دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

گروه ریاضی کاربردی

**پایان‌نامه**

**برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته**
**ریاضی کاربردی، گرایش بهینه‌سازی**

**عنوان**

# مسائل تعادل با تعمیم توابع دو متغیره یکنوا و کاربرد آن در نابرابری تغییراتی

استاد راهنما

*دکتر جعفر زعفرانی*

پژوهشگر

*مهدیه فرشیدزاد*

تیرماه ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: فرشیدزاد نام: مهدیه

عنوان: مسائل تعادل با تعمیم توابع دو متغیره یکنوا و کاربرد آن در نابرابری تغییراتی

استاد راهنما: دکتر جعفر زعفرانی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: بهینه سازی

دانشگاه: شیخ بهایی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

تاریخ فارغ التحصیلی: تیر ماه ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۱۲۰

واژگان کلیدی: مسائل تعادل، توابع دو متغیره یکنوا و عملگرها، نابرابری تغییراتی، مسائل مکمل، اصل چسبندگی.

## چکیده

وجود مسائل تعادل در بسیاری از مسائل کاربردی از جمله بهینه‌سازی، مهندسی و اقتصاد محققان را برآن داشت که به مطالعه مسائل تعادل و اثبات نتایج کلی در مورد وجود جواب‌های مسائل تعادل و نابرابری تغییراتی بپردازند. در این پایان نامه در نظر داریم بااستفاده از شرایط یکنوایی تعمیم یافته و شرایط اضافی ضعیف به بررسی و تعمیم قضایای وجودی مسائل تعادل در حالت‌های غیرفشرده بپردازیم. هم‌چنین با تکیه بر اصل چسبندگی وضعیت انتخاب جواب را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و در ادامه به عنوان کاربردی از مسائل تعادل، نتایج

وجودی مسائل نابرابری تغییراتی، مسائل مکمل، مسائل تعادل برداری و نابرابری تغییراتی برداری مورد بحث قرار می‌گیرند.

# سپاس بی کران به درگاه حق...

که بی شک بدون لطف و یاری او نمی توان سرانجامی برای امور تصور کرد. خداوند را شاکرم که یگانه دستگیر و کمک رسان در تمامی لحظات زندگی ام بوده و مرا یاری نمود تا در بهترین مسیر زندگی یعنی فراگیری علم و دانش گام بردارم.

# تقدیم به آنان که فضای زندگی ام هستند...

**پدر** مهربانم که عالمانه به من آموخت که چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم. **مادر** مهربانم، دریای بی کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج است و وجودش برایم همه مهر، تقدیم به آن ها به پاس تمام دلواپسی ها، امیدها و آرزوهای بی پایانشان برای من. و تقدیم به **همسرم** همراه همیشه من در زندگی که وجودش مایه دلگرمی و آرامش من است. آن فرشته گانی که از خواسته هایشان گذشتند، سختی ها را به جان خریدند و خود را سپر بلای مشکلات و ناملایمات کردند تا من به جایگاهی که اکنون در آن ایستاده ام برسم.

برای آنان از خداوند متعال، سلامتی و هر آنچه خیر و نیکی است آرزومندم.

# سپاس گزاری...

در این جا وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد گرانقدر، جناب آقای دکتر جعفر زعفرانی، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعا بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید. و از استاد بزرگوار جناب آقای دکتر علی دانایی که مشورت با ایشان، همواره راهگشای اینجانب در طول این مقطع تحصیلی بوده است کمال تشکر را دارم.

مهدیه فرشیدزاد

تیرماه ۱۳۹۲

# چکیده

وجود مسائل تعادل در بسیاری از مسائل کاربردی از جمله بهینه‌سازی، مهندسی و اقتصاد محققان را برآن داشت که به مطالعه مسائل تعادل و اثبات نتایج کلی درمورد وجود جواب‌های مسائل تعادل و نابرابری تغییراتی بپردازند. در این پایان‌نامه درنظر داریم بااستفاده از شرایط یکنوایی تعمیم‌یافته و شرایط اضافی ضعیف به بررسی و تعمیم قضایای وجودی مسائل تعادل در حالت‌های غیرفشرده بپردازیم. هم‌چنین با تکیه بر اصل چسبندگی وضعیت انتخاب جواب را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و در ادامه به‌عنوان کاربردی از مسائل تعادل، نتایج وجودی مسائل نابرابری تغییراتی، مسائل مکمل، مسائل تعادل برداری و نابرابری تغییراتی برداری مورد بحث قرار می‌گیرند.

**واژگان کلیدی**

مسائل تعادل، توابع دو متغیره یکنوا و عملگرها، نابرابری تغییراتی، مسائل مکمل، اصل چسبندگی.

# فهرست مطالب


**۱ مفاهیم اولیه** **۴**

۱.۱ تعاریف و مفاهیمی از توپولوژی، آنالیز تابعی و بهینه‌سازی . . . . . . . . . . ۴

۲.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۱۲

**۲ قضایای وجودی مسائل تعادل** **۲۱**

۱.۲ نتایج وجودی مسائل تعادل برای توابع دو متغیره یکنوای تعمیم‌یافته . . . . . . ۲۲

۲.۲ رابطه اصل چسبندگی و وجود جواب مسائل تعادل . . . . . . . . . . . . . ۷۲

**۳ کاربرد مسائل تعادل در پیدا نمودن جواب‌های مسائل نابرابری تغییراتی** **۷۹**

۱.۳ قضایای وجودی مسائل نابرابری تغییراتی و مسائل مکمل در حالت‌های اسکالر ۸۰

۲.۳ قضایای وجودی مسائل تعادل برداری و نابرابری تغییراتی برداری . . . . . . . ۹۷

**مراجع** **۱۱۰**

**واژه‌نامه فارسی به انگلیسی** **۱۱۳**

**واژه‌نامه انگلیسی به فارسی** **۱۱۶**

# مقدمه

فرض کنید $X$ یک فضای برداری توپولوژی هاسدورف حقیقی با دوگان توپولوژی $X^*$ و $K$ زیرمجموعه‌ی محدب و غیرتهی از $X$ و تابع دومتغیره $f : K \times K \to \mathbb{R}$ باشد.

مسئله تعادل (EP) پیداکردن $\overline{x} \in K$ می‌باشد به‌قسمی که:

$$\forall y \in K, \quad f(\overline{x}, y) \geqslant 0.$$

و دوگان مسئله تعادل (DEP) پیدا کردن $\overline{x} \in K$ می‌باشد به‌قسمی که:

$$\forall y \in K, \quad f(y, \overline{x}) \leqslant 0.$$

مسائل تعادل از جمله مسائلی است که به‌طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته‌است و شامل مسائل بنیادی ریاضی ازجمله بهینه‌سازی، مسائل تعادل نش، مسائل نقطه ثابت، مسئله نابرابری تغییراتی، نابرابری مینی‌ماکس و مسائل مکمل می‌باشد. وجود مسائل تعادل در بسیاری از مسائل کاربردی مانند بهینه‌سازی، مهندسی، اقتصاد، مهندسان را بر آن داشت که به مطالعه مسائل تعادل و کاربرد آن در نابرابری تغییراتی بپردازند. این حقیقت در سال‌های اخیر چندین محقق را به پیداکردن و اثبات نتایج کلی در مورد وجود نقطه تعادل سوق داده‌است [۳۹، ۳۳، ۲۳، ۱۱، ۲].

با ادامه مطالعات محققان دریافتند که با افزودن شرایط اضافی می‌توانند از فشردگی $K$ صرف‌نظر کنند هم‌چنین از آن‌جا که فرض یکنوایی تابع به عنوان یک فرض معمول برای برقراری نتایج وجودی مسائل تعادل به حساب می‌آمد، مولفان دریافتند که با جایگزین کردن نوع معینی از یکنوایی تعمیم‌یافته می‌توانند این فرض محدودکننده را حذف کنند [۲۸، ۳۴، ۳۲، ۲۲، ۲۰، ۱۹، ۱۸، ۱۷، ۱۴، ۷، ۵].

به‌علاوه وجود جواب مسائل تعادل بدون درنظرگرفتن شرایط اضافی در دامنه توابع توسط

هاجیساواس [1] و آسل [2] [۳] آغاز شد و توسط بیانچی [3] و پینی [4] [۸] ادامه یافت.

هم‌چنین محققان جواب‌هایی از مسائل تعادل تحت عنوان جواب‌های چسبندگی که حدود جواب‌های مسائل تقریب محسوب می‌شود را در جهت گسترش تعادل در مسائل بهینه‌سازی مورد استفاده قرار دادند [۱].

در سال ۱۹۹۰ بسیاری از نتایج کلاسیک در مورد وجود جواب‌های نابرابری تغییراتی در زیرمجموعه‌های غیرفشرده‌ی $\mathbb{R}^n$ توسط هارکر [5] و پنگ [6] بیان شدند [۲۷]، و اولین‌بار وجود جواب‌های نابرابری تغییراتی یکنوانما توسط کاتل [7] و یو [8] ارایه گردید [۱۳].

یافته‌های اخیر برای نابرابری تغییراتی و مسائل مکمل [۱۵، ۱۱، ۱۳، ۹] به نگاشت‌های مجموعه‌مقدار یکنوانما در فضای توپولوژی هاسدورف موضعامحدب گسترش یافته‌اند.

در سال ۱۹۹۷ اتلی [9] روشی را برای وجود جواب مسائل نابرابری تغییراتی در حالت‌های برداری با استفاده از نتایج وجودی مسائل تعادل در حالت اسکالر ارایه نمود [۳۵]، و این روش توسط هاجیساواس [10] و شیبل [11] برای بدست آوردن نتایج وجودی مسائل تعادل برداری و نابرابری تغییراتی برداری مورد استفاده قرار گرفت [۶، ۲۵، ۲۶] .

در این پایان‌نامه قضایای وجودی مسائل تعادل، در حالت‌های غیرفشرده، که با توجه به شرایط یکنوایی تعمیم‌یافته، اثبات و گسترش داده شده است را بیان می‌کنیم. هم‌چنین با در نظر گرفتن توابع جریمه و با تکیه بر اصل چسبندگی وضعیت انتخاب جواب مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

سپس به‌عنوان کاربردی از مسائل تعادل، نتایج وجودی مسائل نابرابری تغییراتی و مسائل مکمل

---

[1] Hadjisavvas
[2] Aussel
[3] Bianchi
[4] Pini
[5] Harker
[6] Pini
[7] Kottle
[8] Yao
[9] Oetti
[10] Hadjisavvas
[11] Schaible

مورد بررسی قرار گرفته و تعمیم داده می‌شوند و در آخر قضایای وجودی مسائل تعادل برداری و مسائل نابرابری تغییراتی برداری مورد بحث قرار می‌گیرند.

این پایان‌نامه در سه فصل تدوین شده‌است.

فصل اول، شامل دو بخش می‌باشد. در بخش ۱.۱ به بیان تعاریف و مفاهیمی از توپولوژی، آنالیزتابعی و بهینه‌سازی می‌پردازیم و در بخش ۲.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی که به‌طور مشترک در فصل‌های دوم و سوم از آن‌ها استفاده می‌گردد را بیان می‌کنیم.

فصل دوم، شامل دو بخش می‌باشد. در بخش ۱.۲ نتایج و قضایای وجودی مسائل تعادل را برای توابع دومتغیره یکنوای تعمیم‌یافته مورد مطالعه قرار می‌دهیم و در بخش۲.۲ وضعیت انتخاب جواب را با تکیه بر اصل چسبندگی ارایه می‌نماییم.

فصل سوم، شامل دو بخش می‌باشد. در بخش ۱.۳ به بررسی قضایای وجودی مسائل نابرابری تغییراتی و مسائل مکمل در حالت اسکالر می‌پردازیم و در بخش ۲.۳ قضایای وجودی مسائل تعادل برداری و نابرابری تغییراتی برداری را مورد مطالعه قرارمی‌دهیم.

# فصل ۱
# مفاهیم اولیه

این فصل شامل دو بخش است. در بخش ۱.۱ به‌بیان تعاریف و مفاهیمی از توپولوژی، آنالیز تابعی و بهینه‌سازی می‌پردازیم، و در بخش ۲.۱ تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در فصل‌های دوم و سوم را بیان می‌کنیم.منابع اصلی در این فصل [۱۱، ۲۲، ۲۳، ۲۹، ۳۷]، می‌باشند.

## ۱.۱ تعاریف و مفاهیمی از توپولوژی، آنالیز تابعی و بهینه‌سازی

**تعریف ۱.۱.۱.** فرض کنید $X \neq \emptyset$ و $\tau \subset ۲^X$ (منظور از $\tau \subset ۲^X$ گردایه همه زیرمجموعه‌های $X$ است) به‌قسمی باشد که سه اصل زیر برقرار باشند:

۱. $\emptyset \in \tau$ ، $X \in \tau$

۲. هرگاه $E_\alpha \in \tau$ آن‌گاه $\cup_\alpha E_\alpha \in \tau$

۳. هرگاه $E_i \in \tau$ (به‌ازای $i = ۱, ۲, \cdots, n$ ) ، آن‌گاه $\cap_{i=۱}^{n} E_i \in \tau$

در این صورت $\tau$ یک فضای توپولوژی در $S$ است، عناصر $\tau$ به مجموعه‌های باز موسوم‌اند و جفت مرتب $\langle X, \tau \rangle$ یک فضای توپولوژیک نامیده می‌شود.

لم زیر بیانگر فشردگی فضای توپولوژی می‌باشد و لم فشردگی نامیده می‌شود.

**لم ۲.۱.۱.** *فضای توپولوژی $X$ فشرده است اگر و فقط اگر برای هر گردایه‌ی $F = \{F_i : i \in I\}$ از زیرمجموعه‌های بسته $X$ که دارای خاصیت مقطع باپایان است، داشته باشیم:* $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \emptyset$ .

**برهان.** [۴]

□

**تعریف ۳.۱.۱.** $\langle X, \tau\rangle$ یک فضای توپولوژیکی برداری نامیده می‌شود هرگاه:

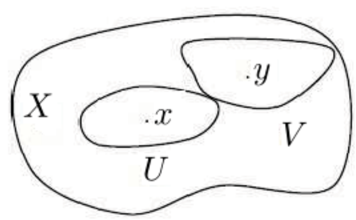
۱. نگاشت $x + y \longmapsto (x, y)$ از $X \times X$ به $X$پیوسته باشد.

۲. نگاشت $\lambda y \longmapsto (\lambda, y)$ از $\mathbb{R} \times X$ به $X$ پیوسته باشد.

یعنی اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر در بردار تحت توپولوژی $\tau$ پیوسته باشد.

**تعریف ۴.۱.۱.** دوگان فضای توپولوژیکی برداری $X$ را با $X^*$ نمایش می‌دهیم که شامل تمام توابع خطی و پیوسته روی $X$ است.

**تعریف ۵.۱.۱.** فضای توپولوژی $\langle X, \tau\rangle$ را هاسدورف گویند هرگاه برای هر $x, y \in X$ با $x \neq y$ دو مجموعه باز $U$ و $V$ وجود داشته باشند که $x \in U$ و $y \in V$ .




شکل ۱.۱: فضای هاسدورف

**تعریف ۶.۱.۱.** فرض کنید $\langle X, \tau\rangle$ یک فضای توپولوژی و $x \in X$ باشد. کلاس $\mathcal{U}$ از زیرمجموعه‌های $X$ یک همسایگی $x$ (نسبت به $\tau$ ) نامیده می‌شود اگر و فقط اگر مجموعه باز $O \in \tau$ موجود باشد

به‌قسمی که $x \in O \in \mathcal{U}$.

$\mathcal{N}_\tau(x)$ متشکل از همه این‌گونه همسایگی‌های $x$ دستگاه همسایگی‌های $x$ نامیده می‌شود.

**تعریف ۷.۱.۱.** رده $\beta$ از $\mathcal{N}_\tau(x)$ یک پایه همسایگی‌های $x$ نسبت به $\tau$ نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر $U \in \mathcal{N}_\tau(x)$، $V \in \beta$ موجود باشد به‌قسمی که $V \subset U$ .

**تعریف ۸.۱.۱.** فضای توپولوژیکی برداری $X$ موضعا محدب نامیده می‌شود هرگاه $X$ یک پایه از همسایگی‌های محدب حول ۰ باشد.

**تعریف ۹.۱.۱.** فرض کنید $X$ یک فضای توپولوژیک برداری با توپولوژی $\tau$ و دوگان $X^*$ باشد. اگر دوگان $X^*$ نقاط روی $X$ را جدا کند، (این اتفاق برای هر فضای موضعا محدب $X$ رخ می‌دهد.) که در آن

$$W(y_\circ;\varepsilon) = \{x \in X : |\langle y_\circ, x\rangle| < \varepsilon\}$$

حال $W = \sigma\langle X, X^*\rangle$، به‌صورت

$$\{W(y;\varepsilon) : y \in X^*, \quad \varepsilon > \circ\}$$

یک زیرپایه از دستگاه همسایگی ۰ در $X$ می‌باشد.آن‌گاه توپولوژی $W = \sigma\langle X, X^*\rangle$ را توپولوژی ضعیف از $X$ گوییم .

**تعریف ۱۰.۱.۱.** فرض کنید $X$ یک فضای توپولوژی برداری و به‌ازای هر $x_\circ \in X$ و $\varepsilon > \circ$ قرارمی‌دهیم:

$$W(x_\circ;\varepsilon) = \{y \in X^* : |\langle y, x_\circ\rangle| < \varepsilon\}$$

حال $W^* = \sigma\langle X^*, X\rangle$، به‌صورت

$$\{W(x;\varepsilon) : x \in X, \quad \varepsilon > \circ\}$$

یک زیرپایه از دستگاه همسایگی ۰ در $X^*$ می‌باشد. آن‌گاه $W^* = \sigma\langle X^*, X\rangle$ یک پایه توپولوژی *ضعیف از $X^*$ نامیده می‌شود.

**تعریف ۱۱.۱.۱.** فرض کنید $X$ یک فضای توپولوژی برداری و به‌ازای هر $x \in X$ و $\varepsilon > 0$ و هر زیرمجموعه کراندار غیرتهی $A \subset X$ قرار می‌دهیم:

$$U(A;\varepsilon) = \{y \in X^* : sup_{x\in A}|\langle y, x\rangle| < \varepsilon\}$$

آن‌گاه $\delta\langle X^*, X\rangle$ توپولوژی روی $X^*$ ، تعریف شده به صورت

$$\{U(A;\varepsilon) : \varepsilon > 0, \quad A \text{ زیرمجموعه ناتهی و کراندار از } X\},$$

یک پایه از دستگاه همسایگی ۰ می‌باشد که آن را توپولوژی قوی می‌نامیم.

**تذکر ۱۲.۱.۱.** *$X^*$ با توپولوژی $\delta\langle X^*, X\rangle$ یا $\sigma\langle X^*, X\rangle$ موضعا محدب است.*

**تعریف ۱۳.۱.۱.** فضای $(X, \|.\|)$ را نرم‌دار گوییم اگر تابعی مانند $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ موجود باشد به‌قسمی که به‌ازای هر $x, y \in X$ خواص زیر برقرار باشند:

۱. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

۲. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

۳. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

**تعریف ۱۴.۱.۱.** به یک فضای نرم‌دار که هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد فضای کامل یا باناخ گفته می‌شود.

**تعریف ۱۵.۱.۱.** اگر $X$ باناخ و نگاشت $J_X : (X, \|.\|) \longrightarrow (X^{**}, \|.\|)$ تعریف شده به‌صورت $J_X(x^*) = \langle x^*, x\rangle$ پوشا باشد، آن‌گاه $(X, \|.\|)$ یک فضای باناخ بازتابی است.

**تعریف ۱۶.۱.۱.** فضای توپولوژی $\langle X, \tau\rangle$ فشرده است اگر و فقط اگر هر پوشش باز $\langle X, \tau\rangle$ شامل زیرپوشش باپایان باشد.

**تعریف ۱۷.۱.۱.** $x$ یک عنصر درونی $A$ نامیده می‌شود هرگاه یک همسایگی $U$ از $x$ تماما واقع در $A$ موجود باشد. مجموعه‌ی همه عناصر درونی $A$ را درون $A$ می‌نامند و با $int(A)$ نمایش می‌دهند.

**تعریف ۱.۱.۱۸.** فرض کنید $\langle X, \tau\rangle$ یک فضای توپولوژیک و $A \subset X$ باشد. بستار $A$ عبارت است از

$$clA = \overline{A} = \bigcap \{F \subset X : \quad \text{بسته است.} F, \ \ A \subset F\}.$$

**تعریف ۱.۱.۱۹.** فرض کنید $\langle X, \tau\rangle$ یک فضای توپولوژیک باشد، در این صورت $x \in X$ یک نقطه حدی $A \subset X$ است اگر و فقط اگر $x \in U \in \tau$ ایجاب کند که $(U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ .

**تعریف ۱.۱.۲۰.** فرض کنید $X$ یک فضای برداری باشد، مجموعه $M \subset X$ آفین نامیده می‌شود هرگاه:

$$\forall x, y \in M, \ \forall \lambda \in \mathbb{R} : \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in M.$$

**تعریف ۱.۱.۲۱.** فرض کنید $X$ یک فضای توپولوژی برداری باشد،به‌ازای هر $x, y \in X$ بازه خطی بسته بین $x$ و $y$ را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in [0, 1]\} = [x, y],$$

و بازه خطی باز بین $x$ و $y$ را به صورت زیر می‌باشد:

$$\{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in (0, 1)\} = ]x, y[.$$

**تعریف ۱.۱.۲۲.** زیرمجموعه $X$ از $\mathbb{R}^n$ محدب نامیده می‌شود هرگاه:

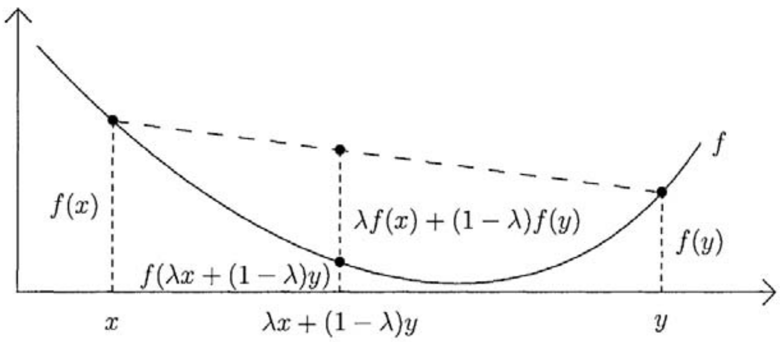
$$\forall x, y \in X, \quad \forall \lambda \in [0, 1] : \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in X.$$

**تعریف ۱.۱.۲۳.** اگر $X$ محدب باشد، آن‌گاه تابع $f : X \to \mathbb{R}$ محدب است هرگاه به‌ازای‌هر $x, y \in X$ و $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

**تعریف ۱.۱.۲۴.** اگر $X$ محدب باشد، آن‌گاه تابع $f : X \to \mathbb{R}$ شبه‌محدب است هرگاه:

$$\forall x, y \in X, \quad \forall \lambda \in [0, 1] : \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \max\{f(x), f(y)\}.$$



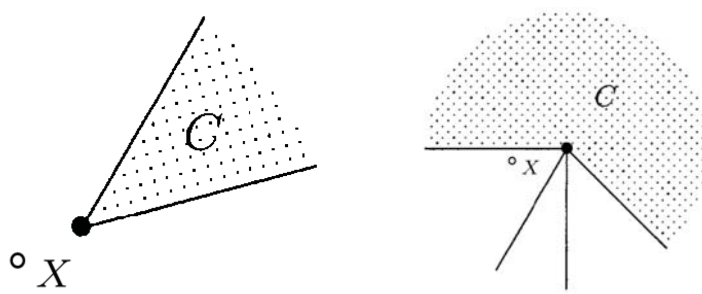

شکل ۱.۲: تابع محدب

**تعریف ۲۵.۱.۱.** تابع $f : X \to \mathbb{R}$ شبه‌مقعر است اگر و فقط اگر $-f$ شبه‌محدب باشد.

**تعریف ۲۶.۱.۱.** مجموعه $C \subseteq \mathbb{R}^n$ را مخروط گوییم هرگاه:

$$\forall \lambda \geq 0, \quad \forall x \in C \quad \Longrightarrow \lambda x \in C.$$

**تعریف ۲۷.۱.۱.** مخروط $C \subseteq \mathbb{R}^n$ را یک مخروط نوک‌دار گوییم هرگاه $C \cap (-C) = \{0\}$.




شکل ۱.۳: نمایش مخروط و مخروط نوک‌دار

**تذکر ۲۸.۱.۱.** *مخروط $C \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مخروط محدب است اگر و فقط اگر $C + C \subset C$.*

**تعریف ۲۹.۱.۱.** زیرمجموعه محدب و غیرتهی $B$ از مخروط محدب $C \neq \{0_X\}$ یک پایه مخروط $C$ نامیده می‌شود هرگاه هر $x \in C \setminus \{0_X\}$ نمایش یکتایی به فرم $x = \lambda b$، برای یک $\lambda > 0$ و $b \in B$ داشته باشد. یا به‌عبارت دیگر $B$ یک پایه مخروط $C$ است هرگاه $\bigcup_{\lambda \geqslant 0} \lambda B = C$ و $0 \notin clB$.

**تعریف ۳۰.۱.۱.** فرض کنید $X$ یک فضای توپولوژی برداری باشد، $C^*$ را قطبی مثبت مخروط $C \subseteq X$ گوییم هرگاه:

$$C^* = \{x^* \in X^* : \langle x^*, y\rangle \geqslant \circ, \quad \forall y \in C\}.$$

**تعریف ۳۱.۱.۱.** فرض کنید $X$ یک فضای توپولوژی برداری باشد، آن‌گاه تابع $f : X \to \mathbb{R}$ را نیم‌پیوسته بالایی ($usc$) گوییم هرگاه:

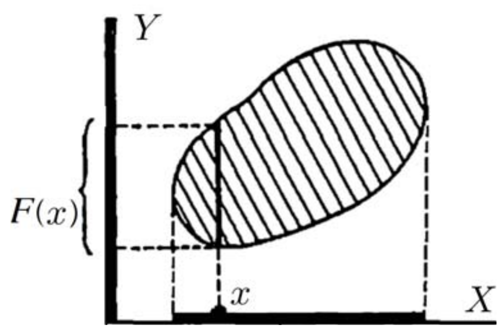
$$\limsup_{x \to x_\circ} f(x) \leqslant f(x_\circ).$$

**تعریف ۳۲.۱.۱.** تابع $f : X \to \mathbb{R}$ را نیم‌پیوسته پایینی ($lsc$) گوییم هرگاه:

$$\liminf_{x \to x_\circ} f(x) \geqslant f(x_\circ).$$

**تعریف ۳۳.۱.۱.** فرض کنید $K$ زیرمجموعه محدب از فضای توپولوژی برداری $X$ باشد تابع $f : K \to \mathbb{R}$ را نیم‌پیوسته بالایی گوییم هرگاه به‌ازای هر مقدار حقیقی $t$ مجموعه $\{x \in K : f(x) \geqslant t\}$ بسته باشد، و تابع $f : K \to \mathbb{R}$ را نیم‌پیوسته پایینی گوییم هرگاه به‌ازای هر مقدار حقیقی $t$ مجموعه $\{x \in K : f(x) \leqslant t\}$ بسته باشد.

**تعریف ۳۴.۱.۱.** نگاشت $F : X \to ۲^Y$ را یک نگاشت مجموعه مقدار گوییم هرگاه به‌ازای هر $x \in X$ ، $f(x) \subset Y$ باشد. (در اینجا $۲^Y$ خانواده همه زیرمجموعه‌های $Y$ می‌باشد.)



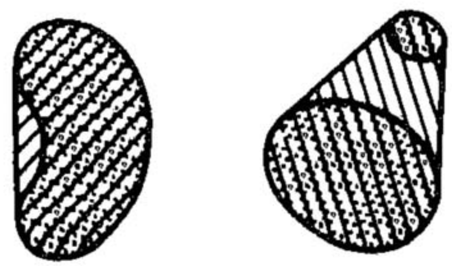

شکل ۴.۱: نگاشت مجموعه مقدار

**تعریف ۳۵.۱.۱.** اگر نگاشت $f$ از $X$ به $Y$ به‌قسمی باشد که $f(x)$ همواره تک‌عضوی باشد، نگاشت $f$ را تک‌مقداری می‌نامیم.

**تعریف ۳۶.۱.۱.** فرض کنید $X$ و $Y$ فضاهای توپولوژی باشند، نگاشت مجموعه مقدار $f : X \to ۲^Y$ نیم‌پیوسته بالایی نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x \in X$ و هر مجموعه باز $V$ شامل $f(x)$، مجموعه باز $U$ شامل $x$ موجود باشد به‌قسمی که برای هر $z \in U$ ،$f(z) \subset V$.

**تعریف ۳۷.۱.۱.** غلاف محدب مجموعه $K \subset X$ کوچکترین مجموعه محدب شامل $K$ می‌باشد و با CoK نشان داده می‌شود؛

$$\mathrm{CoK} = \{\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \quad \lambda_i \geqslant 0,\, \Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\, x_i \in K, n \in \mathbb{N}\}.$$



شکل ۵.۱: غلاف محدب

## ۲.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

درتمامی تعاریف این بخش مفروضات زیر را درنظر می‌گیریم:

۱. $X$ یک فضای توپولوژی برداری هاسدورف با دوگان توپولوژیکی $X^*$ است.

۲. $K$ زیرمجموعه غیرتهی و محدب از $X$ است.

**تعریف ۱.۲.۱.** تابع دومتغیره حقیقی مقدار $f : K \times K \to \mathbb{R}$ رادرنظربگیرید. مسئله تعادل $(EP)$ پیدا کردن $\overline{x} \in K$ است به‌قسمی‌که

$$\forall y \in K, \quad f(\overline{x}, y) \geqslant \circ,$$

و دوگان مسئله تعادل $(DEP)$ پیدا کردن $\overline{x} \in K$ است به‌قسمی‌که

$$\forall y \in K, \quad f(y, \overline{x}) \leqslant \circ.$$

**تذکر ۲.۲.۱.** *مجموعه جواب‌های مسئله تعادل را با $S_K$ و مجموعه جواب‌های دوگان مسئله تعادل را با $S_K^D$ نمایش می‌دهیم.*

اکنون مثال‌هایی از مسئله تعادل را بیان می‌کنیم:

**مثال ۳.۲.۱.** تابع $\psi : K \to \mathbb{R}$ را درنظر بگیرید مسئله مینیمم‌سازی $(M)$ پیدا کردن $\overline{x} \in K$ است به‌قسمی‌که

$$\forall y \in K, \quad \psi(\overline{x}) \leqslant \psi(y).$$

اگر قراردهیم

$$\forall x, y \in K, \quad f(x, y) = \psi(y) - \psi(x)$$

مسئله $(EP)$ و مسئله $(M)$ باهم معادل می‌شوند.