بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

(گرایش کاربردی)

بررسی معادلات دیفیوژن – موج کسری با مرتبه های متفاوت

ارائه دهنده :

رقیه اعلائی خانقاه

استاد راهنما:

دکتر آرمان عقیلی

تیر ۱۳۹۰

تقدیم به

دو موجود مقدس ،

آنان که ناتوان شدند تا من به توانایی برسم ، موهایشان سپید شد تا من در اجتماع رو سپید شوم و عاشقانه سوختند تا روشنگر راهم با شند و گرمابخش وجودم ،

" پدرم و مادرم"

تقدیر و تشکر :

از دوستان واساتید بزرگوار که دراین پایان نامه مرا یاری نموده اند قدردانی می کنم .

- از دکتر آرمان عقیلی ، استاد راهنمای بزرگوارم ، که انجام این پایان نامه بدون راهنمایی های علمی ومساعدت همه جانبه ایشان امکان پذیر نبود ، کمال تشکر وقدردانی را دارم .
- از دکتر محمد کیانپور و دکترمحمد رضا یاقوتی به عنوان داوران این پایان نامه سپاسگزارم .
- از دانشجویان رشته ریاضی کاربردی ومحض ورودی ۸۸ و۸۹ به خصوص خانم مطهری برای فراهم کردن محیطی صمیمی و علمی سپاسگزارم .
- در انتها از پدرم و مادرم ، خواهران وبرادرانم وهمسرم جهت فراهم نمودن محیطی آرام بسیار سپاسگزارم .

چکیده :

عنوان پایان نامه : بررسی معادلات از نوع دیفیوژن – موج کسری با مرتبه های متفاوت

نام دانشجو: رقیه اعلائی خانقاه

می خواهیم معادله دیفیوژن – موج را با دو مشتق کسری در مراتب مختلف روی دامنه های فضایی کراندار وبی کران بررسی کنیم. بنابراین مدل ما تعمیمی از معادله تلگراف را نشان می دهد . جوابهای از مسائل علامت دهی و کشی در جملات یک سری و انتگرال نشان داده می شود. معادلات رسانش گرما و موج کلاسیک در حالت های محدود شده بدست می آید و همچنین معادله گرما (کسری – زمان) را با استفاده از تبدیل انتگرال حل می شود . این روش برای حل معادلات دیفرانسیل کسری بسیار قوی می باشد .

کلید واژه : معادله دیفرانسیل کسری ، مسئله کشی ، مسئله علامت دهی ، تابع گرین ، تابع میتاگ لفلر، مشتق کسری ، معادله گرما کسری – زمان .

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل دوم

مشتقات کسری و انواع آن

فصل سوم

جواب کسری – زمان معادله دیفرانسیل جزئی کسری با تبدیل لاپلاس

فصل چهارم

پیشگفتار :

این پایان نامه در ٤ فصل جمع آوری شده است . در دو فصل ابتدایی با تعاریفی چون اصل آوند ، تابع گرین ، تابع دلتای دیراک ، تابع میتاگ لفلر ،انواع مشتقات کسری وتبدیل لاپلاس آنها ، سری وانتگرال فوریه آشنا می شویم . در فصل سوم جواب معادله کسری – زمان را خواهید دید و در فصل چهارم معادله دیفیوژن – موج کسری را در مراتب مختلف مورد بررسی قرار می دهیم و جواب را به دو صورت سری و انتگرال بدست می آوریم .

قضایای آنالیز مختلط

۱–۱) مقدمه

در این فصل در ابتدا قضایای پایه ای برای انتگرال روی مسیر بسته بیان شده است و در ادامه با تابع دلتای دیراک و خواص آن آشنا می شویم.در انتها اصل آوند وتابع گرین به طور مختصر تعریف می شوند.

۱–۲) فرمول انتگرال کشی [1]

فرض کنید f همه جا در درون وبر مسیر ساده بسته C ،که در جهت مثبت گرفته شده است ، تحلیلی باشد.

اگر z_0 نقطه دلخواهی درون C باشد آنگاه

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \qquad (۱–۱)$$

فرمول (۱–۱)را فرمول انتگرال کشی می نامند.این فرمول بیان می کند که اگر تابع f درون وروی مسیر ساده بسته C تحلیلی باشد،آنگاه مقادیر f در درون C کاملاً بوسیله مقادیر f بر C معین می شوند.در صورتی که فرمول انتگرال کشی بصورت

$$\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0) \qquad (۲–۱)$$

نوشته شود می توان در محاسبه برخی انتگرالها روی مسیرهای ساده بسته از آن استفاده کرد، [1] .

---

[1] Cauchy ‘s integral

۱-۳) قضیه کشی-گورسا[۲]

اگر تابع f در همه نقاط درون وروی مسیر ساده بسته C تحلیلی باشد ، آنگاه

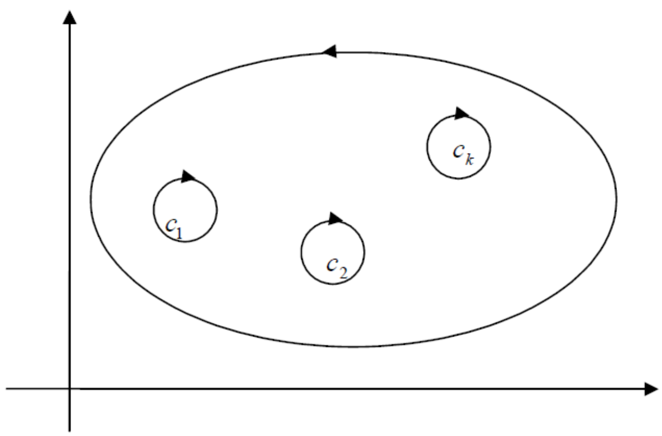
$$\oint_c f(z)dz = 0 \qquad (۳-۱)$$

قضیه کشی-گورسا را می توان طوری تعمیم داد که شامل انتگرال روی مرز حوزهء همبند چند گانه شود ،[1].

۱-۳-۱) تعمیم قضیه کشی-گورسا

فرض کنید C مسیرساده بسته ای در جهت عکس عقربه های ساعت باشد و $C_k\,(k=1,2,...,n)$ مسیرهای ساده بسته که در جهت حرکت عقربه های ساعت گرفته شده اند ودر درون C بوده ، نقطه مشترکی نیز ندارند،باشند. اگر تابع f درسراسر ناحیه بسته شکل (۱-۱)متشکل از همه نقاط درون وروی C بجز نقاط داخلی هر یک از C_k ها تحلیلی باشد آنگاه

$$\oint_c f(z)dz + \sum_{k=0}^{n} \oint_{c_k} f(z)dz = 0 \qquad (٤-۱)$$



شکل(۱-۱)

۱-٤) قضیه مانده ها[۳]

اگر تابع f فقط تعدادی متناهی نقطهء تکین دردرون مسیر ساده بسته C داشته باشد ، آنگاه نقاط تکین باید تنها باشند . قضیه زیر ، که به قضیه مانده کشی مشهور است ، بیان دقیقی از این امر است که اگر f روی C نیز تحلیلی باشد و C را در جهت

[۲] Cauchy – Goursat theorem

[۳] Residue theorem

مثبت بگیریم ، آنگاه مقدار انتگرال f ، پیرامون C برابر با حاصلضرب $2\pi i$ در مجموع مانده های مربوط به آن نقاط تکین است ،[1] .

۱-٤-۱) قضیه مانده کشی

فرض کنید C مسیر ساده بسته ای در جهت مثبت باشد .اگر تابع f در درون و روی C بجز در تعدادی متناهی نقطه تکین $z_k (k=1,2,...,n)$ که در درون C هستند ،تحلیلی باشد ، آنگاه

$$\oint_c f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) \qquad (۱-۵)$$

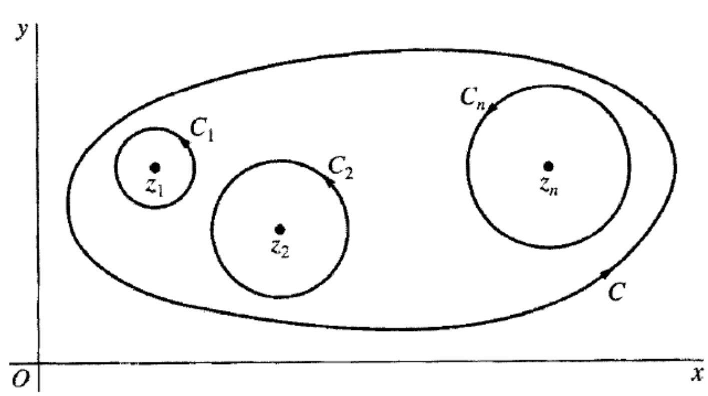
برای اثبات قضیه ، فرض کنید نقاط $z_k (k=1,2,...,n)$ مراکز دوایر C_k با جهت مثبت باشند که در درون C واقع وآنقدر کوچک اند که هیچ دوتایی از این دوایر نقطه مشترکی ندارند (شکل (۱-۲)) دوایر C_k همراه با مسیر ساده بسته C مرز ناحیه ای را تشکیل می دهند که f در سراسر آن تحلیلی است ودرون آن یک حوزه همبند چند گانه است .پس بنا بر تعمیم قضیه کشی-گورسا به این گونه نواحی

$$\oint_c f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} \oint_{c_k} f(z)dz = 0 \qquad (۱-٦)$$

این تساوی به فرمول (۱-٤) تبدیل می شود زیرا

$$\oint_c f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) \qquad (۱-۷)$$

اثبات کامل است،[1] .



شکل(۱-۲)

مثال ۱.

با استفاده از قضیه مانده ها انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$1)\int_{c:|z|=2}\frac{5z-2}{z(z-1)}dz$$

$$z=0\in|z|=2 \qquad b_{-1}=\lim_{z\to 0}\left(z\frac{5z-2}{z(z-1)}\right)=2$$

$$z=1\in|z|=2 \qquad b_{-1}=\lim_{z\to 1}\left((z-1)\frac{5z-2}{z(z-1)}\right)=3$$

$$\Rightarrow\int_c\frac{5z-2}{z(z-1)}dz=2\pi i\sum_{z=z_k}\operatorname{Re}sf(z)=2\pi i(3+2)=10\pi i$$

$$2)\int_{|z|=3}\frac{z+1}{z^2-2z}dz$$

$$z=0\in|z|=3 \qquad b_{-1}=\lim_{z\to 0}\left(z\frac{z+1}{z(z-2)}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$z=2\in|z|=3 \qquad b_{-1}=\lim_{z\to 2}\left((z-2)\frac{z+1}{z(z-2)}\right)=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow\int_{|z|=3}\frac{z+1}{z^2-2z}dz=2\pi i\sum_{z=z_k}\operatorname{Re}sf(z)=2\pi i\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)=2\pi i$$

نکته۲. هرگاه z_0 قطب مرتبه mام باشد آنگاه

$$\operatorname{Re}_{z_0}s\,f=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

$$3)\int_{|z|=1}\frac{\cot z}{z}dz$$

$$f(z)=\frac{\cot z}{z}=\frac{\cos z}{z\sin z}\Rightarrow z\sin z=0\Rightarrow\begin{cases}z=0\\ z=k\pi\end{cases}$$

$z=0$ قطب مرتبه دوم است، $z=k\pi$ در درون مسیر c قرار ندارد.

$$b_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\left(z^2 \frac{\cos z}{z\sin z}\right)' = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z\cos z - z}{\sin^2 z} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{H} \lim_{z\to 0}\frac{\cos^2 z - \sin^2 z - 1}{2\sin z\cos z} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{H} \lim_{z\to 0}\frac{-2\cos z\sin z - 2\sin z\cos z}{2\left(\cos^2 z - \sin^2 z\right)} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\int_{|z|=0} \frac{\cot z}{z}\,dz = 2\pi i(0) = 0$$

۱-۵) لم جردن[٤]

دایره C_R به شعاع R و به مرکز مبداء را در نظر بگیرید ، اگر $f(z)\to 0$ بطور یکنواخت ، وقتی که $R\to\infty$ آنگاه$\left(\lim_{R\to\infty} f(z)=0\right)$

اگر C_R در ربع اول ویا ربع دوم باشد

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\ e^{imz}dz = 0, \qquad (m>0) \tag{۱-۸}$$

اگر C_R در ربع سوم ویا ربع چهارم باشد

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\ e^{-imz}dz = 0, \qquad (m>0) \tag{۱-۹}$$

اگر C_R در ربع دوم ویا ربع سوم باشد

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\ e^{mz}dz = 0, \qquad (m>0) \tag{۱-۱۰}$$

اگر C_R در ربع اول ویا ربع چهارم باشد

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\ e^{-mz}dz = 0, \qquad (m>0) \tag{۱-۱۱}$$

فقط رابطه(۱-۸) لم جردن واقعی است ، در حالیکه بقیه روابط تعمیمی از لم جردن هستند .

اثبات :

در اثبات این لم ، قسمت اول را اثبات می کنیم بقیه قسمت ها نیز به طور مشابه اثبات می شوند .

٤ Gordon lemma

$$|I_R| = \left| \int_{C_R} f(z) \ e^{imz} dz \right| \le \int_{C_R} |f(z)| \ |e^{imz}| \ |dz|,$$

$$|dz| = R d\theta, \qquad |f(z)| \le M_R,$$

$$|e^{imz}| = |\exp(im \mathrm{Re}^{i\theta})| = |\exp\{imR(\cos\theta + i\sin\theta)\}|$$

$$= e^{-mR\sin\theta}$$

بنابراین

$$|I_R| \le RM_R \int_{\theta_0}^{\theta_1} \exp(-mR\sin\theta) \ d\theta,$$

$0 \le \theta_0 < \theta_1 \le \pi$ بخاطر اینکه انتگرالده مثبت است ، سمت راست رابطه فوق خیلی بزرگ می شود ، اگر $\theta_1 = \pi, \theta_0 = 0$ در نظر بگیریم ، آنگاه

$$|I_R| \le RM_R \int_0^{\pi} e^{-mR\sin\theta} \ d\theta = 2RM_R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\sin\theta} \ d\theta,$$

ما نمی توانیم مقدارانتگرال فوق را بدست آوریم . بنابراین از آنجایی که $\sin\theta \ge \frac{2\theta}{\pi}$ است ، می توانیم کرانی از مقدار انتگرال را اینگونه در نظر بگیریم .

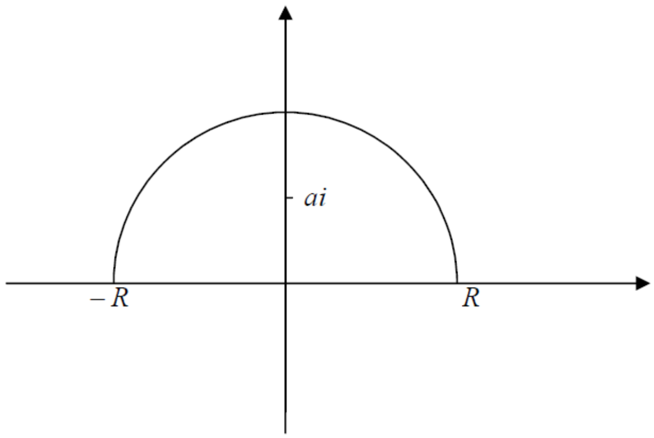
$$|I_R| \le 2RM_R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2mR\frac{\theta}{\pi}} \ d\theta = \frac{\pi}{m} M_R (1 - e^{-mR}).$$

اگر $m > 0$ ، $|I_R|$ به سمت صفر می کند وقتیکه $R \to \infty$ میل می کند، [2].

مثال : مقدار انتگرال زیر را بدست آورید .

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{x^2 + a^2} \ dx, \qquad k, a > 0.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{x^2 + a^2} \ dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{x^2 + a^2} \ dx = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2 + a^2} \ dx \right\}$$



شکل (۱–۳)

با در نظر گرفتن نیم کره فوقانی نا متناهی که در لم جردن به آن اشاره شد ، به انتگرال خطی در طول محور حقیقی می رسیم ، بنا براین

$$\int_0^\infty \frac{\cos kx}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{\oint_C \frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}\,dz\right\}$$

$$= \operatorname{Re}\left\{\pi i\left(\operatorname{Re}s\frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}\right);z=ia\right\} = \operatorname{Re}\left\{\pi i\lim_{z\to ai}\frac{(z-ia)e^{ikz}}{z^2+a^2}\right\} = \frac{\pi}{2a}e^{-ka}$$

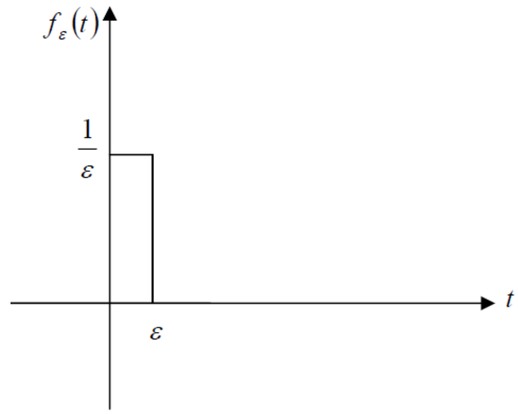
۱–٦) تابع دلتای دیراک[5]

فرض کنید برای هر $\varepsilon > 0$،تابع $f_\varepsilon(t)$ روی فاصله $[0,\infty)$بوسیله رابطه زیر تعریف شود.

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & 0 \le t \le \varepsilon \\ 0 & t > \varepsilon \end{cases} \qquad (۱۲–۱)$$

وشکل آن به صورت زیر نشان داده می شود :

[5] Dirac's delta function



شکل (۱-٤)

به طور هندسی واضح است که همواره حاصلضرب طول فاصله زمان در اندازه تابع برابر ۱ است .حال اگر فاصله زمان ε خیلی کوچک شود باید اندازه تابع بسیار بزرگ شود وحاصلضرب تابع وزمان εوقتی $\varepsilon \to 0$ برابر ۱ باقی می ماند. واین یعنی

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(t)dt = 1 \qquad (۱۳-۱)$$

توجه داشته باشید رابطه (۱-۱۲) را می توان بصورت زیر نیزتعریف کرد:

$$f_\varepsilon(t-a) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} & a-\varepsilon \le t \le a+\varepsilon \\ 0 & else \quad where \end{cases} \qquad (۱٤-۱)$$

این تابع را تابع ضربه یکه[6] $\mathrm{I}(t)$ یا تابع دلتای دیراک $\delta(t)$ می نامند.

تابع دلتای دیراک اغلب بصورت زیر تعریف می شود :

$$\delta(t-a) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f_\varepsilon(t-a) \qquad (۱۵-۱)$$

۱-٦-۱) برخی خواص مهم تابع دلتای دیراک

بسادگی می توان نشان داد که

۱) $\int_0^\infty \delta(t-b)dt = 1$

[6]Unit impulse function

۲) $L\{\delta(t-b)\}=e^{-bs}$

۳) اگر $g(t)$ یک تابع پیوسته در فاصله $[0,\infty)$ باشد،آنگاه برای هر $b\geq 0$ داریم :

$$\int_0^\infty \delta(t-b)g(t)dt=g(b)$$

با انتخاب b=۰ داریم:

I) $\int_0^\infty \delta(t)dt=1$

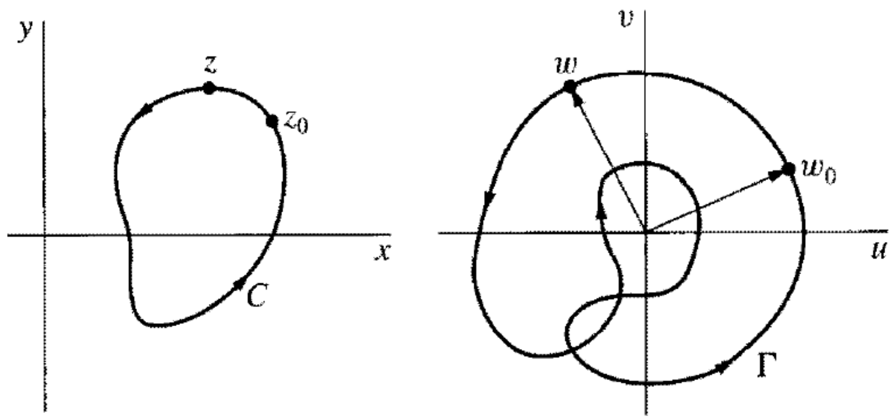
II) $L\{\delta(t)\}=1$

III) $\int_0^\infty \delta(t)g(t)dt=g(0)$

۱-۷) اصل آوند(اصل شناسه) [۷]

تابع f در حوزه D را برخه ریخت[۸] می نامند ، هرگاه در سراسر D بجز محتملاً در قطبها تحلیلی باشد . حال فرض کنید که C مسیر ساده بسته ای با جهت مثبت و f در حوزه داخلی C برخه ریخت و روی C تحلیلی و ناصفر باشد . Γ،تصویر C تحت تبدیل $w=f(z)$، مسیر بسته ای ، نه لزوماً ساده ،در صفحه w است .(شکل (۱-٤)).

در صورتی که نقطه z مسیر C را در جهت مثبت بپیماید ،تصویر آن ، w ، مسیر Γ را در جهت خاصی ، که جهت Γ را معین می کند ، می پیماید . توجه کنید که چون تابع f ،صفری روی C ندارند مسیر Γ از مبداء صفحه w نمی گذرد.



شکل(۱-٥)

۷Argument principle

۸Meromorphic