تقدیم به آنهایی که دوستشان دارم

چکیده

گراف های جبری جامع روی حلقه های تعویض پذیر

سوگند پیک حرفه

در این پایان نامه همواره R یک حلقه تعویض پذیر یکدار است.

به یک حلقه جابه جایی R، گراف شمارنده صفر آن، $\Gamma(R)$ و گراف جامع آن، $T(\Gamma(R))$ وابسته می شود. در این پایان نامه ما گراف شمارنده صفر $\Gamma(R)$ و گراف جامع $T(\Gamma(R))$ را مطالعه می نمائیم و گراف های شمارنده صفر با گونا های صفر و یک را بررسی می کنیم. همچنین همه ی کلاس های یکریختی از حلقه های جابه جایی متناهی که گراف های جامع آنها از گونای حداکثر یک است مورد بررسی می گیرند.

واژه های کلیدی: حلقه جابه جایی، گراف، گراف مسطح، گراف شمارنده صفر، گراف جامع، گونای گراف.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

پیشگفتار :

آغاز نظریه گراف در سده هجدهم میلادی به وقوع پیوسته است. اویلر مفهوم گراف را برای حل مساله پل های کونیگسبرگ ابداع کرد اما رشد و پویایی این نظریه عمدتاً مربوط به نیم سده ی اخیر و با رشد علم انفورماتیک بوده است. مهم‌ترین کاربرد گراف مدل سازی پدیده های گوناگون و بررسی بر روی آنهاست. رئوس مطالبی که در این پایان نامه بررسی شده است به شرح زیر می باشد:

فصل اول شامل مفاهیم و تعاریف اولیه می باشد.

در فصل دوم به مطالعه حلقه هایی می پردازیم که گراف شمارنده صفرشان دارای گونای صفر و یا یک باشند. همچنین به بررسی شرایطی می پردازیم که تحت آن ها گراف شمارنده صفر یک حلقه دارای گونایی بزرگتر یا مساوی ۲ شود. همچنین تمامی حلقه هایی که یکریخت با $\mathbb{Z}_n$ می باشند و گونای گراف شمارنده صفرشان کوچکتر یا مساوی یک می باشند را می یابیم.

در فصل سوم به بررسی گونای گراف جامع می پردازیم و نشان می دهیم که به ازای هر عدد صحیح و مثبت g، حداکثر تعداد متناهی حلقه متناهی موجود است که گراف جامع آن ها دارای گونای g است. و همچنین به مطالعه حلقه هایی می پردازیم که گونای گراف جامعشان یک یا صفر می باشند. به خصوص علاقه مندیم که حلقه ها را در دو حالت موضعی و غیر موضعی در نظر گرفته و ساختار آن ها را مشخص کنیم.

.

فصل اول

مفاهیم و تعاریف اولیه

۱- ۱مفاهیم کلی گراف

۱-۲مفاهیم مربوط به گرافهای جبری، گراف های شمارنده صفر و گراف های جامع

فرض کنیم G یک گراف با مجموعه رئوس $V(G)$ و مجموعه یال های $E(G)$ باشد و فرض کنیم R یک حلقه جابه جایی یکدار و $Z(R)$ مجموعه شمارنده های صفر R باشد.

تعریف(۱-۱-۱): گراف ساده گرافی است که بین هر دو راس متمایز آن فقط یک یال وجود دارد.

تعریف(۱-۱-۲): دو راس vو w از گراف G را مجاور گویند، هرگاه یک یال بین آن دو وجود داشته باشد (یعنی یک یال به صورت $v-w$ داشته باشد). در این صورت می گوییم که رئوس v و w بر آن یال واقع هستند. به همین ترتیب دو یال متمایز از G را مجاور گوییم هرگاه حداقل یک راس مشترک داشته باشند.

تعریف(۱-۱-۳): یک گراف ساده را که هر دو راس متمایز آن مجاور باشند، یک گراف کامل می نامیم. یک گراف کامل با n راس را به صورت K_n نمایش می دهیم.

تعریف(۱-۱-۴): فرض کنید مجموعه رئوس یک گراف را بتوان به دو مجموعه مجزای $V_۱$ و $V_۲$ افراز کرد به طوری که هر یال G یک راس از $V_۱$ را به یک راس از $V_۲$ وصل کند . در این صورت G را یک گراف دو بخشی گویند و به صورت $G(V_۱,V_۲)$ نشان می دهند.

دریک گراف دو بخشی لزوماً هر راس از $V_۱$ به هر راس از $V_۲$ وصل نیست. اما اگر چنین باشد و اگر G ساده باشد، آنگاه G را یک گراف دو بخشی کامل گویند. هنگامی که G دو بخشی کامل متناهی باشد آن را با $K_{r,s}$ نشان می دهند که در آن r و s به ترتیب تعداد رئوس در $V_۱,V_۲$ هستند. $K_{r,s}$، تعداد $r+s$ راس و تعداد rs یال دارد.

تعریف(۱-۱-۵): یک گراف r- بخشی گرافی است که مجموعه راس های آن را می توان به r زیر مجموعه V_i، $(1\leq i\leq r)$ افراز کرد به طوریکه یالی که دو عضو یکی از آن مجموعه ها را به هم وصل می نماید موجود نباشد. یک گراف r- بخشی که هر راس آن با هر راس دیگر که در مجموعه یکسانی قرار ندارد متصل شده باشد، را یک گراف r- بخشی کامل گویند. اگر G یک گراف r- بخشی کامل باشد به طوریکه $|V_i|=\alpha_i$، آنگاه گراف G را با نماد $K_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r}$ نمایش می دهیم.

تعریف(۱-۱-۶): یک گراف دو بخشی کامل به صورت $K_{1,s}$، یک گراف ستاره ای نامیده می شود.

تعریف(۱-۱-۷): به ازای هر عدد صحیح نا منفی k، یک گراف، k- منظم نامیده می شود، اگر هر راس آن از درجه ی k باشد.

تعریف(۱-۱-۸): اگر $x_0,..,x_{k-1},y$ راس هایی متمایز از گراف G باشند، آنگاه $x_0-x_1-..-x_{k-1}-y$ یک مسیر به طول k است. طول کوتاهترین مسیر از x به y را با $d(x,y)$ نمایش می دهند و در صورتی که چنین مسیری از x به y وجود نداشته باشد $d(x,y)$ را برابر ∞ تعریف می کنند.

تعریف(۱-۱-۹): گراف G همبند است هرگاه بین هر دو راس مجزای آن یک مسیر موجود باشد.

تعریف(۱-۱-۱۰): فرض کنید $x_0,...,x_{k-1}$ که $k \geq 3$ راس هایی متمایز از گراف G باشند که به ازای هر $0 \leq i \leq k-1$ راس های x_i و x_{i+1} مجاور می باشند. چنانچه راس های x_0 و x_{k-1} نیز مجاور باشند در این صورت مسیر $x_0-x_1-...-x_{k-1}-x_0$ را یک دور به طول k گوئیم.

تعریف(۱-۱-۱۱): یک زیر گراف از گراف G، خود یک گراف است که هر راس آن به $V(G)$ تعلق دارد و هر یال آن در $E(G)$ است.

تعریف(۱-۱- ۱۲): فرض کنید که S زیر مجموعه غیر خالی از مجموعه رئوس گراف G باشد. در این صورت زیر گراف القا شده به وسیله S، زیر گرافی است با مجموعه رئوس S و شامل تمام یال هایی از G می باشد که دو سر آنها در S است. این زیر گراف را با $\langle S \rangle$ نشان می دهیم.

تعریف(۱-۱ – ۱۳): یک زیر بخش از یک گراف با قرار دادن تعدادی راس در میان یال ها ساخته می شود. (برای مثال یال  به یال  تغییر می یابد). بدین ترتیب که این روند، صفر مرتبه یا بیشتر تکرار شود.

تعریف(۱-۱- ۱۴): دو گراف G_1 و G_2 مجزا هستند اگر هیچ راس مشترکی نداشته باشند و مجزا یالند هرگاه هیچ یال مشترکی نداشته باشند. اجتماع دو گراف G_1 و G_2 را به صورت $G_1 \cup G_2$ نشان می دهیم، به طوریکه

$$V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2) \text{ و } E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2).$$

چنانچه G_1 و G_2 مجزا باشند، اجتماع آنها را به صورت $G_1 + G_2$ نشان می دهیم.

تعریف(۱-۱- ۱۵): برای هر گراف G، اجتماع جدا از هم از k کپی از G، با kG نشان داده می شود.

تعریف (۱-۱ -۱۶): فرض کنید که $G_۱=(V_۱,E_۱)$ و $G_۲=(V_۲,E_۲)$ دو گراف با مجموعه رئوس مجزای V_i و یال های E_i باشند. در این صورت حاصل ضرب دکارتی از $G_۱$ و $G_۲$ با $G=G_۱\times G_۲$ نشان داده می شود، که مجموعه رئوس آن $V_۱\times V_۲$ است. همچنین در G، راس (x,y) با راس (x',y') مجاور است اگر و تنها اگر $x=x'$ و y با y' در $G_۲$ مجاور باشند یا $y=y'$ و x با x' در $G_۱$ مجاور باشند.

تعریف(۱-۱- ۱۷): دوگراف G و H یکریختند هرگاه یک تناظر یک به یک بین رئوس دو گراف G و H وجود داشته باشد، به طوری که تعداد یا لهایی که هر دو راس از G را به هم وصل می کند برابر تعداد یال هایی باشد که رئوس نظیر در H را به هم وصل می کنند. در این صورت می نویسند: $G\cong H$. به عبارت دیگر دو گراف که تعداد یکسانی راس دارند و این راس ها نیز به صورت مشابهی به یکدیگر متصل گشته اند، یکریخت نامیده می شوند.

تعریف(۱-۱ -۱۸): یک گراف را مسطح گوئیم اگر آن را بتوان در یک صفحه رسم نمود به طوری که یال های آن تنها در نقاط انتهایی اشتراک داشته باشند.

قضیه(۱-۱ -۱۹): (قضیه کوراتوسکی) (ر.ک.[۷])

یک گراف مسطح است اگر و تنها اگر هیچ زیر بخشی از $K_۵$ یا $K_{۳,۳}$ را در برنگیرد .

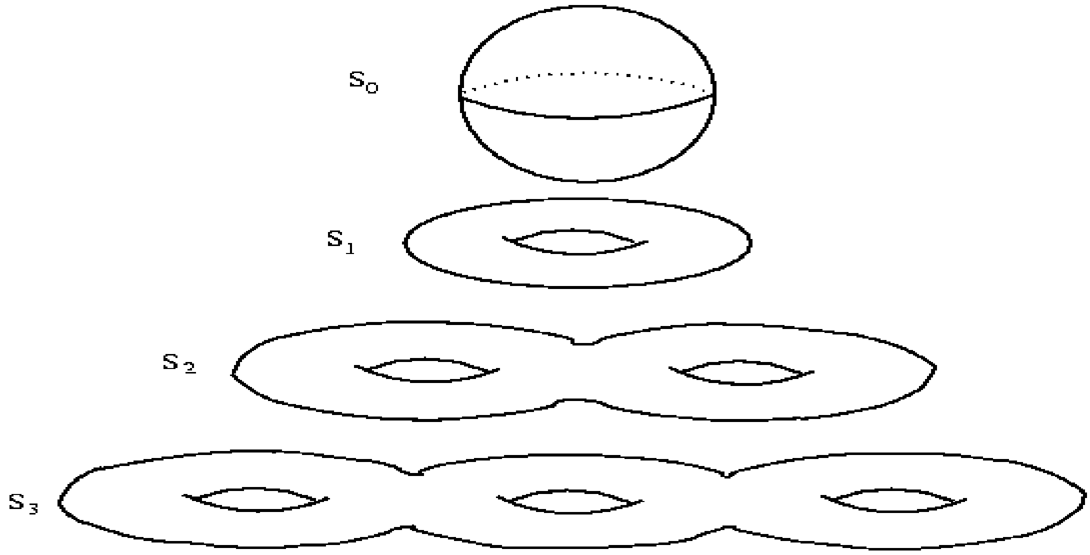
.

تعریف (۱-۱-۲۰): فرض کنیم v یک راس از گراف G باشد. در این صورت درجه v را با $d(v)$ نشان می دهند و آن را تعداد یال هایی که راس v برآنها قرار دارد تعریف می کنیم. همچنین $Min\{d(v):v\in V\}$ را با $\delta(G)$ و $Max\{d(v):v\in V\}$ را با $\Delta(G)$ نمایش می دهیم.

لم(۱-۱ -۲۱): (ر.ک .[۱،قضیه (۵-۲)])

هر گراف مسطح دارای راسی همچون v است به طوریکه $d(v)\leq ۵$.

تعریف(۱-۱ – ۲۲): گونای($Genus$) یک گراف کوچکترین عدد صحیح n است که گراف بتواند بدون قطع کردن خودش روی یک کره با n حفره رسم شود. توجه می کنیم که اگر S_k نشان دهنده ی کره ای با k دسته باشد که k عدد صحیح نامنفی است، آنگاه S_k یک رویه جهتدار از گونای k است. گونای یک گراف G با $\gamma(G)$ نشان داده می شود که کوچکترین عدد صحیح n است که گراف در S_n محاط شود.



بنابراین گونای یک گراف مسطح صفر است، چون آن گراف می تواند روی یک کره بدون قطع کردن خودش رسم شود.

تعریف(۱-۱ -۲۳): یک گراف نا مسطح که روی یک چنبره قابل رسم باشد یک گراف چنبره ای نامیده می شود. گراف چنبره ای یک گراف با گونای یک است.

نتیجه(۱-۱ -۲۴): اگر H یک زیر گراف G باشد آنگاه $\gamma(H) \le \gamma(G)$.

تعریف(۱-۱ -۲۵): هر گراف مسطح، صفحه را به چند ناحیه تقسیم می کند که هر ناحیه را یک وجه گراف گویند.

تعریف(۱-۱-۲۶): گراف G را مثلثی گویند، هرگاه هیچ دور القایی به طول بیش از ۳ نداشته باشد.(منظور از دور القایی دوری است که شامل دور دیگری نباشد).

قضیه (۱-۱ -۲۷): (ر.ک.[۱۳،گزاره ۲.۱])

برای هر گراف G با تعداد v راس و گونای g داریم: $\delta(G) \le 6 + (12g - 12)/v$. اگر G یک گراف از گونای ۱ باشد، آنگاه $\delta(G) \le 6$ وتساوی بر قرار است اگر و تنها اگر G یک گراف مثلثی باشد به طوریکه اجتماعی از گراف های چنبره ای و گراف های ۶- منظم باشد.

قضیه(۱-۱ -۲۸): (ر.ک. [۱۱])

۱) $\gamma(K_n)=\left\{\frac{۱}{۱۲}(n-۳)(n-۴)\right\}$ به طوری که $\{x\}$ نشان دهنده کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی x است. در حالت خاص اگر $n=۵,۶,۷$، آنگاه $\gamma(K_n)=۱$.

۲) $\gamma\left(K_{m,n}\right)=\left\{\frac{۱}{۴}(m-۲)(n-۲)\right\}$ به طوری که $\{x\}$کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوری با x است. در حالت خاص اگر $n=۳,۴,۵,۶$، آنگاه $\gamma(K_{۴,۴})=\gamma(K_{۳,n})=۱$.

۳) فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ دو گراف باشند و به ازای هر i ، p_i تعداد راس های G_i باشد. در این صورت

$$Max\left\{p_۱\gamma(G_۲)+\gamma(G_۱),p_۲\gamma(G_۱)+\gamma(G_۲)\right\}\le\gamma(G_۱\times G_۲).$$

طبق این قضیه، به ازای هر $۱\le n\le ۴$، $\gamma(K_n)=۰$ و به ازای هر $۵\le n\le ۷$، $\gamma(K_n)=۱$. همچنین به ازای هر مقدار دیگر n، $\gamma(K_n)\ge ۲$.

قضیه (۱-۱ -۲۹): (ر.ک.[۱، قضیه (۵-۳)])

اگر G یک گراف هم بند از گونای g با n رأس ، m یال و f وجه باشد، آنگاه $n-m+f=۲-۲g$.

لم(۱-۱ -۳۰): (ر.ک.[۵، نتیجه ۴])

اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد که $n\ne ۳,۵$ و اگر G و H زیر گرافهای القایی از $K_{n,n}$ باشند، آنگاه $\gamma(G+H)=(n-۱)^۲$. به خصوص به ازای $n\ne ۳,۵$، $\gamma(K_{n,n,n,n})=(n-۱)^۲$.

تعریف (۱-۱ -۳۱): فرض کنید $V(G)$ و $E(G)$ به ترتیب نشان دهنده مجموعه رئوس و مجموعه یالهای گراف G باشند. فرض کنید $V'\subseteq V(G)$ باشد. در این صورت $G-V'$ را زیر گراف G که از حذف رئوس در V' و یالهای واقع بر آنها حاصل می شود، در نظر می گیریم. به طور مشابه اگر $E'\subseteq E(G)$ باشد، آنگاه $G-E'$ را زیرگراف G که از حذف یالهای موجود در E' حاصل می شود، در نظر می گیریم.

اگر $V'=\{x\in V\,|\,\mathrm{d}(x)=۱\}$، آنگاه برای زیرگراف $G-V'$ از نماد $\tilde{G}$ استفاده می کنیم و آن را تحلیل $G(reduction\ \ of\ \ G)$ می نامیم.

لم(۱-۱ -۳۲): (ر.ک. [۱۰،لم ۲.۳])

اگر $\tilde{G}$ تحلیل G باشد آنگاه $\gamma(G)=\gamma(\tilde{G})$.

قضیه (۱-۱ -۳۳): (لاگرانژ) (ر.ک. [۲])

فرض کنید Hزیر گروهی از گروه متناهی G باشد. در این صورت مرتبه ی H، مرتبه ی G را عاد می کند. به ویژه $|G|=\lceil G:H \rceil |H|$.

همچنین اگر G گروهی از مرتبه ی n باشد، آنگاه مرتبه ی هر عنصر a از G عدد n را عاد می کند و $a^n=e$.

لم (۱-۱ -۳۴): (ر.ک. [۹])

فرض کنید R حلقه ی تعویض پذیر ،آرتینی و ناصفر باشد. در این صورت حلقه های موضعی آرتینی $R_1,...,R_n$ وجود دارند که $R \cong \prod_{i=1}^{n} R_i = R_1 \times ... \times R_n$.

لم (۱-۱ -۳۵): فرض کنید R حلقه تعویض پذیر باشد و $r \in R$. در این صورت $r \in Jac(R)$ اگر و تنها اگر به ازای هر $a \in R$، $1-ra$ عنصر وارون پذیر حلقه باشد.

قضیه (۱-۱ -۳۶): (قضیه گروههای آبلی متناهیاً تولید شده) (ر.ک. [۲])

فرض کنید G گروهی آبلی نا صفر متناهیاً تولید شده باشد. در این صورت G با حاصل جمعی مستقیم از گروههای دوری یکریخت است، که در آن جمعوند های متناهی (در صورت وجود) از مرتبه های $m_1,m_2,...,m_r$ می باشند، که $m_1>1$ و $m_i \mid m_{i+1}$ ، $1 \le i < r-1$.

۱-۲ مفاهیم مربوط به گراف های جبری شامل گراف های شمارنده صفر و گراف های جامع

تعریف(۱-۲-۱): گراف شمارنده صفر عبارت است از گرافی با راسهای $Z(R)^* = Z(R)-\{0\}$، که برای هر x و y متمایز از $Z(R)^*$، راسهای x و y مجاور هستند اگر و تنها اگر $xy=0$. گراف شمارنده صفر را با نماد $\Gamma(R)$ نشان می دهیم.

اگر برای هر x و y از $Z(R)$، رابطه $\sim$ را به صورت زیر تعریف کنیم که:

$$x \sim y \leftrightarrow xy=0 \text{ یا } x=y.$$

در این صورت $\sim$ یک رابطه انعکاسی و تقارنی است. به سادگی می توان دید $\sim$ یک رابطه هم ارزی است اگر و تنها اگرگراف $\Gamma(R)$ یک گراف کامل باشد.

تعریف (۱-۲-۲): گراف جامع R عبارت است از گرافی که مجموعه رئوس آن تمام عناصر R است و برای $x,y\in R$ متمایز، رئوس x و y مجاورند اگر و تنها اگر $x+y\in Z(R)$. گراف جامع R را با نماد $T(\Gamma(R))$ نمایش می دهیم.

قضیه (۱-۲-۳): (ر.ک.[۶، قضیه ۳])

الف) فرض کنید $R=\mathbb{Z}_n$ که $n\geq ۲$ یک عدد اول نیست. در این صورت $\Gamma(R)$ مسطح است اگر و تنها اگر $n\in\{۸,۱۲,۱۶,۱۸,۲۵,۲۷\}\bigcup\{۲p,۳p\}$ که p عددی اول است.

ب) فرض کنید $R=\mathbb{Z}_{n_1}\times\mathbb{Z}_{n_2}\times\ldots\times\mathbb{Z}_{n_r}$ که $r\geq ۲$, $۲\leq n_1\leq\ldots\leq n_r$. در اینصورت $\Gamma(R)$ مسطح است اگر و تنها اگر R یکی از حلقه های زیر باشد که در آنها $p\geq ۲$ و $q\geq ۳$

$$\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۴\ ,\ \mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۶\ ,\ \mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۸\ ,\ \mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۹\ ,\ \mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_p\ ,\mathbb{Z}_۳\times\mathbb{Z}_۴\ ,$$
$$\mathbb{Z}_۳\times\mathbb{Z}_q\ ,\mathbb{Z}_۳\times\mathbb{Z}_۹\ ,\mathbb{Z}_۳\times\mathbb{Z}_q\ ,\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲,\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۳$$

تعریف(۱-۲-۴): برای یک حلقه R تعریف می کنیم: $\operatorname{Re}g(R)=R\setminus Z(R)^*$.

تعریف(۱-۲-۵): $\operatorname{Re}g(\Gamma(R))$ نشان دهنده ی زیر گراف القا شده ی $T(\Gamma(R))$ با رئوس $\operatorname{Re}g(R)$ است.

تعریف(۱-۲-۶): $Z(\Gamma(R))$ نشان دهنده ی زیر گراف القا شده ی $T(\Gamma(R))$ با رئوس $Z(R)$ است.

تعریف(۱-۲-۷): دو زیر گراف القا شده ی G_1 و G_2 از G را مجزا گوییم هرگاه این دو زیر گراف دارای رئوس مشترک نباشند و هیچ راسی در G_1 (G_2) مجاور راسی در G_2 (G_1) نیست.

قضیه (۱-۲-۸): (ر.ک.[۳، قضیه ۲.۱])

فرض کنید R یک حلقه جابه جایی باشد که $Z(R)$ یک ایده ال R است. در این صورت $Z(\Gamma(R))$ یک زیر گراف کامل از $T(\Gamma(R))$ است و $Z(\Gamma(R))$ از $\operatorname{Re}g(\Gamma(R))$ مجزاست.

قضیه (۱-۲-۹): (ر.ک. [۳، قضیه ۲.۲])

فرض کنید R یک حلقه جابه جایی باشد که $Z(R)$ یک ایده ال R است. همچنین فرض کنید که $|Z(R)|=\alpha$ و $|R/Z(R)|=\beta$. در این صورت:

۱)اگر $2 \in Z(R)$ آنگاه $\operatorname{Re} g(\Gamma(R))$ اجتماع مجزا از $\beta-1$ ، K_{α} ها است.

۲)اگر $2 \notin Z(R)$ آنگاه $\operatorname{Re} g(\Gamma(R))$ اجتماع مجزا از $(\beta-1)/2$، $K_{\alpha,\alpha}$ ها است.

مثال (۱-۲-۱۰): (ر.ک.[۱۰، مثال 2.5]

فرض کنید R یکی از حلقه های مقابل باشد: $R=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_6, R=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_4$, $R=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{16}$. در این صورت $\gamma(\Gamma(R))\geq 2$.

فصل دوم

گراف های شمارنده صفر با گونا های صفر و یک

مثال(۲-۱): فرض کنید که R یکی از حلقه های زیر باشد:

$\mathbb{Z}_{۲}\times\mathbb{Z}_{۲}\times\mathbb{Z}_{۲}\times\mathbb{Z}_{۲}$، $\mathbb{Z}_{۲}\times\mathbb{Z}_{۲}\times\mathbb{Z}_{۴}$، $\mathbb{Z}_{۲}\times\mathbb{Z}_{۳}\times\mathbb{Z}_{۳}$، $\mathbb{Z}_{۳}\times\mathbb{Z}_{۳}\times\mathbb{Z}_{۲}$، $\mathbb{Z}_{۲}\times\mathbb{Z}_{۲}\times\mathbb{Z}_{۵}$، $\mathbb{Z}_{۲}\times\mathbb{Z}_{۲}\times\mathbb{Z}_{۷}$، $\mathbb{Z}_{۴}\times\mathbb{Z}_{۴}$،

$\mathbb{Z}_{۲۴}$ یا $\mathbb{Z}_{۳۲}$. در این صورت $\gamma(\Gamma(R))=۱$.

اثبات:

الف) ابتدا فرض کنید که $R=\mathbb{Z}_{۲}\times\mathbb{Z}_{۲}\times\mathbb{Z}_{۲}\times\mathbb{Z}_{۲}$ و $G=\Gamma(R)=\Gamma(\mathbb{Z}_{۲}\times\mathbb{Z}_{۲}\times\mathbb{Z}_{۲}\times\mathbb{Z}_{۲})$ باشد. همچنین فرض کنید :

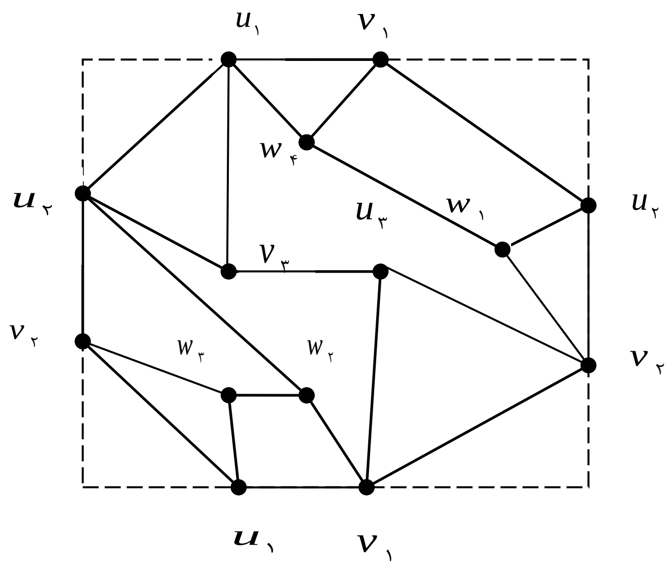
$$\begin{array}{lll} u_{۱}=(۱,۰,۰,۰) & , \ u_{۲}=(۰,۱,۰,۰) & , \ u_{۳}=(۱,۱,۰,۰), \\ v_{۱}=(۰,۰,۱,۰) & , \ v_{۲}=(۰,۰,۰,۱) & , \ v_{۳}=(۰,۰,۱,۱) \\ w_{۱}=(۱,۰,۱,۰) & , \ w_{۲}=(۱,۰,۰,۱) & , \ w_{۳}=(۰,۱,۱,۰) \\ w_{۴}=(۰,۱,۰,۱) & , \ w_{۵}=(۱,۱,۱,۰) & , w_{۶}=(۱,۱,۰,۱) \\ w_{۷}=(۱,۰,۱,۱) & , \ w_{۸}=(۰,۱,۱,۱) & \end{array}$$

در این صورت واضح است که به ازای هر i و j، $u_i \cdot v_j=۰$. بنابراین در گراف شمارنده صفر G، به ازای هر i و j، u_i به v_j متصل می شود. پس این رئوس در گراف G، گراف دو بخشی $K_{۳,۳}$ *را ایجاد می کنند. لذا* $K_{۳,۳}\subseteq G$ و چون $\gamma(K_{۳,۳})=۱$، در نتیجه $\gamma(G)\geq ۱$.

از طرفی برای یافتن گراف تحلیل G یعنی $\tilde{G}$ باید سراغ رئوس با درجه ۱ برویم با کمی محاسبه مشاهده می کنیم که

$$w_{۵}.v_{۲}=۰,\ w_{۶}.v_{۱}=۰, w_{۷}.u_{۲}=۰\ ,w_{۸}.u_{۱}=۰$$

لذا $\mathrm{d}(w_{۵})=\mathrm{d}(w_{۶})=\mathrm{d}(w_{۷})=\mathrm{d}(w_{۸})=۱$. بنا بر این $\tilde{G}=G-\{w_{۵},w_{۶},w_{۷},w_{۸}\}$. از این رو، می توان $\tilde{G}$ را مطابق شکل زیر روی یک چنبره رسم نمود. پس $\gamma(\tilde{G})=۱$.



بنابر لم (۱-۱ -۳۲)، $\gamma(G)=\gamma(\tilde{G})$، در نتیجه $\gamma(G)=۱$.

ب) فرض کنیم که $R=\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۴$ و $G=\Gamma(\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۴)$. در این صورت $|R|=۱۶$. اکنون عناصر زیر را در R در نظر می گیریم:

$$u_۱=(۱,۰,۰)\quad,\quad u_۲=(۰,۱,۰)\quad,\quad u_۳=(۱,۱,۰)$$
$$v_۱=(۰,۰,۲)\quad,\quad v_۲=(۰,۰,۱)\quad,\quad v_۳=(۰,۰,۳)$$

واضح است که به ازای هر i و j خواهیم داشت: $u_i.v_j=۰$. لذا u_i ها با v_j ها مجاور می شوند. بنابراین، مشابه قسمت قبل $K_{۳,۳}$ زیر گراف G خواهد بود، پس $\gamma(G)\geq ۱$. از طرفی $G=\Gamma(\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۴)$ زیر گرافی از $G'=\Gamma(\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲)$ است. بنابراین طبق نتیجه (۱-۱ -۲۴)، $\gamma(G)\leq\gamma(G')=۱$. در نتیجه $\gamma(G)=۱$.

پ) فرض کنید که $R=\mathbb{Z}_۳\times\mathbb{Z}_۳\times\mathbb{Z}_۳$ و $G=\Gamma(\mathbb{Z}_۳\times\mathbb{Z}_۳\times\mathbb{Z}_۳)$. در این صورت رئوس زیر را در نظر می گیریم:

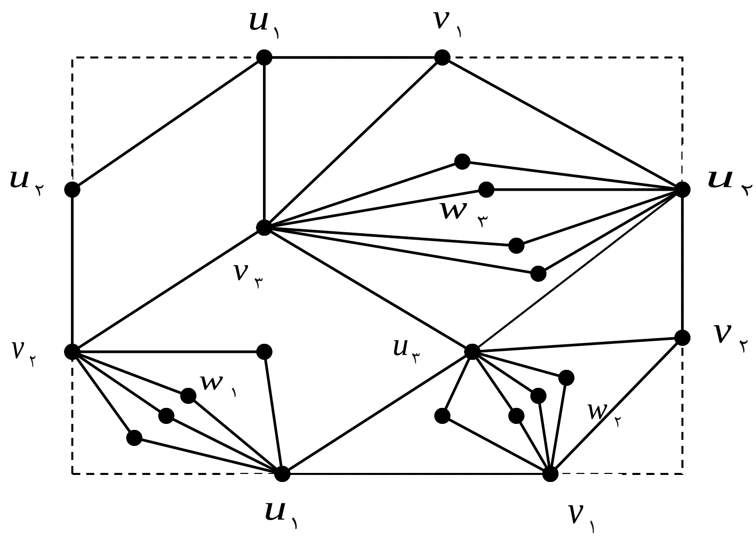
$$u_۱=(۱,۰,۰)\quad,\quad u_۲=(۰,۰,۱)\quad,\quad u_۳=(۰,۲,۰)$$
$$v_۱=(۰,۱,۰)\quad,\quad v_۲=(۲,۰,۰)\quad,\quad v_۳=(۰,۰,۲)$$

$W_۱=\{(۰,۱,۱),(۰,۱,۲),(۰,۲,۱),(۰,۲,۲)\}$ مولفه های دوم و سوم ناصفرند

$W_۲=\{(۱,۰,۱),(۱,۰,۲),(۲,۰,۱),(۲,۰,۲)\}$ مولفه های اول و سوم ناصفرند

$W_۳=\{(۱,۱,۰)(۱,۲,۰),(۲,۱,۰),(۲,۲,۰)\}$ مولفه های اول و دوم ناصفرند

طبق قضیه (۱-۲-۳)، G مسطح نیست از این رو $\gamma(G)\geq ۱$. از طرفی گراف تحلیل G یعنی $\tilde{G}$ را می توان مطابق شکل زیر بر روی یک چنبره ترسیم نمود.



پس $\gamma(\tilde{G})=۱$. در نتیجه طبق لم (۱-۱-۳۲)، $\gamma(G)=\gamma(\tilde{G})=۱$.

ت) فرض کنید که $R=\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۳\times\mathbb{Z}_۳$ و $G=\Gamma(\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۳\times\mathbb{Z}_۳)$. در این صورت طبق قضیه (۱-۲-۳)، G یک گراف مسطح نیست. پس $\gamma(G)\geq ۱$. اما $G=\Gamma(\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۳\times\mathbb{Z}_۳)$ زیر گراف $G'=\Gamma(\mathbb{Z}_۳\times\mathbb{Z}_۳\times\mathbb{Z}_۳)$ است. بنابر قسمت (پ)، $\gamma(G')=۱$ بنابراین $\gamma(G)\leq\gamma(G')=۱$ و در نتیجه $\gamma(G)=۱$.

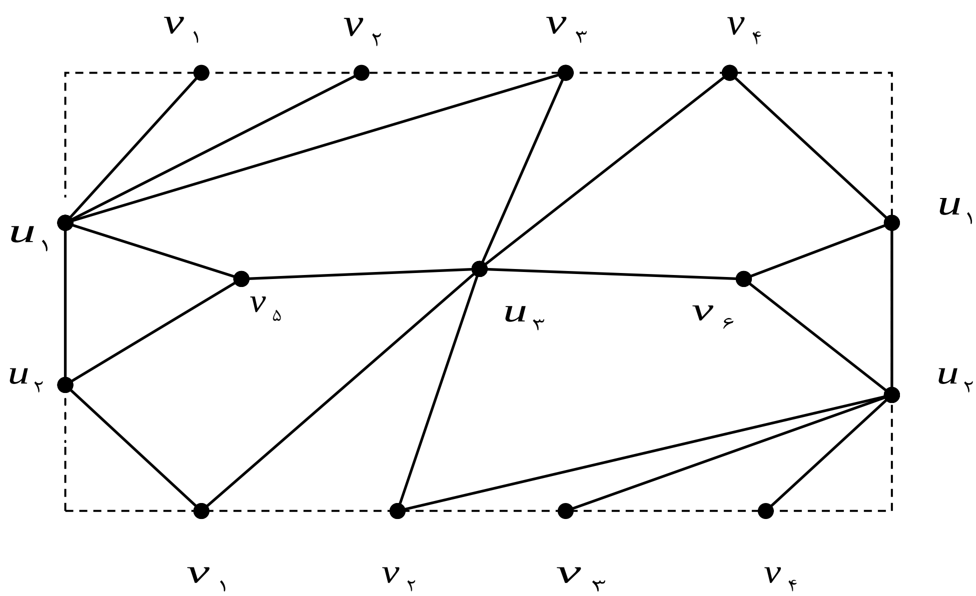
ث) فرض کنید که $R=\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۷$ و $G=\Gamma(\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۷)$. در این صورت قرار دهید: $u_۱=(۱,۰,۰)\ ,\ u_۲=(۰,۱,۰)\ ,\ u_۳=(۱,۱,۰)$. به ازای هر $i=۱,۲,۳,۴,۵,۶$ قرار دهید:

$$v_i=(۰,۰,i)\ \ ,w_i=(۱,۰,i)\ \ ,\ \ w_{i+۶}=(۰,۱,i)$$

واضح است که به ازای هر $i=۱,۲,۳$ و $j=۱,۲,۳,۴,۵,۶$ داریم $u_iv_j=۰$. بنابراین $K_{۳,۶}\subseteq G$. بر طبق قضیه (۱-۱-۲۸)، $\gamma(K_{۳,۶})=۱$، لذا بنابر نتیجه (۱-۱-۲۴) خواهیم داشت: $\gamma(G)\geq۱$. از طرفی چون

$$w_۱u_۲=۰\ ,\ w_۲u_۲=۰,\dots,w_۶u_۲=۰,w_۷u_۱=۰\ ,\dots,w_{۱۲}u_۱=۰$$

لذا $\mathrm{d}(w_۱)=\dots=\mathrm{d}(w_{۱۲})=۱$ و بر این اساس $\tilde{G}=G-\{w_۱,w_۲,\dots,w_{۱۲}\}$. مطابق شکل زیر می توان $\tilde{G}$ را روی یک چنبره ترسیم کرد. لذا $\gamma(\tilde{G})=۱$.



در نتیجه طبق لم (۱-۱ -۳۲)، $\gamma(G)=\gamma(\tilde{G})=۱$.

چ) فرض کنید که $R=\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۵$ و $G=\Gamma(\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۵)$. همچنین فرض کنید که

$$u_۱=(۱,۰,۰) \quad , \quad u_۲=(۰,۱,۰) \quad , \quad u_۳=(۱,۱,۰)$$
$$v_i=(۰,۰,i) \quad , \quad i=۱,۲,۳,۴$$

در این صورت واضح است که به ازای هر $i=۱,۲,۳$ و $j=۱,۲,۳,۴$ داریم: $u_i.v_j=۰$. لذا این رئوس زیر گراف کامل دو بخشی $K_{۳,۴}$ را در G القا می کنند، از این رو $K_{۳,۴}\subseteq G$. طبق قضیه (۱-۱ -۲۸)، $\gamma(K_{۳,۴})=۱$، در نتیجه $\gamma(G)\geq ۱$.از طرفی چون $G=\Gamma(\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۵)$ زیرگراف $G'=\Gamma(\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۷)$ است و طبق قسمت (ث)، $\gamma(G')=۱$ است در نتیجه $\gamma(G)\leq ۱$ از این رو $\gamma(G)=۱$.

چ) فرض کنید که $R=\mathbb{Z}_۴\times\mathbb{Z}_۴$ و $G=\Gamma(\mathbb{Z}_۴\times\mathbb{Z}_۴)$. در این صورت با در نظر گرفتن عناصر زیر به صورت

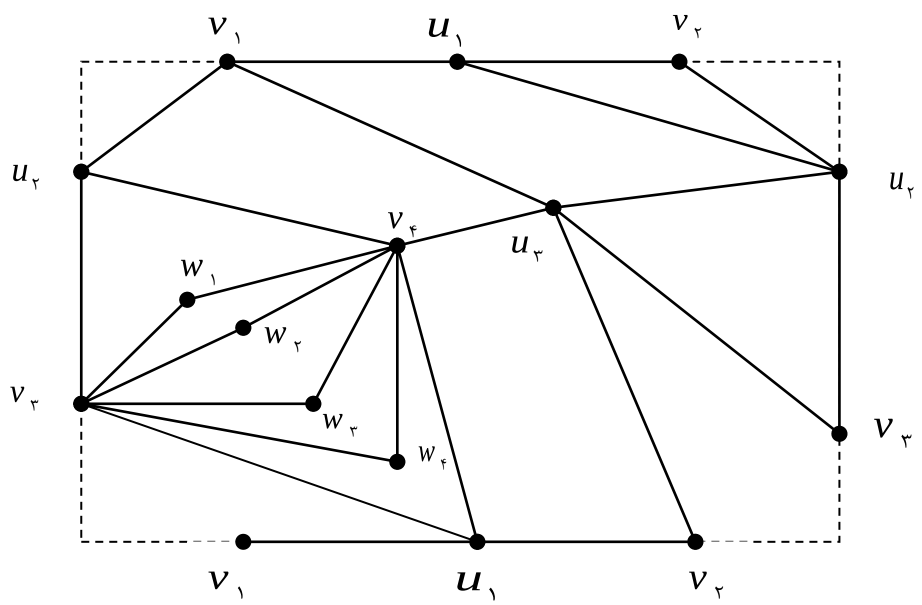
$$u_۱=(۱,۰) \quad , \quad u_۲=(۲,۰) \quad , \quad u_۳=(۳,۰)$$
$$v_۱=(۰,۱) \quad , \quad v_۲=(۰,۲) \quad , \quad v_۳=(۰,۳)$$

خواهیم داشت: به ازای هر $j,i=۱,۲,۳$ ، $u_i.v_j=۰$. لذا این رئوس، گراف کامل دو بخشی $K_{۳,۳}$ را در G ایجاد می کنند. در نتیجه $K_{۳,۳}\subseteq G$ و چون $\gamma(K_{۳,۳})=۱$ لذا $\gamma(G)\geq ۱$. از طرفی $G=\Gamma(\mathbb{Z}_۴\times\mathbb{Z}_۴)$ زیر گرافی از گراف $G'=\Gamma(\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲)$ است. با استفاده از قسمت (الف)، $\gamma(G')=۱$ از این رو $\gamma(G)\leq ۱$. و این نتیجه می دهد که $\gamma(G)=۱$.

ح) فرض کنید که $R=\mathbb{Z}_۳\times\mathbb{Z}_۸\cong\mathbb{Z}_{۲۴}$ و $G=\Gamma(\mathbb{Z}_۳\times\mathbb{Z}_۸)$. همچنین فرض کنید:

$$u_{۱}=(۰,۲)\ ,\ u_{۲}=(۰,۴)\ ,\ u_{۳}=(۰,۶)$$
$$v_{۱}=(۱,۴)\ ,\ v_{۲}=(۲,۴)\ ,\ v_{۳}=(۱,۰)\ ,\ v_{۴}=(۲,۰)$$
$$w_{۱}=(۰,۱)\ ,\ w_{۲}=(۰,۳)\ ,\ w_{۳}=(۰,۵)\ ,\ w_{۴}=(۰,۷)$$
$$w_{۵}=(۱,۲)\ ,\ w_{۶}=(۱,۶),\ w_{۷}=(۲,۲)\ ,\ w_{۸}=(۲,۶).$$

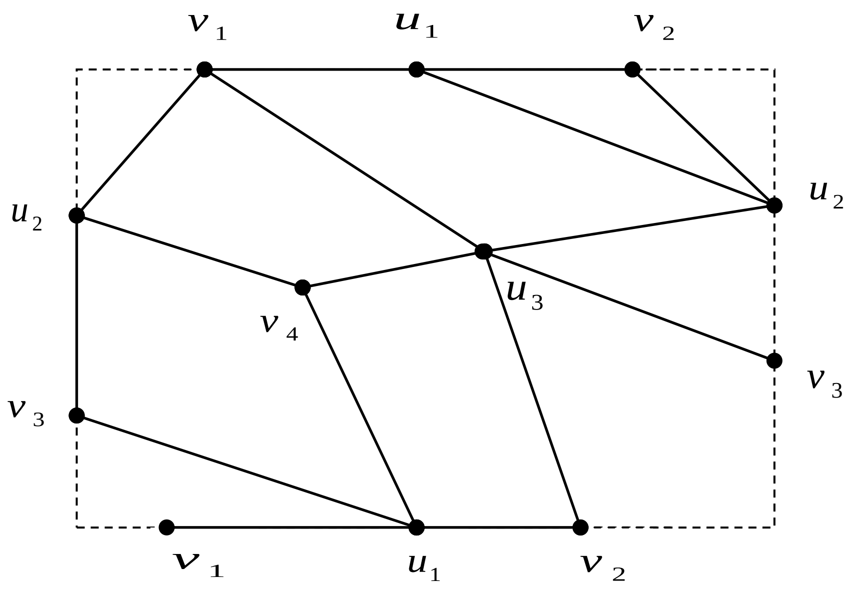
در این صورت واضح است که به ازای هر $i=۱,۲,۳$ و $j=۱,۲,۳,۴$، داریم $u_i.v_j=۰$. بنابراین این رئوس، گراف کامل دو بخشی $K_{۳,۴}$ را در G القا می کنند. از این رو طبق قضیه(۱-۱ -۲۸)، $\gamma(G)\geq\gamma(K_{۳,۴})=۱$. از طرفی با توجه به شکل زیر $\tilde{G}=G-\{w_{۵},...,w_{۸}\}$ را می توان روی یک چنبره ترسیم نمود. لذا طبق لم (۱-۱ -۳۲)، $\gamma(G)=\gamma(\tilde{G})=۱$.



خ) فرض کنید که $R=\mathbb{Z}_{۳۲}$ و $G=\Gamma(\mathbb{Z}_{۳۲})$ باشد. همچنین فرض کنید:

$$u_{۱}=۸\ ,\ \ u_{۲}=۱۶\ \ ,u_{۳}=۲۴$$
$$v_{۱}=۴\ ,\ v_{۲}=۱۲\ \ ,\ v_{۳}=۲۰\ ,v_{۴}=۲۸$$
$$w_{۱}=۲\ ,\ w_{۲}=۶\ ,\ w_{۳}=۱۰\ ,\ w_{۴}=۱۴\ ,w_{۵}=۱۸\ ,w_{۶}=۲۲\ ,\ w_{۷}=۲۶\ ,\ w_{۸}=۳۰\ .$$

در این صورت به ازای هر $i=۱,۲,۳$ و $j=۱,۲,۳,۴$، داریم $u_i.v_j=۰$. در نتیجه این رئوس، یک گراف کامل دو بخشی $K_{۳,۴}$ را در G القا می کنند. لذا به طور مشابه، از قسمت های قبل نتیجه می شود که $\gamma(G)\geq۱$. همچنین با توجه به اینکه $\tilde{G}=G-\{w_{۱},...,w_{۸}\}$ می توان $\tilde{G}$ را مطابق شکل زیر روی یک چنبره رسم نمود. لذا $\gamma(G)=\gamma(\tilde{G})=۱$. ■



لم (۲-۲): الف) فرض کنید که R یک حلقه متناهی با حداکثر ۵ ایده آل ماکسیمال باشد. در این صورت $\gamma(\Gamma(R)) \geq ۲$.

ب) فرض کنید که به ازای هر $i = ۱,۲,۳,۴$ ، R_i یک حلقه موضعی باشد و $R = R_۱ \times R_۲ \times R_۳ \times R_۴$. در این صورت اگر $|R_۴| \geq ۴$، آنگاه $\gamma(\Gamma(R)) \geq ۲$.

پ) فرض کنید که به ازای هر $i = ۱,۲,۳$ ، R_i یک حلقه موضعی باشد و $R = R_۱ \times R_۲ \times R_۳$. در این صورت اگر $|R_۳| \geq ۸$ ، آنگاه $\gamma(\Gamma(R)) \geq ۲$.

ت) فرض کنید که به ازای هر $i = ۱,۲,۳$ ، R_i یک حلقه موضعی باشد و $R = R_۱ \times R_۲ \times R_۳$. در این صورت اگر $|R_۲| \geq ۴$, $|R_۳| \geq ۴$، آنگاه $\gamma(\Gamma(R)) \geq ۲$.

اثبات : الف) فرض کنیم R یک حلقه متناهی با حداکثر ۵ ایده آل ماکسیمال باشد. چون R یک حلقه متناهی است، لذا آرتینی است و طبق لم (۱-۱ -۳۴)، می توان فرض کرد که $R \cong R_۱ \times R_۲ \times \ldots \times R_۵$ به طوری که به ازای هر $i = ۱,۲,\ldots,۵$ ، R_i یک حلقه موضعی متناهی است. در این حالت فرض می کنیم که به ازای $i = ۱,۲,۳,۴,۵$ ، $|R_i| \geq ۲$. رئوس زیر را در نظر داشته باشید :

$$u_۱ = (۱,۰,۰,۰,۰) \ , u_۲ = (۰,۱,۰,۰,۰), u_۳ = (۱,۱,۰,۰,۰)$$
$$v_۱ = (۰,۰,۱,۰,۰) \ , v_۲ = (۰,۰,۰,۱,۰), v_۳ = (۰,۰,۰,۰,۱) \ ,$$
$$v_۴ = (۰,۰,۱,۱,۰) \ , v_۵ = (۰,۰,۱,۰,۱), v_۶ = (۰,۰,۰,۱,۱), v_۷ = (۰,۰,۱,۱,۱) \ .$$