \varphi_t o \varphi_s \quad , \qquad |t+s| < \epsilon \text{و} |s| < \epsilon \text{و} |t| < \epsilon
\end{cases}
$$

۳) اگر $q \in U$ آن گاه $X(q)$ بردار سرعت منحنی زیر است:

$$\varphi(q) : t \longrightarrow \varphi_t(q) \qquad X(q) = \frac{d}{dt}\varphi_t(q)|_{t=\circ}$$

خانوادهٔ $\{\varphi_t\}$ را گروه موضعی یک پارامتری وابسته به X می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۱.۱. نگاشت $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \longrightarrow M$ را شار موضعی میدان X می‌گوییم. اگر $x_\circ$ نقطهٔ ثابت U باشد، منحنی $t \longmapsto \varphi_t(x_\circ)$ را مدار $x_\circ$ می‌نامیم.

زمانی که از برگ سازی یا لایه سازی $k-$ بعدی یک منیفلد M صحبت می‌کنیم، منظور ما این است که M توسط زیر منیفلدهای k بعدی برگ برگ یا لایه لایه شده باشد. به عبارت دیگر از هر نقطهٔ یک وتنها یک زیرمنیفلد k بعدی می‌گذرد که از نظر دیفرانسیل پذیری بستگی به آن نقطه دارد. هر یک از این منیفلدها را یک برگ یا لایهٔ برگ سازی می‌نامیم.

[۴] در برخی از کتب دیفئومورفیسم را وابریختی می‌نامند. ما در اینجا با توجه به [۲۵] از کلمهٔ دیفئومورفیسم استفاده می‌کنیم.

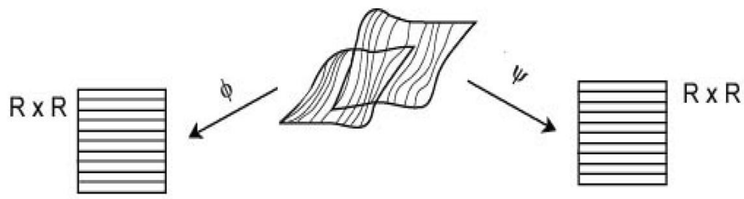
تعریف ۱۳.۱.۱. [۲۵] (برگ‌بندی) فرض کنیم M یک منیفلد C^{∞}، $(n+k)$ بعدی باشد. زیر منیفلدهای $k-$ بعدی N_i را یک برگ‌بندی M گوییم اگر:

۱) هر نقطهٔ M در بعضی مؤلفه‌ها از N_i باشد.

۲) به ازاء هر p از M یک کارت (x, U) در همسایگی p با فرض $x(U) = (-\epsilon, +\epsilon)$ موجود باشد که مؤلفه‌های $N_i \cap U$ مجموعه‌هایی به صورت زیر باشند:

$$\{q \in U | x^{k+1}(q) = c_{k+1}, ..., x^{k+n}(q) = c_{k+n}\} \qquad \text{به ازای} \qquad |c_i| < \xi$$

در این صورت هر مؤلفهٔ N_i را یک برگ یا لایه سازی می‌نامیم.



شکل ۳.۱: کارت‌های برگ‌بندی

مثال ۱۴.۱.۱. (برگ بندی ریب) [۵] فرض کنید $D = \{z | z \in C, |z| \leq 1\}$ یک دیسک واحد باشد، نگاشت پوشاننده f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f : Int(D) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

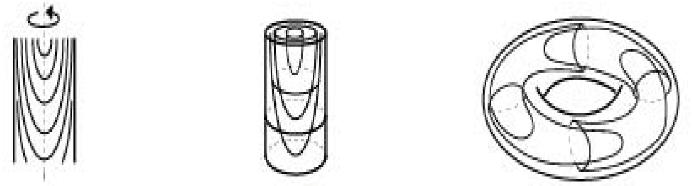
$$(z, x) \longmapsto e^{\frac{1}{1-|z|^2}} - x$$

برگ بندی $\mathcal{F}(f)$ را از f برای $Int(D) \times \mathbb{R}$ داریم، با اضافه کردن برگ جدید $S^1 \times \mathbb{R}$ ($\partial D \times \mathbb{R} = S^1 \times \mathbb{R}$) یک برگ بندی برای استوانه $D \times \mathbb{R}$ خواهیم داشت. از طرفی $D \times \mathbb{R}$ یک فضای پوششی برای چنبره توپر $X = D \times S^1$ می‌باشد(به روش کانونی)، بنابراین برگ بندی $D \times \mathbb{R}$ یک برگ بندی را برای X القا می‌کند، این برگ بندی را با $\mathcal{R}$ نشان می‌دهیم که برگ بندی ریب برای چنبره توپر X نامیده می‌شود. توجه کنید که در این برگ بندی چنبره مرزی $S^1 \times S^1$ یک برگ از $\mathcal{R}$

[۵] $ReebFoliation$

است و برگ های دیگر دیفئومرفیک با $\mathbb{R}^۲$ می‌باشند.

کره $S^۳$ را می‌توان از ترکیب دو چنبره توپر که در طول مرز به هم چسبیده اند، به دست آورد یعنی $S^۳ \cong X \bigcup_{\partial X} X$ (زیرا ∂X یک برگ از $\mathcal{R}$ است) این برگ بندی یک برگ فشرده یکتا دارد و برگ بندی ریب از $S^۳$ نامیده می‌شود که در شکل ۴.۱ نمایش داده شده است.



شکل ۴.۱: برگ بندی ریب برای چنبره

یکی از مفاهیم مهم و مورد نیاز، مفهوم جهت پذیری است که در ادامه به توصیف آن می‌پردازیم.

تعریف ۱۵.۱.۱. (جهت پذیری روی منیفلدها) جهت دادن به یک منیفلد، جهت دادن به فضای مماس آن در هر نقطه می‌باشد به این صورت که در همسایگی p از M کارت (x,U) را انتخاب می‌کنیم. این کارت یک پایه $\{(\frac{\partial}{\partial x^۱})_q, ..., (\frac{\partial}{\partial x^n})_q\}$ برای T_pM تعریف می‌کند $q \in U$. می‌توان به عنوان جهت برای T_pM جهتی را که این پایه تعریف می‌نماید در نظر گرفت. برای این که این تعریف با معنی باشد باید به انتخاب کارت‌ها بستگی نداشته باشد. لذا تعریف زیر را می‌آوریم:

فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر باشد. می‌گوییم M جهت‌پذیر است، اگر بتوان M را توسط یک اطلس A طوری پوشانید که به ازای هر کارت (x,U) و (y,V) از A روی $U \cap V \neq \emptyset$ داشته باشیم:

$$det(yox^{-۱})_* > ۰ \qquad \text{یا} \qquad det\|\frac{\partial y^i}{\partial x^i}\| > ۰$$

رابطهٔ فوق به این معناست که می‌توان روی فضای مماس در هر نقطه یک جهت تعریف نمود. یعنی اگر (x,U) یک کارت از A بوده و M_p یک جهت که توسط $\{(\frac{\partial}{\partial x^۱})_p, ..., (\frac{\partial}{\partial x^n})_p\}$ تعریف می‌شود، آنگاه اگر (y,U) کارت دیگری از A در همسایگی p باشد، داریم: $\frac{\partial}{\partial x^j} = \Sigma^n{}_{i=۱} \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^i}$

در نتیجه ماتریس تغییر پایه برابر است با: $P_{(\frac{\partial}{\partial y^i})_p \longrightarrow (\frac{\partial}{\partial y^i})_p} = \|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\|$

بنابراین چون $det\|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\| > ۰$ دو پایه $\{\frac{\partial}{\partial x^j}\}$ و $\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}$ در یک کلاس جهت‌پذیری قرار دارند.

ملاحظه ۱۶.۱.۱. اگر (x,U) و (y,V) دو کارت از یک منیفلد جهت پذیر بوده و U و V همبند باشند، آن‌گاه جهت‌پذیری ایجاب می‌کند که $det||\frac{\partial y^i}{\partial x^j}||$ روی $U\cap V$ دارای یک علامت ثابت باشد. برای مثال نوار موبیوس جهت پذیر نیست.

قضیه ۱۷.۱.۱. [۲۵] منیفلد M با بعد n جهت پذیر است اگر و تنها اگر یک $n-$ فرم $\omega\in\Omega^n M$ وجود داشته باشد به طوریکه ω در تمام نقاط M مخالف صفر باشد.

۲.۱ مفاهیمی از توپولوژی دیفرانسیل

تعریف ۱.۲.۱. (مقدار منظم) اگر $f:X\longrightarrow Y$ نگاشتی هموار از منیفلدها باشد، یک نقطهٔ $y\in Y$ مقدار منظم برای f نامیده می‌شود اگر در هر نقطهٔ x که $f(x)=y$، $df_x:T_x(X)\longrightarrow T_yY$ پوشا باشد. نقطهٔ $y\in Y$ که مقدار منظم f نباشد مقدار بحرانی نام دارد.

تعریف ۲.۲.۱. (تقاطع[۶]) اگر X و Y دو منیفلد هموار و $f:X\longrightarrow Y$ یک نگاشت هموار و Z زیر منیفلدی از Y باشد، f را بر زیر منیفلد Z متقاطع گوییم و می‌نویسیم $f\pitchfork Z$ هرگاه:

$$Imdf_x+T_yZ=T_yY \qquad \text{که} f(x)=y \qquad \forall x\in f^{-1}(Z)$$

به عبارت دیگر بردارهای $Imdf_x$ کمبود بردارهای T_yZ را جبران می‌کنند تا بتوانند کل فضای T_yY را تولید کنند. حال اگر X زیر منیفلدی از Y باشد، نگاشت شمول $i:X\longrightarrow Y$ را در نظر می‌گیریم که در آن Z نیز زیر منیفلدی از Y است. پس نگاشت $di_x:T_xX\longrightarrow T_yY$ نیز نگاشتی شمول است.
پس $di_x(T_xX)\subseteq T_yY$.
بنابراین برای هر $x\in X\cap Z$ رابطهٔ $T_xX+T_yY=T_xY$ را داریم که در این رابطه نقش X و Z هر دو یکی است. یعنی

$$\forall x\in X\cap Z \Longleftrightarrow i\pitchfork Z$$

حال دو زیر منیفلد X و Z از M را متقاطع گوییم هرگاه $\forall x\in X\cap Z$ داشته باشیم $T_xX+T_yY=T_xY$ و می‌نویسیم: $X\pitchfork Z$.

[۶] Transversality

قضیه ۳.۲.۱. [۱۳] هرگاه $f : X \longrightarrow Y$ بر $Z \subset Y$ متقاطع باشد، آن‌گاه $f^{-1}(Z)$ زیر منیفلد X است و به علاوه بعد مکمل $f^{-1}(Z)$ در X، برابر با بعد مکمل Z در Y می‌باشد.

قضیه ۴.۲.۱. [۱۳] اگر X و Z دو زیرمنیفلد متقاطع از Y باشند آن‌گاه $X \cap Z$ زیر منیفلد Y است و داریم:

$$codim(X \cap Z) = codimX + codimZ$$

تعریف ۵.۲.۱. (عدد اشتراک) دو زیرمنیفلد X و Z درون Y از بعد متمم هستند اگر:

$$dimX + dimZ = dimY$$

. اگر $X \pitchfork Z$ و X و Z از بعد متمم باشند آن‌گاه:

$$codim(X \cap Z) = codimX + codimZ = dimZ + dimX = dimY$$

$$\Rightarrow dim(X \cap Z) = 0$$

بنابراین $X \cap Z$ مجموعه‌ای از نقاط گسسته است که تعداد این نقاط را عدد اشتراک X و Z گوییم و با $\sharp(X \cap Z)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۶.۲.۱. (عدد اشتراک به هنگ ۲) فرض کنیم X یک منیفلد فشرده و نه لزوماً درون Y است و $f : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت هموار متقاطع با منیفلد بستهٔ Z در Y باشد که $dimX + dimZ = dimY$.

بر طبق قضیهٔ ۳.۲.۱، $f^{-1}(Z)$، زیرمنیفلد صفر بعدی بسته از X است، بنابراین یک مجموعهٔ متناهی است. حال عدد اشتراک نگاشت f با Z به هنگ ۲ را با نماد $I_2(f, Z)$ نمایش داده و برابر با تعداد نقاط $f^{-1}(Z)$ به هنگ ۲ تعریف می‌کنیم. $I_2(X, Z)$ برابر با $\sharp X \cap Z$ می‌باشد که طبق روالی که در تعریف ۲.۲.۱ توضیح داده شد به دست می‌آید.

تعریف ۷.۲.۱. (عدد جهت و عدد اشتراک) فرض کنیم X و Y و Z منیفلدهای مرزدار و جهت‌دار و X و Z زیرمنیفلدهای Y باشند و $dimX + dimZ = dimY$.

اگر $f : X \longrightarrow Y$ با Z متقاطع باشد از آنجا که X و Z از بعد متمم هستند، پس داریم :

$$df_x(T_x(X)) \oplus T_z(Z) = T_z(Y)$$

بنابراین طبق مطالب گفته شده در بالا، $f^{-۱}(Z)$ شامل تعداد متناهی نقطه است که عدد جهت در نقطهٔ $x \in f^{-۱}(Z)$ عبارت است از:

عدد جهت در نقطهٔ x، ۱+ است اگر جمع جهت‌های داده شده توسط $df_xT_x(X)$ و $T_z(Z)$ که در آن $z = f(x)$، روی T_zY (قاعدهٔ دست راست) مثبت باشد، در غیر این صورت برابر با ۱− منفی است.

عدد اشتراک $I(f, Z)$ جمع اعداد جهت برای همهٔ $x \in f^{-۱}(Z)$ است.

حال اگر $X \pitchfork Z$، ما $I(X, Z)$ را طبق روال ۲.۲.۱، برای نقاط متعلق به $X \cap Z$ تعریف می‌کنیم. در حالت خاص فرض کنیم $dimY = ۲dimX$. بنابراین عدد اشتراک $I(X, X)$ یا عدد خود اشتراکی را می‌توانیم تعریف می‌کنیم.

تعریف ۸.۲.۱. (مشخصهٔ اویلر[۷]) اگر Y یک منیفلد جهت‌دار فشرده باشد، مشخصهٔ اویلر آن یعنی $\chi(Y)$، برابر است با عدد خود اشتراک از قطر Δ در $Y \times Y$: $\chi(Y) = I(\Delta, \Delta)$.

گزاره ۹.۲.۱. [۱۳] مشخصهٔ اویلر از یک منیفلد جهت‌دار فشرده از بعد فرد، صفر است.

تعریف ۱۰.۲.۱. (درجهٔ نگاشت) اگر X و Y دو منیفلد هم‌بعد باشند و Y همبند باشد، درجهٔ هر نگاشت هموار $f : X \longrightarrow Y$ برای هر نقطهٔ $y \in Y$ برابر است با: $deg(f) = I(f, \{y\})$.

تعریف ۱۱.۲.۱. (فضای $\mathbb{H}^k$) نیم فضای $\mathbb{H}^k$، در $\mathbb{R}^k$، از همهٔ نقاط با مختصات غیر منفی تشکیل شده است. مرز $\mathbb{H}^k$ برابر با $\mathbb{R}^{k-۱}$ است که یک نشانده در $\mathbb{R}^k$ می‌باشد.

تعریف ۱۲.۲.۱. (منیفلد مرزدار) یک زیرمجموعه X از $\mathbb{R}^n$، یک منیفلد $k-$ بعدی با مرز است اگر هر نقطهٔ y از X دارای یک همسایگی دیفئومورف با یک مجموعهٔ باز در فضای $\mathbb{H}^k$ باشد. که مرز X را با ∂X نشان می‌دهیم.

---

[۷] Euler