بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه زنجان
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

قضایای KKM و کی فن در فضاهای متریک ابرمحدب

نگارش:

جعفر علی عبدی

استاد راهنما: **دکتر هادی خطیب زاده**

شهریور ۱۳۸۹

تقدیم به

تو

چکیده

در این پایان نامه، پس از شناخت اصل KKM و صورتهای مختلف آن به برخی کاربردهای آن از جمله در قضیه نقطه ثابت کی فن اشاره می کنیم. سپس با معرفی فضاهای متریک ابرمحدب و خواص و معادلهای آن به بررسی اصل KKM و قضیه نقطه ثابت کی فن و کاربردهای آن در فضاهای متریک ابرمحدب می پردازیم .

کلمات کلیدی: نگاشت مجموعه مقدار، نگاشت KKM، اصل KKM، فضای متریک ابرمحدب، درختهای متریک، قضیه نقطه ثابت کی فن.

فهرست مندرجات

پیش گفتار

اصل KKM سال ۱۹۲۹ توسط کاستر[1] ، کوراتوسکی [2] و مازورکویکز[3] معرفی گردید و سال ۱۹۶۱ کی فن [4] آن را به حالت نامتناهی بعد تعمیم داد که به لم هندسی فن شهرت یافت . براور[5] در سال ۱۹۶۸ یک فرم نقطه ثابت از لم هندسی فن ارائه نمود که هم اکنون قضیه نقطه ثابت براور– فن خوانده می شود. سال ۱۹۷۲ فن با بکارگیری لم هندسی خود یک نامساوی مینیمم – ماکسیمم ثابت کرد. کاربرد وسیع اصل KKM و قضیهٔ نقطه ثابت کی فن و نامساوی مینیمم – ماکسیمم کی فن، در آنالیز تابعی غیر خطی و شاخه های مختلف آن مانند نظریهٔ نقطه ثابت و انطباق، نامساویهای تغییراتی، آنالیز محدب، نظریهٔ بازی، ریاضیات مالی و علوم وابسته انگیزه ای گردید تا ریاضی دانان زیادی به انجام پژوهش هایی در این زمینه مشغول گردند که از آن جمله می توان به خمسی [6]، کرک [7]، سیمز[8] ، یوان [9]، تان [10]، دانگ [11]، چن[12]، چانگ [13]، زعفرانی[14]، فخار[15] و ... اشاره نمود. موضوع اصلی این پایان نامه بررسی اصل KKM و قضیهٔ نقطه ثابت کی فن و کاربردهای آن در فضاهای متریک ابر محدب است. ابتدا در فصل اول مقدماتی از آنالیز تابعی و حقیقی را که برای مطالعه این پایان نامه نیاز است برای راحتی خواننده می آوریم و در فصل دوم به معرفی اصل

[1] Knaster
[2] Kuratowski
[3] Mazurkiewicz
[4] Ky Fan
[5] Browder
[6] M. A. Khamsi
[7] W. A. Kirk
[8] Sims
[9] George Xian-Zhi Yuan
[10] Tan
[11] Dung
[12] Chen
[13] Chang
[14] Zafarani
[15] Fakhar

KKM و انواع مختلف آن و همچنین ارائه کاربردهایی از آن می پردازیم . سپس در فصل سوم ساختار فضاهای متریک ابرمحدب را مورد مطالعه قرار داده و برای شناخت بهتر این فضاها به بیان مثالهای مختلفی از آنها و بررسی خواص و معادلهای آنها می پردازیم. فضاهای متریک ابرمحدب که در سال ۱۹۵۶ توسط آیرونسن [۱۶] و پانیچپاکدی [۱۷] معرفی شدند، به دلیل ویژگی های خاصشان و مثالهای مختلفی مانند فضاهای ℓ^∞ و L^∞ جایگاه مناسبی برای اثبات قضایای مختلفی از آنالیز غیرخطی از جمله نظریه نقطه ثابت، آنالیز محدب و اصل KKM فراهم کردند. از جمله می توان به اولین و معروفترین قضیه دراین فضاها موسوم به قضیهٔ ساین[۱۸] — سواردی[۱۹] اشاره نمود. در نهایت در فصل چهارم با معرفی نگاشت KKM در فضاهای متریک ابرمحدب، قضایای KKM و کی فن و برخی کاربردهای آنها را در این فضاها مورد مطالعه قرار خواهیم داد. خواننده علاقه مند برای مطالعه بیشتر علاوه بر فصل های دوم و چهارم این پایان نامه می تواند به مراجع [۳۶، ۳۳، ۳۴، ۲۱، ۲۰، ۱۸، ۱۶، ۱۳، ۸، ۷، ۱] مراجعه نماید.

جعفرعلی عبدی

شهریور ۱۳۸۹

[۱۶] Aronszajn

[۱۷] Panitchpakdi

[۱۸] Sine

[۱۹] Soardi

فصل ۱

تعاریف، قضایا و مفاهیم ابتدایی

در این بخش تعاریف و قضایای مهمی از آنالیز تابعی و حقیقی که در فصلهای آتی نیاز خواهیم داشت از مراجع [۴، ۷، ۲۹، ۳۰] بیان می نماییم.

۱.۱ فضاهای خطی نرمدار

فضای برداری X را روی میدان اعداد حقیقی را یک فضای خطی نرمدار نامیم اگر به هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نا منفی مانند $\| x \|$ به نام نرم x چنان مربوط شده باشد که

آ) به ازای هر x و y در X ، $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

ب) اگر $x \in X$ و α عددی حقیقی باشد ، $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$

پ) $\| x \| = 0$ تساوی $x = 0$ را ایجاب کند.

با توجه به (آ) نامساوی مثلثی برقرار است یعنی

$$\| x - y \| \leq \| x - z \| + \| z - y \|, \ (x, y, z \in X)$$

بنابراین با توجه به (ب) و (پ) می توان دید که هر فضای خطی نرمدار با متر $d(x,y) = \parallel x - y \parallel$ یک فضای متری است.

یک فضای متری را کامل نامیم هرگاه هر دنباله کشی در آن همگرا باشد. و یک فضای خطی نرمدار را که به عنوان فضای متری کامل باشد یک فضای باناخ گوییم.

فرض کنید τ یک توپولوژی روی فضای برداری X باشد به طوری که

آ) همه نقاط به عنوان مجموعه تک عضوی بسته باشند.

ب) اعمال فضای برداری تحت توپولوژی τ پیوسته باشند.

در این صورت X را یک فضای برداری توپولوژیک نامیم.

لذا همه فضاهای خطی نرمدار با توپولوژی تولید شده توسط نرم خود به یک فضای برداری توپولوژیک تبدیل می شوند.

فضای برداری H را یک فضای ضرب داخلی نامیم اگر به هر جفت مرتب از بردارهای x,y در H یک عدد حقیقی مانند (x,y) به نام حاصل ضرب داخلی x,y چنان مربوط شده باشد که شرایط زیر برقرار باشد:

آ) $(y,x) = (x,y)$

ب) برای هر $x,y,z \in H$، $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$

پ) برای هر $x,y \in H$ و برای هر α اسکالر، $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$

ت) به ازای هر $x \in H$ ، $(x,x) \geq ۰$

ث) $(x,x) = ۰$ اگر و فقط اگر $x = ۰$

بنابر این با توجه به شرایط بالا می توان به ازای هر $x \in H$ نرم x را به صورت زیر تعریف کرد

$$\parallel x \parallel^۲ = (x,x)$$

نا مساوی شوارتز. خواص بیان شده در فضای ضرب داخلی ایجاب می کنند که به ازای هر $x, y \in H$

$$| (x, y) | \leq \| x \| . \| y \| .$$

لذا با توجه به نرم تعریف شده در بالا H یک فضای متری است و هرگاه این فضای متری کامل باشد آنگاه H یک فضای هیلبرت نامیده می شود. در فضای هیلبرت H اتحاد زیر که به اتحاد متوازی الاضلاع معروف است برقرار می باشد

$$\| x + y \|^{۲} + \| x - y \|^{۲} = ۲ \| x \|^{۲} + ۲ \| y \|^{۲}$$

و همین طور اتحاد قطبی سازی که به صورت زیر است در فضای هیلبرت H برقرار است که حاصلضرب داخلی (x, y) را بر حسب نرم ها بیان می کند

$$۴(x, y) = \| x + y \|^{۲} - \| x - y \|^{۲}$$

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی باشد. نگاشت $S : X \times X \to \mathbb{R}$ را یک فرم دوخطی گوییم هرگاه برای هر $x, y, z \in X$ و هر $a, b \in \mathbb{R}$، داشته باشیم

(۱) $S(x, ay + bz) = aS(x, y) + bS(x, z)$

(۲) $S(ax + by, z) = aS(x, z) + bS(y, z)$

تعریف ۲.۱.۱ تبدیل خطی $T : X \to Y$ از فضای خطی نرمدار X به توی فضای خطی نرمدار Y در نظر گرفته و نرم آن را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\| T \| = \sup\{\| Tx \| ; \| x \| \leq ۱\}$$

هرگاه $\| T \| < \infty$ آنگاه T را یک تبدیل خطی کراندار می نامند. اگر $Y = \mathbb{F}$ که در آن $\mathbb{F}$ میدان اسکالر می باشد آن گاه T را یک تابعک خطی گوییم. مجموعه همه تبدیل های خطی کراندار از X به Y را با $B(X, Y)$ نمایش می دهیم.

قضیه ۳.۱.۱ برای هر تبدیل خطی T از فضای خطی نرمدار X به فضای خطی نرمدار Y گزاره های زیر معادلند:

آ) T کراندار است.

ب) T پیوسته است.

پ) T در یک نقطه از X پیوسته است.

برهان . به [۳۰] مراجعه شود. □

فرض کنیم X یک فضای خطی نرمدار باشد. $X^* = B(X, \mathbb{F})$ را مجموعه همه تابعک های خطی کراندار از X در نظر می گیریم، که آن را فضای دوگان X می نامند. دوگان فضای دوگان را نیز با $(X^*)^* = X^{**}$ نمایش می دهیم.

قضیه ۴.۱.۱ (نمایش ریس — فرشه[۱]) فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد، برای هر $\varphi \in H^*$ داده شده، $v \in H$ منحصر بفرد وجود دارد به طوری که

$$\forall h \in H, \quad \varphi(h) = (v, h)$$

به علاوه،

$$| v | = \| \varphi \|_{H^*}$$

برهان . به [۴] مراجعه شود. □

تعریف ۵.۱.۱ فضای توپولوژیک X را جدایی پذیر گوییم هرگاه حاوی یک زیر مجموعه چگال شمارش پذیر در X باشد.

[۱] Rieze-Frechet

تعریف ۶.۱.۱ فضای توپولوژیک خطی X را موضعا محدب گوییم هرگاه هر نقطه از آن دارای یک پایه موضعی با اعضای محدب باشد.

۲.۱ نگاشت های مجموعه مقدار

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید X,Y دو مجموعه باشند. نگاشت $S : X \to 2^Y$ را که در آن 2^Y نشان دهنده مجموعه توانی Y می باشد، یک نگاشت مجموعه مقدار گوییم. یک مثال طبیعی از این تعریف به این صورت است که اگر $s : X \longrightarrow Y$ یک تابع تک مقداری باشد همیشه می توان s^{-1} را به صورت یک نگاشت مجموعه مقدار تعریف کرد. که به ازای هر $y \in Y$ یک مجموعه جواب به صورت

$$s^{-1}(y) := \{x \in X; s(x) = y\}$$

برای معادله $f(x) = y$ متناظر می کند. مجموعه های Sx را مقادیر S و مجموعه های $G_S = \{(x,y) \in X \times Y \mid y \in Sx\}$ و $S(X) = \cup_{x\in X} Sx$ را به ترتیب نمودار و تصویر S گوییم.

تعریف ۲.۲.۱ نگاشت $S^{-1} : Y \to 2^X$ که $y \mapsto S^{-1}y = \{x \in X \mid y \in Sx\}$ نگاشت وارون S بوده و مقادیر آن را تارهای S گوییم.

تعریف ۳.۲.۱ : نگاشت $S^* : Y \to 2^X$ که $y \mapsto S^*y = X - S^{-1}y$ نگاشت دوگان S بوده و مقادیر آن را هم‌تارهای S نامیم.

تعریف ۴.۲.۱ نقطه $x_0 \in X$ را یک نقطه ثابت برای نگاشت مجموعه مقدار $S : X \to 2^X$ است هرگاه $x_0 \in Sx_0$.

تذکر: توجه نمایید که S پوشاست (یعنی $S(X)=Y$) اگر و تنها اگر تارهای آن $S^{-1}y$ همگی ناتهی باشند.

اثبات . ($\Leftarrow$) فرض کنیم $S(X)=Y$ با توجه با اینکه $S(X)=\cup_{x\in X}Sx$ داریم

$$\forall y\in Y \exists\ x\in X \ni y\in Sx \Rightarrow S^{-1}y\neq\phi$$

($\Rightarrow$) فرض کنیم $S^{-1}y\neq\phi$ نشان می دهیم $S(X)=Y$.

(۱) $\forall x\in X; Sx\subseteq Y\Rightarrow S(X)=\cup_{x\in X}Sx\subseteq Y$

(۲) $\forall y\in Y; S^{-1}y\neq\phi\Rightarrow \forall y\in Y\ \exists x\in X;\ y\in Sx\Rightarrow y\in\cup_{x\in X}Sx\Rightarrow Y\subseteq\cup_{x\in X}Sx=S(X)$

تعریف ۵.۲.۱ دامنه S را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$D(S):=\{x\in X; Sx\neq\emptyset\}$$

و برد S نیز برابر است با اجتماع تصاویر Sx یعنی

$$\mathrm{R(S)}=\bigcup_{\mathrm{x}\in\mathrm{X}}\mathrm{Sx}$$

تذکر: گوییم S دارای خاصیت P است اگر و تنها اگر نمودار G آن خاصیت را داشته باشد مثلاً S بسته یا فشرده یا محدب و ... است اگر و تنها اگر نمودار آن دارای این خصوصیات باشد.

فرض کنید $*$ نشان دهنده یک عمل دوتایی روی مجموعه ها باشد با توجه به این عمل روی توابع مجموعه—مقدار عمل دوتایی به صورت زیر تعریف می کنیم

$$S_1*S_2: x\longrightarrow S_1x*S_2x$$

به عنوان مثال $S_1\cap S_2$ و $S_1\cup S_2$ و S_1+S_2

و همین طور اگر α نگاشتی باشد که زیر مجموعه های Y را به زیر مجموعه های Y بنگارد، آن گاه

$$\alpha(S): x\longrightarrow\alpha(Sx)$$

و گوییم $S \subset G$ اگر و تنها اگر $\mathrm{G_S} \subset \mathrm{G_G}$ و در این حالت گوییم که G توسیعی از S است.

لم ۶.۲.۱ نگاشت مجموعه مقدار S محدب است اگر و تنها اگر به ازای هر $x_۱, x_۲ \in D(S)$ و به ازای هر $t \in [۰, ۱]$ داشته باشیم

$$tSx_۱ + (۱ - t)Sx_۲ \subset S(tx_۱ + (۱ - t)x_۲)$$

برهان . با توجه به تعریف S محدب است اگر و تنها اگر نمودار آن یک مجموعه محدب در $X \times Y$ باشد. حال فرض کنید که $y_۱ \in Sx_۱$ و $y_۲ \in Sx_۲$ در این صورت $(x_۱, y_۱), (x_۲, y_۲) \in \mathrm{G_S}$ لذا $(tx_۱ + (۱ - t)x_۲, ty_۱ + (۱ - t)y_۲) = t(x_۱, y_۱) + (۱ - t)(x_۲, y_۲) \in \mathrm{G_S}$ اگر و تنها اگر $ty_۱ + (۱ - t)y_۲ \in S(tx_۱ + (۱ - t)x_۲)$. $\square$

تعریف ۷.۲.۱ فرض کنید X, Y دو فضای توپولوژیک، $T : X \to ۲^Y$ نگاشت مجموعه مقدار و $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد.

(۱) T را شبه پیوسته بالایی گوییم هرگاه برای هر $x \in X$ و هر مجموعه باز V که $T(x) \subset V$، همسایگی باز U از x در X موجود باشد به طوری که برای هر $z \in U$، $T(z) \subset V$

(۲) T را دارای خاصیت اشتراک موضعی گوییم هرگاه برای هر $x \in X$ که $T(x) \neq \phi$، همسایگی باز $N(x)$ از x موجود باشد به طوری که $\bigcap_{z \in N(x)} T(z) \neq \phi$

(۳) T را دارای بخش های پایینی باز گوییم هرگاه برای هر $y \in Y$، مجموعه $T^{-۱}(y) = \{x \in X : y \in T(x)\}$ در X باز باشد

(۴) $f(x, y)$ را $W-$ شبه پیوسته پایینی ($W-$ شبه پیوسته بالایی) در y گوییم هرگاه برای هر $y \in Y$ و هر $r \in \mathbb{R}$ که $\{x \in X : f(x, y) > r\} \neq \phi$ $(\{x \in X : f(x, y) < r\} \neq \phi)$، $x' \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $y \in int\{z \in Y : f(x', z) > r\}$ $(y \in int\{z \in Y : f(x', z) < r\})$.

تذکر: اگر $f(x,y)$ شبه پیوسته پایینی (شبه پیوسته بالایی) در y باشد، آنگاه $W-$ شبه پیوسته پایینی ($W-$ شبه پیوسته بالایی) در y نیز هست. به علاوه، اگر T دارای بخش های پایینی باز باشد، آنگاه T دارای خاصیت اشتراک موضعی است.

۳.۱ توپولوژی گوی

لیندنستراس [۲] و *کارسون* [۳] در سال ۱۹۶۶ از مفهوم توپولوژی گوی در زمینه فشردگی ضعیف در فضاهای باناخ استفاده کرده‌اند. مطالب این بخش برگرفته از [۱۰]، حاصل کار گودفروی [۴] و *کالتون* [۵] است. برخی از خواص مهم آن را ذکر می‌کنیم و برای برهان و جزئیات بیشتر، خواننده را به [۱۰] ارجاع می‌دهیم.

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. ضعیف‌ترین توپولوژی روی X که در آن برای هر $x \in X$ و $\rho \in \mathbb{R}^+$، گوی‌های

$$B(x,\rho) = \{u: \ \|u-x\| \leqslant \rho\}$$

بسته باشند را توپولوژی گوی گوییم و آن را با b_X نشان می‌دهیم.

مشاهده می‌شود

$$V = \{X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\rho_i) : n \in \mathbb{N}\}$$

برای $i = 1,...,n$، $\rho_i < \|x_i\|$، تشکیل یک پایه برای این توپولوژی می‌دهند.

برخی خواص

۱) b_X یک توپولوژی هاسدورف است.

۲) برای هر ثابت $y \in X$، نگاشت $x \to x+y$، b_X- پیوسته است.

۳) برای $\lambda > 0$ ثابت، نگاشت $x \to \lambda x$، b_X- پیوسته است.

[۲] Lindenstrauss
[۳] corson
[۴] Godefroy
[۵] kalton

۴) نگاشت $x \to -x$، $-b_X$ پیوسته است.

۵) اگر X جدایی‌پذیر باشد، هر $x \in X$ دارای یک پایه موضعی شمارش پذیر است.

نکته ۲.۳.۱ در فضای X با توپولوژی گوی، v_n به سمت x همگراست اگر و تنها اگر برای هر $y \in X$، داشته باشیم

$$\liminf \|v_n - y\| \geqslant \|x - y\| .$$

برای مشاهده‌ی آن فرض کنیم $y \in X$ موجود باشد به قسمی که

$$\liminf \|v_n - y\| < \|x - y\| .$$

زیر دنباله‌ی $(v_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ یافت می‌شود به طوری که $\|v_{n_i} - y\| < \|x - y\|$. $\alpha \in \mathbb{R}$ را بین $\|x - y\|$ و $\|v_{n_i} - y\|$ اختیار کرده و b_X- همسایگی $X \backslash B(y, \alpha)$ از x را تشکیل می‌دهیم. زیردنباله‌ی (v_{n_i}) با آن b_X- همسایگی، دارای اشتراک تهی است. پس (v_{n_i}) به x همگرا نیست.

برعکس، اگر (v_n) در X نسبت به b_X- توپولوژی به x همگرا نباشد، آن گاه یک همسایگی چون $V = X \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(y_i, r_i)$ موجود است به قسمی که برای یک $n \in \mathbb{N}$ و هر $m \geqslant n$، v_m ها در آن همسایگی قرار نمی‌گیرند. برای تمامی این y_i ها، داریم

$$\liminf \|v_m - y_i\| < \|x - y_i\| .$$

فصل ۲

نظریه KKM و کاربردهای آن

۱.۲ مقدمه

سال ۱۹۲۹ ؛ کاستر[1]، کوراتوسکی [2] و مازورکویکز[3]؛

$Knaster$ $\quad$ $Kuratowski$ $\quad$ $Mazurkiewics$

گزاره زیر را ثابت کردند : فرض کنید n یک عدد صحیح مثبتی باشد، $N=\{0,1,\ldots,n\}$ و Δ_n نمایشگر $n-$ سادک واحد در فضای اقلیدسی $n+1-$ بعدی $\mathbb{R}^{n+1}$ باشد. برای هر $S\subset\{0,1,\ldots,n\}$ وجه تولید شده توسط بردارهای واحد e_i از Δ_n را با Δ_S نمایش می دهیم. پوشش بسته $C=\{C_0,C_1,\ldots,C_n\}$ از Δ_n

---

[1] Knaster

[2] Kuratowski

[3] Mazurkiewicz

را یک پوشش KKM گوییم، هرگاه برای هر $\phi \neq S \subset N$ داشته باشیم $\Delta_S \subset \cup_{i\in S} C_i$. آنها ثابت کردند اگر $\{C_{\circ}, C_{1}, \ldots, C_N\}$ یک پوشش بسته KKM از Δ_n باشد، آنگاه $\cap_{i=\circ}^{n} C_i$ ناتهی است. این نتیجه را اصل KKM یا لم KKM نیز گویند. مفهوم هندسی آن در شکل زیر نمایش داده شده است.

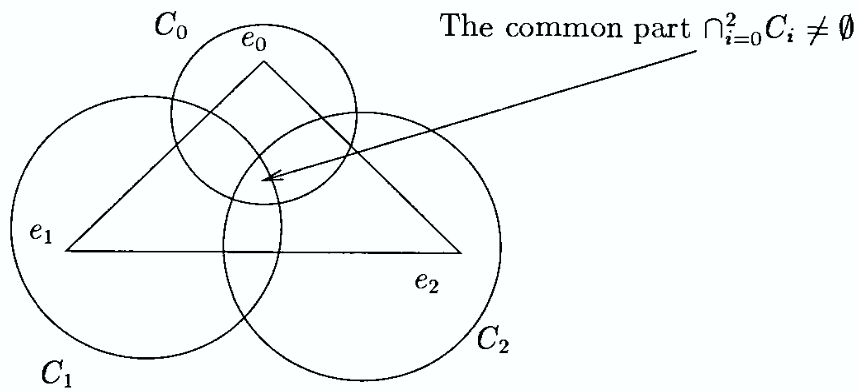

Figure 1.1: The geometric structure of the KKM principle.

سال ۱۹۶۱ کی فن [4]

Ky Fan

قضیه کلاسیک KKM را به فضاهای برداری توپولوژیک هاسدورف نامتناهی بعد گسترش داد و یک لم مقدماتی ولی بسیار اساسی هندسی برای نگاشتهای مجموعه مقدار ثابت کرد که به لم هندسی فن شهرت یافت. سال ۱۹۶۶ براور[5] یک معادل نقطه ثابت از لم هندسی فن ارائه نمود، که هم اکنون به نام قضیهٔ نقطه ثابت براور– فن مشهور است. بعد از آن توسیع های زیادی از قضیه نقطه ثابت براور– فن و کاربردهای آن در نظریه نقطه ثابت و انطباق، نامساویهای مینیمم – ماکسیمم، نامساویهای تغییراتی، آنالیز محدب، نظریه بازی،

[4] Ky Fan
[5] Brower

ریاضیات مالی و علوم وابسته ارائه گردید. سال ۱۹۷۲ فن با بکارگیری لم هندسی خود توانست یک نامساوی مینیمم — ماکسیمم که نامساوی مینیمم — ماکسیمم کی فن یا اصل مینیمم — ماکسیمم کی فن نامیده می شود را به اثبات رساند. این نامساوی از مهمترین اصول آنالیز غیر خطی است که کاربردهای بسیاری در نظریه پتانسیل، معادلات دیفرانسیل جزئی، عملگرهای یکنوا، نامساویهای تغییراتی، نظریهٔ عملگرها، نظریهٔ بازی، بهینه سازی، برنامه ریزی خطی و غیرخطی و جبرخطی دارد.

نمادگذاری:

۱. مجموعه تمام زیر مجموعه های X را با ۲^X نمایش می دهیم.

۲. فرض کنید E یک فضای برداری روی اعداد حقیقی و $A \subset E$ باشد، پوش محدب A را با $[A]$ یا $conv(A)$ نمایش می دهیم.

۳. برای هر عدد طبیعی n می نویسیم $[n] = \{i \in \mathbb{N} \mid ۱ \leq i \leq n\}$

۲.۲ تعاریف و چند لم مقدماتی

تعریف ۱.۲.۲ فرض کنید E یک فضای برداری و $X \subset E$ زیر مجموعه‌ای دلخواه باشد. نگاشت $G : X \to ۲^E$ را نگاشت کاستر — کوراتوسکی — مازورکویکز (یا به طور خلاصه KKM) گوییم هرگاه

$$[A] = conv\{x_۱, \ldots, x_s\} \subset G(A) = \cup_{i=۱}^{s} Gx_i$$

برای هر زیرمجموعه متناهی $A = \{x_۱, \ldots, x_s\}$ از X برقرار باشد. G را KKM قوی گوییم هرگاه

(i) برای هر $x \in X$ داشته باشیم $x \in Gx$

(ii) هم‌تارهای G^*y از G محدب باشند.

لم ۲.۲.۲ فرض کنید E یک فضای برداری و $C \subset E$ محدب و $G : C \to ۲^E$ نگاشت KKM قوی باشد، در این صورت G ؛ KKM است.

برهان . فرض کنیم $A = \{x_۱, \ldots, x_s\} \subset X$ و $y_۰ \in [A]$. نشان می دهیم $y_۰ \in \cup_{i=۱}^{s} Gx_i$. چون $y_۰ \in Gy_۰$