دانشگاه گیلان

دانشکده علوم ریاضی

رساله
جهت اخذ درجه دکتری

رشته ریاضی محض

عنوان

نتایجی پیرامون متناهی بودن ایده‌آل‌های اول وابسته به مدول‌های کوهمولوژی موضعی

از

هاجر روشن شکالگورابی

استاد راهنما

دکتر احمد عباسی

اسفند ماه ۱۳۹۱

سپاس‌نامه

ستایش خداوندی را که هستی‌مان بخشید و به دریای علم و دانش رهنمونمان شد. همو که جهان را به زبان ریاضیات نوشت و ریاضی یعنی تدبیر در آفرینش و بنا نهادن آن به وسیله‌ی اعداد و اعداد یعنی شمارش تعداد اجزای طبیعت تا بینهایت و بینهایت یعنی از اول تا آخر، و از اول تا آخر یعنی رسیدن به خدا و رسیدن به خدا یعنی عشق و در مجموع ریاضی مقدمه‌ای است برای رسیدن به خالق هستی.

از دست و زبان که بر آید   کز عهده‌ی شکرش به در آید

پروردگارا! تو را سپاس که به خوشه‌چینی از این علم بهروزیم بخشیدی.
و سپاس بر پدر و مادر گرامیم که چراغ فروزان راهم بوده‌اند و در راه دانش‌آموختنم رنج بسیار برده‌اند.
و ارج می‌نهم همسر مهربانم را که در این سفر، همسفر راهم شد و در رسیدن به این آرمان صبورانه یاریم نمود.
از استاد راهنمای گرامی‌ام جناب آقای دکتر احمد عباسی که با رهنمودهای ارزنده‌ی خود راهگشا و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزارم.
و قدردان استاد راهنمای عزیزم در دوره‌ی کارشناسی‌ارشد سرکار خانم دکتر ناهید هادیان دهکردی هستم که هدایتم نمودند تا شوق آموختن در من زنده بماند.
همچنین به راهنمایی‌ها و تشریف فرمایی جناب آقای دکتر کاظم خشیارمنش که داوری این رساله را پذیرفته‌اند، ارج می‌نهم و از اساتید ارجمندم جناب آقایان دکتر حبیب‌اله انصاری طرقی و دکتر شهاب‌الدین ابراهیمی آتانی که هم از کلاس درس ایشان بهره جسته‌ام و هم این رساله را به قضاوت نشسته‌اند، سپاسگزارم.

هاجر روشن شکالگورابی
اسفندماه ۱۳۹۱

چکیده:

نتایجی پیرامون متناهی بودن ایده‌آل‌های اول وابسته به مدول‌های کوهمولوژی موضعی

هاجر روشن شکالگورابی

هدف از این رساله، مطالعه و بررسی پیرامون خواص متناهی بودن، آرتینی بودن، صفر شدن و مینیماکس بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی می‌باشد. در این خصوص، مفهوم I–لاسکری ضعیف را ارائه نموده و نتایجی را در باب متناهی بودن مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته به مدول‌های کوهمولوژی موضعی به‌دست می‌آوریم. هم‌چنین، نتایجی را پیرامون مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته در زیررسته‌های سِر و خاصیت مینیماکس بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی وابسته به یک جفت از ایده‌آل‌ها ارائه می‌نماییم.

واژه‌های کلیدی: مدول‌های کوهمولوژی موضعی، مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته، مدول‌های هم‌متناهی، مدول‌های مینیماکس، مدول‌های I–لاسکری ضعیف، ایده‌آل‌های اول وابسته، زیررسته‌ی سِر.

فهرستِ مطالب

مقدمه

کوهمولوژی موضعی را می‌توان یک فرزند جبری با والدینی هندسی پنداشت. ژان پیر سِر[1]، در مقاله‌ی بنیادی خود در مرجع [۶۲]، ضمن یک تحول اساسی، کوهمولوژی را به عنوان ابزاری مهم در هندسه‌ی جبری معرفی نمود. این مقاله که در سال ۱۹۵۵ به چاپ رسید، خبر از ایده‌های مهم بسیاری در هندسه‌ی جبری پیشرفته می‌داد و نکات بسیاری را در برداشت که در نظریه‌ی کوهمولوژی موضعی اساسی‌اند و تا آن روز کسی از آن‌ها مطلع نبود تا این که گروتندیک[2] در سال ۱۹۶۱ در سمیناری در دانشگاه هاروارد بر تأثیر کوهمولوژی موضعی به عنوان ابزاری مهم در جبر موضعی تأکید نمود. مطالب این سخنرانی در سال ۱۹۶۷ توسط هارتشورن[3] گردآوری و در مرجع [۳۷] به چاپ رسید. اگر چه گروتندیک و هارتشورن در آغاز با یک دیدگاه هندسی، کوهمولوژی موضعی را مطرح نمودند، اما از آن پس، این نظریه توجه بسیاری از محققین را در شاخه‌ی نظریه‌ی حلقه‌های نوتری جابه‌جایی به خود معطوف کرد. اساس گام‌های آغازین تحقیق در زمینه‌ی کوهمولوژی موضعی را می توان حدس زیر از گروتندیک دانست که در سال ۱۹۶۲ مطرح و در سال ۱۹۶۸ در مرجع [۳۸] به چاپ رسید:

برای هر ایده‌آل I از حلقه‌ی R و هر R–مدول با تولید متناهی M، مدول $\mathrm{Hom}_R(R/I, H^i_I(M))$ به ازای هر i با تولید متناهی است.

یک سال بعد هارتشورن در مرجع [۳۹] مثال نقضی را برای این حدس ارائه و رده‌ی جدیدی از مدول‌ها موسوم به مدول‌های I–هم‌متناهی را معرفی نمود و این سؤال را مطرح کرد که برای چه حلقه و چه ایده‌آل‌هایی از آن، مدول کوهمولوژی موضعی $H^i_I(M)$ به ازای هر i و هر R–مدول با تولید متناهی M، I–هم‌متناهی است؟ این سؤال مورد توجه بسیاری از محققین جبر جابه‌جایی قرار گرفت و تلاش برای پاسخ به این سؤال منجر به نتایج بسیاری شد که از آن

[1] J. P. Serre

[2] Grothendieck

[3] Hartshorne

جمله می‌توان به مراجع [۱۵]، [۲۵]، [۲۶]، [۲۷]، [۴۳] و [۷۰] اشاره نمود.

یکی دیگر از مسائل مهم در حوزه‌ی کوهمولوژی موضعی مطالعه و بررسی شرایطی است که تحت آن، مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته به مدول کوهمولوژی موضعی، متناهی می‌باشد و اساس آن حدس زیر از هونیکه[4] است که در سال ۱۹۹۲ در مرجع [۴۲] مطرح شد:

اگر M یک R–مدول با تولید متناهی باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته به $H_I^i(M)$ به ازای هر i و ایده‌آل I، متناهی است.

اگر چه سینگ[5] در مرجع [۶۳] و کاتزمن[6] در مرجع [۴۵]، مثال‌های نقضی را برای این حدس ارائه نمودند، اما یافتن پاسخی مثبت برای این حدس توجه بسیاری را به خود جلب کرد و نتایج بسیاری را به دنبال داشت که به‌عنوان مثال می‌توان نتایج حاصل در مراجع [۱۲]، [۲۰]، [۲۲]، [۲۸]، [۳۲]، [۴۷] و [۵۱] را نام برد. در این راستا، رده‌های جدیدی از مدول‌ها معرفی شدند که نقش به‌سزایی در پاسخ به مسائل کوهمولوژی موضعی و بهبود نتایج دارند که از آن جمله می‌توان به رده‌ی مدول‌های مینیماکس، I–مینیماکس، لاسکری ضعیف، هم‌متناهی، هم‌مینیماکس و هم‌متناهی ضعیف اشاره نمود.

نظر به اهمیت مفهوم کوهمولوژی موضعی در هندسه‌ی جبری، مفهوم کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته از دو R–مدول، نخستین بار در سال ۱۹۷۰ توسط هرزوگ[7] نسبت به ایده‌آل ماکزیمال $\mathfrak{m}$ از حلقه‌ی R مطرح گردید و سپس توسط بیژن‌زاده در سال ۱۹۷۹ برای هر دستگاه مستقیم از ایده‌آل‌ها روی هر حلقه‌ی نوتری جابه‌جایی دلخواه تعمیم داده شد. طبیعی است که بسیاری از مسائل در حوزه‌ی کوهمولوژی موضعی برای مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته نیز مطرح گردد. مطالعه و تحقیق پیرامون پاسخ به این سؤالات، نتایج جالب بسیاری را در بر داشت که از آن جمله می‌توان به مراجع [۳۱]، [۵۵]، [۷۲] و [۵۲] اشاره نمود.

هم‌چنین، تاکاهاشی[8] و همکارانش در مرجع [۶۵] تعمیم دیگری از مدول‌های کوهمولوژی موضعی موسوم به مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به یک زوج از ایده‌آل‌های حلقه‌ی R را ارائه و به برخی از مسائل مذکور برای این مدول‌ها پاسخ داد. تحقیقاتی نیز پیرامون رفتار این مدول‌ها صورت گرفته که به عنوان مثال می‌توان به مراجع [۵۳] و [۶۶] اشاره نمود.

در این رساله به بحث و مطالعه پیرامون مسائلی چون صفر شدن، آرتینی بودن، متناهی و

[4] Huneke

[5] Singh

[6] Katzman

[7] Herzog

[8] Takahashi

هم‌متناهی بودن، مینیماکس و لاسکری ضعیف بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی پرداخته و نتایج مراجع متعددی را بهبود بخشیده‌ایم. حاصل تحقیقات خود را در این راستا، در شش فصل به شرح زیر ارائه می‌کنیم:

در سراسر این رساله، همه‌ی حلقه‌ها جابه‌جایی با عضو همانی ناصفر و همه‌ی مدول‌ها یکانی فرض شده‌اند.

در فصل اول، به ارائه‌ی تعاریف، مفاهیم و نتایجی می‌پردازیم که در فصل‌های بعد مورد نیاز می‌باشند.

برخی از خواص همولوژیکی مدول‌های کوهمولوژی موضعی نشان می‌دهد که می‌توان شماری از نتایج اثبات شده در مراجع متعدد را به هر زیر رسته‌ی دلخواهی از R−مدول‌ها که نسبت به زیرمدول، مدول خارج قسمتی و توسیع بسته باشد، تعمیم داد. این زیررسته‌ها موسوم به زیررسته‌های سِر می‌باشند. بر این اساس در فصل دوم، با تکیه بر خواص مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته و مفهوم دنباله‌های I−فیلتر منظم، نشان داده‌ایم برخی از نتایج درباره‌ی این مدول‌ها در هر زیررسته‌ی سِر دلخواه برقرار می‌باشند و از این راه نتایجی پیرامون متناهی بودن مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته به این مدول‌ها به‌دست آورده‌ایم. مطالب این فصل برگرفته از مراجع [۵] و [۲] می‌باشد.

رده‌ی مدول‌های مینیماکس در سال ۱۹۸۶ توسط زوشینگر[9] در مرجع [۷۴] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفت. این رده از مدول‌ها شامل همه‌ی مدول‌های نوتری و آرتینی می‌باشد. در سال ۲۰۰۵ دیوانی‌آذر و مافی در مرجع [۳۲]، رده‌ی جدیدی از مدول‌ها موسوم به مدول‌های لاسکری ضعیف را تعریف نمودند که اکیداً بزرگتر از رده‌ی مدول‌های مینیماکس می‌باشد. به عنوان تعمیمی دیگر از مدول‌های مینیماکس، اعظمی، نقی‌پور و وکیلی در مرجع [۱۲] مدول‌های مینیماکس نسبت به یک ایده‌آل I از حلقه‌ی R یا I−مینیماکس را ارائه نمودند. بر این اساس در فصل سوم که شامل نتایج مرجع [۴] می‌باشد، ابتدا رده‌ی جدیدی از مدول‌ها موسوم به مدول‌های I−لاسکری ضعیف را که اکیداً بزرگ‌تر از رده‌های مدول‌های I−مینیماکس و لاسکری ضعیف می‌باشد، معرفی کرده و برخی از ویژگی‌های جبری و همولوژیکی این مدول‌ها را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. سپس به بررسی رفتار مدول‌های کوهمولوژی موضعی در این رده از مدول‌ها پرداخته و در این میان نتایج مراجع متعددی را تعمیم داده‌ایم.

در راستای پاسخ به حدس گروتندیک و سؤال هارتشورن، بلشف[10] و همکارانش در مرجع [۱۷] نشان دادند که اگر I ایده‌آلی از حوزه‌ی موضعی گرنشتاین R و M و N دو

[9] Zöschinger

[10] Belshof

R–مدول بازتابی باشند به‌طوری‌که $\operatorname{Supp}_R(N) \subseteq V(I)$، آن‌گاه $\operatorname{Ext}^j_R(N, H^i_I(M))$ برای هر i و j، بازتابی است. خشیارمنش و خوش‌آهنگ در مرجع [۴۹] توانستند شرط حوزه‌ی گرنشتاین را از این نتیجه حذف نمایند. نظر به این‌که مدول‌های بازتابی روی حلقه‌های موضعی کامل با مدول‌های مینیماکس یکسانند، در فصل چهارم ابتدا شرط کامل بودن را از این نتیجه حذف نموده و نتایجی را پیرامون متناهی بودن مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته، اعداد باس[11] و اعداد بتی[12] مدول کوهمولوژی موضعی $H^i_I(M)$ در حالت کلی‌تری که M یک R–مدول مینیماکس روی حلقه‌ی نوتری جابه‌جایی دلخواه R است، ارائه نموده‌ایم. در ادامه نیز نتایجی پیرامون خاصیت لاسکری ضعیف مدول‌های کوهمولوژی موضعی روی مدول‌های مینیماکس به‌دست آورده‌ایم. نتایج این فصل برگرفته از مقاله مرجع [۷] می‌باشد.

از دیگر مسائلی که در حوزه‌ی کوهمولوژی موضعی مطرح است، مسأله‌ی آرتینی بودن و صفر شدن این مدول‌هاست. ملکرسون[13] در مرجع [۵۹]، نتایجی را پیرامون آرتینی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی ارائه نمود. به‌ویژه، وی نشان داد که اگر M یک R–مدول با تولید متناهی با بعد کرول n روی حلقه‌ی موضعی $(R, \mathfrak{m})$ باشد، آن‌گاه $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ به ازای هر i و $H^n_I(M)$ به ازای هر ایده‌آل I از R آرتینی است. بر این اساس، در فصل پنجم که شامل نتایج مقاله [۶] می‌باشد، آرتینی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی و کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته را مورد مطالعه و تحقیق قرار داده‌ایم. به‌ویژه، به‌عنوان تعمیمی از نتایج ملکرسون نشان داده‌ایم که اگر M یک مدول مینیماکس روی حلقه‌ی موضعی $(R, \mathfrak{m})$ باشد، آن‌گاه $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ آرتینی است. هم‌چنین، اثبات نموده‌ایم که اگر M یک R–مدول مینیماکس با بعد کرول n روی حلقه‌ی نوتری جابه‌جایی دلخواه R باشد، آن‌گاه $H^n_I(M)$ به ازای هر ایده‌آل I از R آرتینی است.

در فصل ششم، که برگرفته از نتایج مقاله [۳] می‌باشد، مفهوم مدول‌های (I, J)–هم‌مینیماکس را به‌عنوان تعمیمی از مفهوم مدول‌های I–هم‌مینیماکس ارائه نموده و به مطالعه‌ی برخی از خواص این مدول‌ها پرداخته‌ایم. هم‌چنین، نتایجی را پیرامون مینیماکس بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به یک زوج از ایده‌آل‌ها به‌دست آورده‌ایم. به‌طور خاص، نتایج مرجع [۶۶] را به رده‌ی مدول‌های مینیماکس تعمیم داده‌ایم.

---

[11] Bass numbers

[12] Betti numbers

[13] Melkersson

فصلِ ۱

مقدمات و مطالب پیش نیاز

در این فصل به مطالعه‌ی تعاریف و قضایایی می‌پردازیم که در فصل‌های بعد مورد نیاز می‌باشند. از آن‌جا که اثبات بسیاری از این قضایا در منابع مختلف موجودند، لذا از تکرار آن‌ها خودداری کرده و به منابع مربوطه ارجاع می‌دهیم.

۱.۱ چند نکته‌ی مقدماتی

در سراسر این رساله، R یک حلقه‌ی جابه‌جایی با عضو همانی ناصفر و I ایده‌آلی از R است و تمام مدول‌ها R–مدول یکانی هستند. مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R را با نماد $\mathrm{Spec}(R)$ و مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال آن را با نماد $\mathrm{Max}(R)$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین منظور از $V(I)$، مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های اول R است که I را دربردارند و منظور از $\mathcal{C}(R)$ رسته‌ی همه‌ی R–مدول‌ها و R–همریختی‌ها می‌باشد.

تعریف و نمادگذاری ۱.۱.۱ فرض کنیم M یک R–مدول و P و N زیرمدول‌هایی از M باشند. در این صورت:

۱. $(N :_R P) = \{r \in R \mid \forall x \in P, rx \in N\}$

۲. $(N :_M I) = \{x \in M \mid \forall r \in I, rx \in N\}$

۳. $\mathrm{Ann}_R(M) = \{r \in R \mid \forall x \in M, rx = ۰\}$

۴. اگر $\mathrm{Ann}_R(M)=0$ باشد، گوییم M یک R–مدول وفادار است.

تعریف و نمادگذاری ۲.۱.۱ فرض کنیم M یک R–مدول باشد. $\mathrm{Supp}_R(M)$ و $\mathrm{Ass}_R(M)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathrm{Supp}_R(M)=\{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(R)\mid \exists \quad 0\neq x\in M \quad ; \quad (0:_R x)\subseteq\mathfrak{p}\}$$
$$\mathrm{Ass}_R(M)=\{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(R)\mid \exists \quad 0\neq x\in M \quad ; \quad (0:_R x)=\mathfrak{p}\}$$

$\mathrm{Supp}_R(M)$ را محمل M و $\mathrm{Ass}_R(M)$ را مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته به M می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم M یک R–مدول ناصفر باشد. بعد کرول M که با $\dim_R M$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\dim_R M:=\sup\{n\geq 0\mid \exists \quad \mathfrak{p}_0\subsetneqq\mathfrak{p}_1\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathfrak{p}_n \quad s.t. \quad \mathfrak{p}_i\in\mathrm{Supp}_R(M)\}.$$

تذکر ۴.۱.۱ درواقع بعد کرول M همان بعد محمل M (به‌عنوان یک فضای توپولوژیک) است. از این رو، گاهی آن را با نماد $\dim\mathrm{Supp}_R(M)$ نمایش می‌دهند. ما از این نماد در فصل سوم استفاده خواهیم کرد.

لم ۵.۱.۱ فرض کنیم M یک R–مدول باشد. در این صورت، گزاره‌های زیر برقرارند:

۱. $\mathrm{Supp}_R(M)=\{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(R)\mid M_{\mathfrak{p}}\neq 0\}$.

۲. اگر $0\to N\to M\to L\to 0$ دنباله‌ای دقیق از R–مدول‌ها و R–همریختی‌ها باشد، آن‌گاه:

الف) $\mathrm{Supp}_R(M)=\mathrm{Supp}_R(N)\cup\mathrm{Supp}_R(L)$.

ب) $\mathrm{Ass}_R(N)\subseteq\mathrm{Ass}_R(M)\subseteq\mathrm{Ass}_R(N)\cup\mathrm{Ass}_R(L)$.

۳. اگر M یک R–مدول آرتینی باشد، آن‌گاه $\mathrm{Ass}_R(M)=\mathrm{Supp}_R(M)$. هم‌چنین، این مجموعه شامل تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال R است.

۴. اگر M یک R–مدول با تولید متناهی باشد، آن‌گاه:

$$\mathrm{Supp}_R(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathrm{Ann}_R(M) \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

به‌ویژه، در این حالت $\dim_R M = \dim_R(R/\mathrm{Ann}_R(M))$.

اثبات: رجوع شود به بخش ۶ از مرجع [۵۸]. □

گزاره ۶.۱.۱ فرض کنیم R حلقه‌ای نوتری و M یک R–مدول باشد. در این صورت:

۱. $M = \circ$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Ass}_R(M) = \emptyset$.

۲. به ازای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از حلقه‌ی R، $\mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$.

۳. اگر M یک R–مدول با تولید متناهی باشد، آن‌گاه:

الف) $\mathrm{Ass}_R(M)$ متناهی است.

ب) مجموعه‌ی عضوهای مینیمال دو مجموعه‌ی $\mathrm{Supp}_R(M)$ و $\mathrm{Ass}_R(M)$ یکسانند.

اثبات: رجوع شود به گزاره‌ی ۳.۴.۲ و قضایای ۹.۴.۲ و ۱۲.۴.۲ از مرجع [۳۵]. □

نمادگذاری ۷.۱.۱ مجموعه‌ی عضوهای مینیمال $\mathrm{Supp}_R(M)$ را با $\mathrm{Min}_R(M)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۸.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه‌ی نوتری و M و N دو R–مدول باشند به‌طوری‌که M با تولید متناهی باشد. در این صورت، $\mathrm{Ass}_R(\mathrm{Hom}_R(M,N)) = \mathrm{Supp}_R(M) \cap \mathrm{Ass}_R(N)$.

اثبات: رجوع شود به گزاره‌ی ۱۰.۱.۴ از مرجع [۲۱] . □

لم ۹.۱.۱ اگر R–مدول M به صورت جمع مستقیم خانواده‌ی $\{M_i\}_{i\in I}$ از زیرمدول‌هایش باشد، آن‌گاه $\mathrm{Ass}_R(M) = \bigcup_{i\in I} \mathrm{Ass}_R(M_i)$.

اثبات: رجوع شود به نتیجه‌ی ۱ از گزاره‌ی ۳.۱.۴ از مرجع [۲۱]. □

قضیه ۱۰.۱.۱ (قضیه‌ی گروسون[1]) اگر M و L دو R–مدول با تولید متناهی باشند به‌طوری‌که $\mathrm{Supp}_R(L) \subseteq \mathrm{Supp}_R(M)$ ، آن‌گاه فیلتری متناهی مانند

$$\circ = L_\circ \subseteq L_۱ \subseteq \cdots \subseteq L_n = L$$

از زیرمدول‌های L وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $۱ \leq i \leq n$ ، عامل‌های $L_i/L_{i-۱}$ تصویرهای همریخت جمع مستقیم تعداد متناهی نسخه‌هایی از M می‌باشند.

[1] Gruson

اثبات: رجوع شود به قضیه‌ی ۱.۴ از مرجع [۶۸]. □

لم ۱۱.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه‌ی نوتری و $\mathfrak{p}$ و $\mathfrak{q}$ دو ایده‌آل اول متمایز از R باشند به‌طوری‌که $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$. اگر ایده آل اولی مانند $\mathfrak{p}'$ از R موجود باشد که به‌طور اکید بین $\mathfrak{p}$ و $\mathfrak{q}$ قرار گیرد، آن‌گاه بی‌نهایت ایده‌آل اول به‌طور اکید بین $\mathfrak{p}$ و $\mathfrak{q}$ قرار می گیرند.

اثبات: رجوع شود به قضیه‌ی ۱۴۴ از مرجع [۴۴]. □

گزاره ۱۲.۱.۱ برای هر R–مدول M شرایط زیر با یکدیگر معادلند:

۱. M یک R–مدول یکدست وفادار است.

۲. M یکدست بوده و برای هر R–مدول N، $N \otimes_R M = 0$ نتیجه دهد $N = 0$.

۳. M یکدست بوده و برای هر ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ از R، $M \neq \mathfrak{m}M$.

اثبات: رجوع شود به قضیه‌ی ۱۲.۱.۲ از مرجع [۳۵]. □

لم ۱۳.۱.۱ فرض کنیم $\varphi : R \to S$ یک همریختی حلقه‌ای بوده و S یک R–مدول یکدست وفادار باشد (در این حالت گوییم φ یک همریختی حلقه‌ای یکدست وفادار است). در این صورت،

۱. اگر M یک R–مدول باشد، آن‌گاه نگاشت $\bar{\varphi} : M \to M \otimes_R S$ با ضابطه‌ی $\bar{\varphi}(x) = x \otimes 1$ یک تکریختی است. به‌ویژه، φ یک تکریختی می‌باشد.

۲. اگر I ایده‌آلی از R باشد، آن‌گاه $IS \cap R = I$.

۳. نگاشت $\psi : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ با ضابطه‌ی $\psi(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \cap R$ پوشاست.

۴. اگر $\mathfrak{m}$ یک ایده‌آل ماکسیمال از R باشد، آن‌گاه ایده‌آل ماکسیمالی از S مانند $\mathfrak{m}'$ موجود است به‌طوری‌که $\mathfrak{m}' \cap R = \mathfrak{m}$.

اثبات: رجوع شود به قضیه‌ی ۱۷.۵.۲ از مرجع [۳۵]. □

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنیم M یک R–مدول باشد. عضو $r \in R$ را یک شمارنده‌ی صفر روی M نامیم هرگاه عضو ناصفر $x \in M$ موجود باشد به‌طوری‌که $rx = 0$. مجموعه‌ی عضوهایی از R را که روی M شمارنده‌ی صفر هستند، با نماد $\mathrm{Zd}_R(M)$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۱۵.۱.۱ فرض کنیم R حلقه‌ای نوتری و M یک $R-$مدول ناصفر باشد. در این صورت، $\mathrm{Zd}_R(M) = \bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}_R(M)} \mathfrak{p}$.

اثبات: رجوع شود به قضیه‌ی ۱.۶ از مرجع [۵۸]. □

تعریف ۱۶.۱.۱ مجوعه‌ی مرتب‌جزئی $(I,\leq)$ را جهت‌دار یا مستقیم نامیم هرگاه برای هر $i,j\in I$، $k\in I$ یافت شود به‌طوری‌که $k\geq i$ و $k\geq j$.

تعریف ۱۷.۱.۱ فرض کنیم $(I,\leq)$ یک مجوعه‌ی مرتب‌جزئی مستقیم باشد. یک خانواده‌ی وارون از ایده‌آل‌ها مانند $\{\mathfrak{b}_i\}_{i\in I}$ را یک دستگاه از ایده‌آل‌ها نامیم هرگاه به ازای هر $i,j\in I$، $k\in I$ یافت شود به‌طوری‌که $\mathfrak{b}_k\subseteq \mathfrak{b}_i\mathfrak{b}_j$.

تعریف ۱۸.۱.۱ فرض کنیم $(I,\leq)$ یک مجموعه‌ی مستقیم باشد. گردایه‌ی $\{M_i\}_{i\in I}$ از $R-$مدول‌ها به همراه خانواده‌ی $R-$همریختی‌های $\{\mu_{ij}:M_i\to M_j\}_{i\leq j}$ یک دستگاه مستقیم نامیده می‌شود هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

۱. به ازای هر $i\in I$، μ_{ii} نگاشت همانی روی M_i باشد.

۲. برای هر $i,j,k\in I$ با شرط $i\leq j\leq k$ داشته باشیم $\mu_{ik}=\mu_{jk}\circ\mu_{ij}$.

دستگاه مستقیم فوق را با $M=\{M_i,\mu_{ij}\}_{i,j\in I}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۹.۱.۱ فرض کنیم $M=\{M_i,\mu_{ij}\}_{i\leq j}$ یک دستگاه مستقیم روی مجموعه‌ی مستقیم I باشد. حد مستقیم این دستگاه که با نماد $\varinjlim_{i\in I} M_i$ نشان داده می‌شود برابر است با $R-$مدول M به همراه خانواده‌ی $R-$همریختی‌های $\{\mu_i:M_i\to M\}_{i\in I}$ به‌طوری‌که برای هر $i,j\in I$ که $i\leq j$،

$$\mu_i=\mu_j\circ\mu_{ij}$$

و برای هر خانواده‌ی دیگری مانند $\{N,\{h_i\}_{i\in I}\}$ که دارای خاصیت فوق باشد، $R-$همریختی یکتای $f:M\to N$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $i\in\mathbb{N}$ ، $f\circ\mu_i=h_i$.

به آسانی ثابت می‌شود که f یک یکریختی است. در واقع، حد مستقیم تحت یکریختی یکتاست.

گزاره ۲۰.۱.۱ هر $R-$مدول M می‌تواند به صورت حد مستقیم زیرمدول‌های با تولید متناهی خودش نوشته شود.

اثبات: رجوع شود به صفحه ۲۷۱ از مرجع [۵۸]. □

تعریف ۲۱.۱.۱ I–ادیک کامل‌سازی R با $\hat{R}$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\hat{R} = \left\{ (x_i + I^i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} R/I^i \mid \forall \ \ i \leq j \ , \ x_j - x_i \in I^i \right\}$$

به طور مشابه، اگر M یک R–مدول باشد، آن‌گاه I–ادیک کامل‌سازی M با $\hat{M}$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\hat{M} = \left\{ (x_i + I^iM)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} M/I^iM \mid \forall \ \ i \leq j \ , \ x_j - x_i \in I^iM \right\}$$

تعریف ۲۲.۱.۱ حلقه‌ی R را کامل نامیم هرگاه همریختی گروهی طبیعی $\varphi : R \to \hat{R}$ با ضابطه‌ی $\varphi(r) = (r + I^i)_{i\in\mathbb{N}}$ یک یکریختی باشد.

گزاره ۲۳.۱.۱ فرض کنیم I ایده‌آلی از حلقه‌ی نوتری R باشد. در این صورت، I–ادیک کامل‌سازی $\hat{R}$ از R یک R–جبر یکدست است.

اثبات: رجوع شود به گزاره‌ی ۱۴.۱۰ از مرجع [۱۱]. □

گزاره ۲۴.۱.۱ فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ای نوتری و موضعی باشد. در این صورت، $\mathfrak{m}$–ادیک کامل‌سازی $\hat{R}$ از R یک حلقه‌ی نوتری و موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\hat{\mathfrak{m}}$ می‌باشد.

اثبات: رجوع شود به گزاره‌ی ۱۶.۱۰ از مرجع [۱۱]. □

نتیجه ۲۵.۱.۱ اگر $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ای نوتری و موضعی باشد، آن‌گاه $\mathfrak{m}$–ادیک کامل‌سازی $\hat{R}$ از R یک R–جبر یکدست وفادار است.

اثبات: بنا بر گزاره‌ی ۲۴.۱.۱ و لم ناکایاما و گزاره‌ی ۱۲.۱.۱ حکم واضح است. □

قضیه ۲۶.۱.۱ اگر I ایده‌آلی از حلقه‌ی نوتری R باشد، آن‌گاه I–ادیک کامل‌سازی $\hat{R}$ از R نیز نوتری است.

اثبات: رجوع شود به قضیه‌ی ۲۶.۱۰ از مرجع [۱۱]. □

لم ۲۷.۱.۱ اگر $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی با $\mathfrak{m}$–ادیک کامل‌سازی $\hat{R}$ و M یک R–مدول با تولید متناهی باشد، آن‌گاه

$$\dim_R M = \dim_{\hat{R}}(\hat{M}).$$

اثبات: رجوع شود به تبصره‌ی ۳.۱.۶ از مرجع [۲۴]. $\square$

تعریف و نمادگذاری ۲۸.۱.۱ توسیع انژکتیو مینیمال R–مدولی مانند M را پوشش انژکتیو M نامیده و با $E(M)$ نشان می دهیم.

تعریف ۲۹.۱.۱ فرض می‌کنیم R حلقه‌ای نوتری و موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ باشد و $K = R/\mathfrak{m}$. در این صورت، $\mathrm{Hom}_R(M, E(K))$ را دوگان ماتلیس R–مدول M نامیده و با M^ν نشان می‌دهیم. هم‌چنین، همریختی طبیعی $\varphi : M \to M^{\nu\nu}$ با ضابطه‌ی $\varphi(x)(f) = f(x)$ را به ازای هر $x \in M$ و $f \in M^\nu$ همریختی کانونی می‌نامیم. گوییم R–مدول M، بازتابی ماتلیس یا به طور خلاصه بازتابی است هرگاه تحت همریختی کانونی $\varphi : M \to M^{\nu\nu}$ داشته باشیم $M \cong M^{\nu\nu} = (M^\nu)^\nu$.

نتیجه ۳۰.۱.۱ مدول M نوتری است اگر و تنها اگر M^ν آرتینی باشد.

اثبات: رجوع شود به نتیجه‌ی ۴.۴.۳ از مرجع [۳۵]. $\square$

نتیجه ۳۱.۱.۱ اگر M^ν نوتری باشد، آن‌گاه M آرتینی است.

اثبات: رجوع شود به نتیجه‌ی ۵.۴.۳ از مرجع [۳۵]. $\square$

لم ۳۲.۱.۱ فرض کنید R حلقه‌ای کامل باشد. اگر R–مدول M نوتری یا آرتینی باشد، آن‌گاه $M \cong M^{\nu\nu}$.

اثبات: رجوع شود به لم ۶.۴.۳ از مرجع [۳۵]. $\square$

قضیه ۳۳.۱.۱ اگر R حلقه‌ای کامل باشد، آن‌گاه R–مدول M آرتینی است اگر و تنها اگر M^ν نوتری باشد.

اثبات: رجوع شود به قضیه‌ی ۷.۴.۳ از مرجع [۳۵]. $\square$

تعریف ۳۴.۱.۱ فرض کنیم M یک R–مدول باشد. در این صورت،

الف) یک تحلیل تصویری از M متشکل است از خانواده‌ای از R−مدول‌های تصویری مانند $\{P_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ و R−همریختی‌ها مانند $\{d_n : P_n \to P_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ به همراه R−همریختی $\varepsilon : P_0 \to M$ به‌طوری‌که برای هر $n < 0$، $P_n = 0$ و نیز دنباله‌ی بلند

$$\cdots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

دقیق باشد. این تحلیل را به اختصار با نماد $P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$ نشان می‌دهیم.

ب) یک تحلیل انژکتیو از M متشکل است از خانواده‌ای از R−مدول‌های انژکتیو مانند $\{I^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ و R−همریختی‌ها مانند $\{d^n : I^n \to I^{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ به همراه R−همریختی $\varepsilon : M \to I^0$ به‌طوری‌که برای هر $n < 0$، $I^n = 0$ و نیز دنباله‌ی بلند

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \cdots \longrightarrow I^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} I^n \xrightarrow{d^n} I^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

دقیق باشد. این تحلیل را به اختصار با نماد $M \xrightarrow{\varepsilon} I^\bullet$ نشان می‌دهیم.

لم ۳۵.۱.۱ فرض کنیم M یک R−مدول باشد. در این صورت:

۱. M دارای تحلیل تصویری می‌باشد.

۲. M دارای تحلیل انژکتیو می‌باشد.

اثبات: رجوع شود به قضایای ۲.۱.۵ و ۴.۲.۵ از مرجع [۶۷]. □

تعریف ۳۶.۱.۱ گوییم R−مدول M دارای بعد تصویری حداکثر n می‌باشد و با $\mathrm{pd}_R(M) \le n$ نشان می‌دهیم هر گاه M دارای تحلیل تصویری مانند

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

باشد. اگر n کوچک‌ترین عدد با خاصیت فوق باشد، آن‌گاه قرار می‌دهیم $\mathrm{pd}_R(M) = n$.

بعد انژکتیو M که با نماد $\mathrm{injdim}(M)$ نشان داده می‌شود، نیز به طور مشابه تعریف می‌شود.

تعریف ۳۷.۱.۱ n−اُمین تابعگون مشتق شده‌ی راست $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ را با $\mathrm{Ext}^n_R(-, M)$ و n−اُمین تابعگون مشتق شده‌ی چپ $- \otimes_R M$ را با $\mathrm{Tor}^R_n(M, -)$ نشان می‌دهیم.

لم ۳۸.۱.۱ فرض کنیم A یک R–مدول و $\{B_i\}_{i\in\Lambda}$ خانواده‌ای از R–مدول‌ها باشد. در این صورت، برای هر $n \geq 0$،

۱. $\operatorname{Ext}_R^n(A, \prod_{i\in\Lambda} B_i) \cong \prod_{i\in\Lambda} \operatorname{Ext}_R^n(A, B_i)$.

۲. $\operatorname{Ext}_R^n(\bigoplus_{i\in\Lambda} B_i, A) \cong \prod_{i\in\Lambda} \operatorname{Ext}_R^n(B_i, A)$.

۳. $\operatorname{Tor}_n^R(\bigoplus_{i\in\Lambda} B_i, A) \cong \operatorname{Tor}_n^R(A, \bigoplus_{i\in\Lambda} B_i) \cong \bigoplus_{i\in\Lambda} \operatorname{Tor}_n^R(B_i, A)$.

اثبات: حکم با توجه به قضایای ۴.۳.۷ و ۵.۳.۷ و ۸.۳.۶ از مرجع [۶۷] به‌دست می‌آید.
□

قضیه ۳۹.۱.۱ فرض کنیم R و S دو حلقه‌ی جابه‌جایی باشند. هم‌چنین، فرض کنیم S یک R–جبر یکدست و M و N دو R–مدول باشند. اگر R نوتری و M با تولید متناهی باشد، آن‌گاه برای هر $i \geq 0$، داریم

$$\operatorname{Ext}_R^i(M, N) \otimes_R S \cong \operatorname{Ext}_S^i(M \otimes_R S, N \otimes_R S).$$

اثبات: رجوع شود به قضیه‌ی ۵.۲.۳ از مرجع [۳۵]. □

لم ۴۰.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه‌ی نوتری، M یک R–مدول با تولید متناهی و N یک R–مدول دلخواه باشند. در این صورت، برای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ و هر $i \geq 0$، احکام زیر برقرار است:

۱. $\operatorname{Ext}_R^i(M, N)_{\mathfrak{p}} \cong \operatorname{Ext}_{R_{\mathfrak{p}}}^i(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}})$.

۲. $\operatorname{Supp}_R(\operatorname{Ext}_R^i(M, N)) \subseteq \operatorname{Supp}_R(M) \cap \operatorname{Supp}_R(N)$.

اثبات: رجوع شود به نتیجه‌ی ۶.۲.۳ از مرجع [۳۵]. □

لم ۴۱.۱.۱ فرض کنیم M یک R–مدول تصویری و N و L دو R–مدول دلخواه باشند. در این صورت، برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\operatorname{Ext}_R^n(M \otimes_R N, L) \cong \operatorname{Ext}_R^n(N, \operatorname{Hom}_R(M, L)).$$

اثبات: رجوع شود به تمرین ۲۱.۹ از مرجع [۶۱]. □

لم ۴۲.۱.۱ فرض کنیم M و N دو R–مدول باشند. در این صورت،

$$\mathrm{Supp}_R(M \otimes_R N) \subseteq \mathrm{Supp}_R(M) \cap \mathrm{Supp}_R(N)$$

به‌ویژه، اگر M و N دو R–مدول با تولید متناهی باشند، آن‌گاه تساوی برقرار خواهد بود.

اثبات: رجوع شود به گزاره ۱۸.۴.۲ از مرجع [۲۱]. □

لم ۴۳.۱.۱ فرض کنیم $\varphi : R \to S$ یک همریختی حلقه‌ای بوده و $\bar{\varphi} : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ با ضابطه‌ی $\bar{\varphi}(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ مفروض باشد. در این صورت، برای هر R–مدول M داریم:

$$\mathrm{Supp}_S(M \otimes_R S) \subseteq \bar{\varphi}^{-1}(\mathrm{Supp}_R(M))$$

به‌ویژه، اگر M با تولید متناهی باشد، آن‌گاه تساوی برقرار خواهد بود.

اثبات: رجوع شود به گزاره ۱۹.۴.۲ از مرجع [۲۱]. □

قضیه ۴۴.۱.۱ فرض کنیم M یک R–مدول باشد. در این صورت، احکام زیر معادلند:

۱. $\mathrm{Ext}^i_R(R/I, M)$ به ازای هر i، با تولید متناهی است.

۲. $\mathrm{Tor}_i^R(R/I, M)$ به ازای هر i، با تولید متناهی است.

اثبات: رجوع شود به قضیه‌ی ۱.۲ از مرجع [۶۰] . □

تعریف ۴۵.۱.۱ فرض کنیم M یک R–مدول باشد. عضو $a \in R$ را M–منظم گوییم هر گاه برای هر $0 \neq x \in M$ داشته باشیم $ax \neq 0$.

تعریف ۴۶.۱.۱ دنباله‌ی $a_1, \ldots, a_n$ از R را M–دنباله‌ی منظم نامیم هر گاه شرایط زیر برقرار باشند:

۱. a_1 ، M–منظم و a_2 ، $\frac{M}{a_1M}$–منظم و $\cdots$ و a_n ، $\frac{M}{\sum_{i=1}^{n-1} a_iM}$–منظم باشند.

۲. $\frac{M}{\sum_{i=1}^{n} a_iM} \neq 0$.