دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر
گروه ریاضی

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته
ریاضی محض ، گرایش توپولوژی (حلقه‌های توابع پیوسته)

عنوان

همریختی‌های بین حلقه‌های توابع پیوسته

استاد راهنما

دکتر فریبرز آذرپناه

استاد مشاور

دکتر مهرداد نامداری

پژوهشگر

علیرضا الفتی

تیر ۱۳۹۳

نام خانوادگی دانشجو: الفتی　　　　نام: علیرضا

عنوان: همریختی‌های بین حلقه‌های توابع پیوسته

استاد راهنما: دکتر فریبرز آذرپناه

استاد مشاور: دکتر مهرداد نامداری

مقطع تحصیلی: دکتری　رشته: ریاضی محض　گرایش: توپولوژی (حلقه‌های توابع پیوسته)

دانشگاه: شهید چمران اهواز　　　　دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

تاریخ فارغ‌التحصیلی: تیر ۱۳۹۳　　　　تعداد صفحات: ۱۴۲

واژگان کلیدی: عدد حجره ای، چگال-تفکیک پذیر، ایدآل اساسی، F-فضا، بعد گلدی، بستار صحیح، صحیحاً بسته، زیر حلقه ماکسیمال، P-ایدآل، شبه گسسته، P_∞-فضا، حلقه خارج قسمت‌ها، حلقه خود-انژکتیو، ایدآل تفکیک پذیر، σ-فشرده، ایدآل قویاً تفکیک پذیر، η_1- مجموعه، حلقه ارزیابی

چکیده

در این رساله در ابتدا ساختار درونی همریختی‌های میان حلقه‌های توابع پیوسته مورد مطالعه قرار گرفته است. با در نظر گرفتن این نکته که هر همریختی بین حلقه‌های توابع پیوسته با یک تابع پیوسته تولید می‌گردد اطلاعات مهمی از این نوع همریختی‌ها در اختیارمان قرار خواهد گرفت. یک کمیت بسیار مهم در یک همریختی حلقه ای، هسته آن همریختی است. نشان داده شده است که برای همریختی حلقه ای $\phi : C(X) \longrightarrow C(Y)$، هسته ϕ شکل ویژه ای دارد. به عبارت دیگر زیر مجموعه $A \subseteq \upsilon X$ وجود دارد به طوری که $Ker(\phi) = M^A$. همچنین هر ایدآل بسته که واجد این شرط باشد، هسته یک همریختی از حلقه $C(X)$ به توی یک حلقه توابع پیوسته خواهد بود (ر.ک. ۵.۲.۱). سپس با استفاده از نتایج بدست آمده در مورد این نوع همریختی‌ها شرط لازم و کافی برای اینکه برای ایدآل I در $C(X)$، حلقه خارج قسمتی $\frac{C(X)}{I}$ با یک حلقه توابع پیوسته یکریخت باشد، بدست آمده است (۷.۲.۱). به عنوان یک مثال خاص نشان داده شده است که شرط لازم و کافی برای این که حلقه $\frac{C(X)}{C_F(X)}$ در یک حلقه توابع پیوسته نشانده شود این است که مجموعه نقاط منفرد فضای X متناهی باشد. ادامه این بررسی‌ها به

یافتن زیر حلقه‌هایی از $C(X)$ که با یک حلقه توابع پیوسته یکریخت هستند اختصاص داده شده است. نتیجه اساسی که در بسیاری از قسمت‌های فصل سوم نمود بسیاری خواهد داشت ۷.۳.۱ می‌باشد. در ادامه کمی رویکرد خود را تعمیم داده و به بحث و بررسی در مورد زیر حلقه‌های خاصی در حلقه $C(X)$ پرداخته ایم. در واقع ادامه این اثر از دو بخش عمده تشکیل شده است. در بخش اول ایدآلهای $C(X)$ خود به عنوان یک حلقه مطرح خواهند شد. در بررسی ایدآل‌ها به عنوان یک حلقه، بسیاری از روش‌ها که در مورد حلقه $C(X)$ مفید می‌باشند، از قابلیت کافی برخوردار نخواهند بود. همچنین لزوماً ایدآل‌های واقع در یک ایدآل در $C(X)$ تشکیل یک ایدآل نمی‌دهند. در ابتدای این بخش به شناسایی ایدآل‌هایی پرداخته شده است که هر ایدآل در آن‌ها، ایدآلی (z-ایدآلی) از $C(X)$ می‌باشد. با استفاده از این توصیف، نتایجی در ارتباط با P-ایدآل‌ها بدست خواهند آمد و برخی ارتباط های میان ایدآل‌های کراندار نظیر $C_K(X)$ و $C_\psi(X)$ با $C_F(X)$ (ساکل حلقه $C(X)$) را مشاهده خواهیم کرد. زیر حلقه $C_F^\infty(X)$ را تعریف کرده و با استفاده از آن نشان می‌دهیم که $C_\infty(X)$ یک حلقه منظم است اگر و تنها اگر بر حلقه $C_F^\infty(X)$ منطبق گردد. همچنین نشان می‌دهیم که این گزاره معادل است با این که هر زیر مجموعه باز، موضعاً فشرده و σ- فشرده، متناهی است(بهبودی از یک نتیجه در [۲].) در ادامه نشان داده شده است که برای هر ایدآل در حلقه $C(X)$، مجموع دو ایدآل اول در آن ایدآل، یک ایدآل اول است اگر و تنها اگر X یک F-فضا باشد. لذا مشاهده می‌کنیم که اگر X یک F فضا نباشد، همواره ایدآلی در $C(X)$ وجود دارد که دارای دو ایدآل اول با مجموعِ غیر اول می‌باشد. با در نظر گرفتن ایدآل‌های ماکسیمال در ایدآل I، مفهوم تفکیک پذیری را به ایدآل‌ها تعمیم داده ایم و نشان داده ایم که تفکیک پذیری ایدآل I معادل است با چگال-تفکیک پذیری فضای $\beta X \setminus \theta(I)$. همچنین به بررسی ارتباط این مفهوم با P-ایدآل‌ها پرداخته ایم. انتهای این بخش را به بعد گلدیِ یک ایدآل اختصاص داده ایم. نشان داده شده است که بعد گلدی ایدآل I با عدد حجره ای فضای توپولوژی $X \setminus \Delta(I)$ برابر است.

بخش محوری این رساله، فصل سوم می‌باشد. در این قسمت به بررسی زیر حلقه‌هایی خواهیم پرداخت که از لحاظ ظاهر به ایدآل‌ها نزدیک هستند، اما دارای نسخه ای از $\mathbb{R}$ نیز می‌باشند. این حلقه‌ها به صورت $I+\mathbb{R}$ هستند. در ابتدا به بحث و بررسی ویژگی‌های کلی زیر حلقه هایی از این رسته خواهیم پرداخت. ویژگی‌هایی را بررسی می‌کنیم که می‌توان یا نمی‌توان همواره میان $C(X)$ و $I+\mathbb{R}$ مشترک ساخت. خواهیم دید که ایدآل I در $C(X)$ وجود دارد به طوری که زیر حلقه $I+\mathbb{R}$ دارای دو ایدآل اول (z-ایدآل) با مجموع غیر اول (غیر z-ایدآل) است اگر و تنها اگر X یک F-فضا **نباشد**. با این وجود نشان می‌دهیم در فضای توپولوژی کاملاً منظم و دلخواه X، برای هر z-ایدآلِ I در $C(X)$، مجموع هر دو z-ایدآل (ایدآل اول) در $I+\mathbb{R}$،

یک z-ایدآل (ایدآل اول) است. همچنین برای هر ایدآل I در $C(X)$، حلقه $I + \mathbb{R}$ نیز همانند $C(X)$، یک PM^+- حلقه است. پس از بررسی ویژگی‌های آشنا بر این زیر حلقه، هدف مان معطوف به بررسی و تخمین فاصله حلقه $I + \mathbb{R}$ از $C(X)$ با معیارهای جبری خواهد شد. اولین معیار بررسی این گزاره است که زیر حلقه $I + \mathbb{R}$ یک زیر حلقه ماکسیمال است اگر و تنها اگر $x, y \in \upsilon X$ وجود داشته باشند به طوری که $I = M^x \cap M^y$. همچنین نشان داده شده است که برای $p \in \beta X \setminus \upsilon X$، بستار زیر حلقه $M^p + \mathbb{R}$ در توپولوژی یکنواخت هرگز در یک زیر حلقه ماکسیمال از $C(X)$ واقع نمی‌شود. بنابراین برای هر $p \in \beta X$، زیرحلقه $C(X \cup \{p\})$ هیچ گاه مشمول در یک زیر حلقه ماکسیمال از $C(X)$ نمی‌باشد. این نکته ما را به این نتیجه جالب هدایت می‌کند که برای $p \in \beta X \setminus \upsilon X$، حلقه $C(X)$ به عنوان یک $C(X \cup \{p\})$- جبر، هرگز دارای مولد شمارا نیست. معیار بعدی در این بررسی مفهوم بستار جبری است. نشان می‌دهیم که حلقه $C(X)$ روی زیر حلقه $I + \mathbb{R}$ صحیح است اگر و تنها اگر $C(X)$ به عنوان یک $(I + \mathbb{R})$- جبر با مولد شمارا باشد و همچنین اگر و تنها اگر زیر مجموعه متناهی $A \subseteq \upsilon X$ وجود داشته باشد به طوری که $I = M^A$. در ادامه نشان داده شده است که زیر حلقه $I + \mathbb{R}$ در $C(X)$ بسته جبری است اگر و تنها اگر I یک ایدآل نیم اول و $\theta(I)$ زیر مجموعه ای همبند از βX باشند. این قضیه ما را به این نتیجه هدایت می‌کند که برای z-ایدآل I در $C(X)$ با این ویژگی که $\theta(I)$ دارای تعداد متناهی مولفه همبندی باشد، بستار زیر حلقه $I + \mathbb{R}$ در $C(X)$ شکلی ملموس خواهد داشت. در انتها با استفاده از مفهوم حلقه‌های خارج قسمت‌ها، نظر خود را معطوف به این پرسش خواهیم کرد که چه وقت حلقه $C(X)$ یک حلقه خارج قسمت‌ها از $I + \mathbb{R}$ است؟ نشان می‌دهیم که اگرچه $C(X)$ همواره یک حلقه خارج قسمت‌ها از $I + \mathbb{R}$ نمی‌باشد، زیر حلقه‌ای از $C(X)$ که خود با یک $C(Y)$ یکریخت است وجود دارد به طوری که همواره یک حلقه خارج قسمت‌ها از $I + \mathbb{R}$ است. در نهایت این نتیجه ما را به این سوال که چه وقت حلقه $I + \mathbb{R}$ خود-انژکتیو است رهنمون می‌کند.

این اثر هر چند ناچیز را به سه شخصیت بزرگ در زندگی‌ام تقدیم می‌دارم:

استاد ارجمند جناب آقای دکتر فریبرز آذرپناه،
پدر بزرگوارم جناب آقای محمد رضا الفتی،
و مادر مهربانم سرکار خانم زهرا حقیقت طلب.

فهرست مطالب

پیشگفتار

از زمانی که تحقیقات در حلقه‌های توابع پیوسته توسط هیویت [1] در [۴۴] آغاز گشت حدود هفت دهه می گذرد. ابتدا تلاش‌ها معطوف به یافتن پل‌های ارتباطی میان ویژگی‌های توپولوژیک فضای X و خواص جبری حلقه $C(X)$ بود. با ورود بزرگانی چون هنریکسن [2]، گیلمن [3] و جریسون [4] به این وادی، مطالعات در این شاخه به شکل مدون تری انجام پذیرفت. نشان داده شده بود که شکل ایدآل‌های ماکسیمال در این حلقه به نحوی محار شدنی قابل توجیه است. اما هر چه بررسی‌ها در این حلقه پیشرفت بیشتری می‌کرد، پیچیدگی در توجیح ایدآل‌های اول این حلقه نمود بیشتری می‌یافت. به این نکته پی برده شد که ایدآل‌های اول در این حلقه از لحاظ نحوه توزیع و دارا بودن شکلی ویژه از الگوی خاصی پیروی نمی کند. به عنوان مثال در میان دو ایدآل اول در این حلقه که یکی مشمول در دیگری است حداقل می‌توان به تعداد $\aleph_1$ ایدآل اول درج نمود. بنابراین بعد کرول در این حلقه یا صفر است و یا نا شمارا. همچنین در این حلقه مجموع دو ایدآل اول یک z-ایدآل اول و یا کل حلقه است. از این دست ویژگی‌ها در این حلقه، بسیار می‌توان سراغ گرفت. برای درک بهتر این حلقه و ویژگی‌های ساختاری آن، مرجع [۳۸] بسیار مفید خواهد بود. شاید این ویژگی‌های اغوا کننده در این حلقه محققان این شاخه را به این سمت سوق داد تا به بررسی این ویژگی‌ها در حلقه‌هایی متمایز از $C(X)$ بپردازند. محققانی چون کونتسا [5] و دی مارکو [6] برخی

---

[1] Hewitt
[2] Henriksen
[3] Gillman
[4] Jerison
[5] Contessa
[6] De Marco

از ویژگی‌هایی را که در نحوه توزیع ایدآل‌های اول $C(X)$ وجود دارند دستمایه تعمیم به حلقه‌های مجردتر کردند. کارهای آنها در [۱۸]، [۱۹]، [۲۰] و [۲۳] به بررسی این نوع حلقه‌ها می‌پردازد. محققانی نظیر بیون [۷]، واتسون [۸]، ردلین [۹]، دومینگوئِز [۱۰] و مولِرو [۱۱] در [۱۵]، [۱۶]، [۳۳]، [۷۵] و [۷۶] به مطالعه زیر حلقه‌های حلقه‌های توابع پیوسته پرداختند. در اکثر این مطالعات زیر حلقه‌ها به گونه ای در نظر گرفته می‌شدند که شامل $C^*(X)$ باشند. یکی از پیامدهای این نکته ظاهر شدن اکثر ویژگی‌های حلقه $C(X)$ در این نوع زیر حلقه‌ها بود. اما کار تحقیقاتی حاضر در این رساله با این هدف آغاز شد که با استفاده از همریختی‌های میان حلقه‌های توابع پیوسته به بررسی زیر حلقه هایی از $C(X)$ بپردازیم که یا با یک حلقه توابع پیوسته یکریخت هستند و یا نیستند. در این مرحله رهیافتی دو گانه را در پیش گرفتیم. ابتدا نظر خود را معطوف به مطالعه ساختار یک همریختی حلقه ای میان حلقه‌های توابع پیوسته نمودیم. مشاهده خواهیم کرد که برای همریختی حلقه ای $\phi : C(X) \longrightarrow C(Y)$، $Ker(\phi)$ یک z-ایدآل قوی است. اما دامنه انتخاب این z-ایدآل قوی محدود می‌باشد. یعنی نشان داده‌ایم که $A \subseteq \upsilon X$ وجود دارد به طوری که $Ker(\phi) = M^A$. با استفاده از این ویژگی شرط لازم و کافی برای این که برای ایدآل I در حلقه $C(X)$ حلقه خارج قسمتی $\frac{C(X)}{I}$ با یک $C(Y)$ یکریخت باشد را بدست آورده ایم. همچنین نشان داده شده است که اگر فضای کاملاً منظم X دارای تعداد نامتناهی نقطه منفرد باشد، هیچ گاه $\frac{C(X)}{C_F(X)}$ در یک حلقه توابع پیوسته نشانده نخواهد شد. به عنوان یک مثال خاص برای مجموعه نامتناهی X، هیچ گاه حلقه $\frac{\prod_{x\in X}\mathbb{R}_x}{\oplus_{x\in X}\mathbb{R}_x}$ با یک حلقه توابع پیوسته یکریخت نیست. این نتایج را در بخش دوم از فصل اول گنجانده ایم. بعد از مطالعه ساختار درونی همریختی‌های میان حلقه‌های توابع پیوسته به کند و کاو در مورد زیر حلقه های خاصی از $C(X)$ که خود با یک حلقه توابع پیوسته یکریخت هستند، پرداخته ایم. کار اولیه با

[۷] Byun
[۸] Watson
[۹] Redlin
[۱۰] Dominguez
[۱۱] Mulero

این مثال ساده آغاز شد که برای $x, y \in X$ زیر حلقه $A_{x,y} = \{f \in C(X) : f(x) = f(y)\}$ خود با یک حلقه توابع پیوسته یکریخت است. در واقع اگر $\{x, y\}$ را به عنوان یک نقطه از فضای توپولوژی خارج قسمتی $X/\{x, y\}$ در نظر بگیریم، می‌توان نشان داد که $A_{x,y} \cong C(X/\{x, y\})$. با نگاهی عمیق‌تر به این زیر حلقه در می‌یابیم که $A_{x,y} = M_x \cap M_y + \mathbb{R}$. پس می‌توان این سوال را مطرح ساخت که آیا برای ایدآل I در حلقه $C(X)$ زیر حلقه $I + \mathbb{R}$ با یک حلقه توابع پیوسته یکریخت می‌باشد؟ در بخش سوم از فصل اول نشان داده شده است که همواره این طور نیست که $I + \mathbb{R}$ با یک حلقه توابع پیوسته یکریخت باشد. اما اگر بستار این زیر حلقه را در توپولوژی یکنواخت روی $C(X)$ در نظر بگیریم آنگاه شکل اعضای زیر حلقه $I^u + \mathbb{R}$ به نحو ملموسی قابل توجیه است. لم ۵.۳.۱ و نتیجه ۷.۳.۱ به توصیف این زیر حلقه و این که این زیر حلقه همواره با یک حلقه توابع پیوسته یکریخت می‌باشد پرداخته است. این نتیجه شرط لازم و کافی برای این که زیر حلقه $I + \mathbb{R}$ با یک حلقه توابع پیوسته یکریخت باشد را به دست می‌دهد. زیر حلقه $I^u + \mathbb{R}$ در طرح و بررسی چند پرسش در فصل سوم بسیار راه گشا خواهد بود. در این مقطع متوجه شدیم که جای خالی بررسی های عمیق‌تر جبری بر زیر حلقه هایی به شکل $I + \mathbb{R}$ در حلقه $C(X)$ احساس می‌شود. لذا بر آن شدیم تا به مطالعه ساختار این نوع زیر حلقه ها در $C(X)$ بپردازیم. با توجه به اهمیت این موضوع فصل سوم را به بحث و بررسی در مورد زیر حلقه‌هایی به صورت $I + \mathbb{R}$ اختصاص داده ایم. در بخش دوم از این فصل ویژگی‌های مقدماتی حلقه $I + \mathbb{R}$ مورد بررسی قرار گرفته است. یک نکته کوچک ایده اصلی شکل گیری قسمت اعظم این فصل می‌باشد و آن این است که برای ایدآل I در حلقه $C(X)$، $I + \mathbb{R} = C(X)$ اگر و تنها اگر I یک ایدآل ماکسیمال حقیقی در $C(X)$ باشد. این نکته باعث شد تا این پرسش به ذهن خطور کند که فاصله زیر حلقه $I + \mathbb{R}$ از $C(X)$ چقدر است. در ابتدا شاید مفهوم فاصله کمی مبهم باشد. اما مقصود ما از فاصله با به کار گیری مفاهیم جبری که این دو زیر حلقه را با هم مرتبط می‌سازند روشن تر می‌گردد. قبل از این که به مطالعه ایده فاصله با تعبیرهای مختلف جبری بپردازیم به بررسی ویژگی‌های آشنای حلقه $C(X)$ در این نوع حلقه‌ها

پرداخته ایم. در بخش سوم از این فصل ابتدا نشان داده ایم که زیر حلقه $I+\mathbb{R}$ یک PM^+- حلقه است. یعنی مانند حلقه $C(X)$ اگر دو ایدآل اول در $I+\mathbb{R}$ شامل یک ایدآل اول مشترک باشند این دو ایدآل نیز با هم قابل قیاس هستند. سپس نشان داده شد که اگر X یک F-فضا نباشد، همواره ایدآلی چون I در $C(X)$ وجود دارد به طوری که در زیر حلقه $I+\mathbb{R}$ دو ایدآل اول با مجموع غیر اول وجود دارند. در ادامه نشان داده شد که هر z-ایدآل در $I+\mathbb{R}$ حاصل تحدید یک z-ایدآل از حلقه $C(X)$ است. همچنین نشان داده شد که اگر X یک F-فضا نباشد، آنگاه ایدآلی چون I در $C(X)$ وجود دارد به طوری که مجموع دو z-ایدآل در حلقه $I+\mathbb{R}$ لزوماً یک z-ایدآل نمی‌باشد. اما این اتفاقات نابه هنجار زمانی که I یک z-ایدآل در $C(X)$ باشد روی نخواهد داد. یعنی اگر I یک z-ایدآل در $C(X)$ باشد، همواره مجموع دو (z-ایدآل) ایدآل اول در $I+\mathbb{R}$ یک (z-ایدآل) ایدآل اول می‌باشد. در انتها نیز نشان داده ایم که شرط لازم و کافی برای این که حلقه $I+\mathbb{R}$ یک حلقه منظم فون نویمان باشد این است که برای هر $f\in I$، $Z(f)$ در X باز باشد. به عبارت دیگر I باید یک P-ایدآل باشد. در این قسمت از بخش چهارم به بررسی فاصله حلقه $I+\mathbb{R}$ از $C(X)$ با ابزارهای جبری پرداخته ایم. پیش تر اشاره شد که شاید اولین توجه ما به زیر حلقه‌هایی به شکل $A_{x,y}$ بود. وچتوموف در [۸۶] نشان داده بود که بین این زیر حلقه و حلقه $C(X)$ هرگز نمی‌توان زیر حلقه ای سره درج نمود. پس در این جا دو سوال مطرح می‌شود. یکی این که چه موقع زیر حلقه $I+\mathbb{R}$ یک زیر حلقه ماکسیمال است؟ و دیگری این که با توجه به این نکته که

$$A_{x,y}=M_x\cap M_y+\mathbb{R},$$

آیا می‌توان دامنه انتخاب نقاط x و y را به زیر مجموعه ای گسترده تر در βX گسترش داد؟ در پاسخ به سوال اول نشان داده ایم که شرط لازم و کافی برای این که زیرحلقه $I+\mathbb{R}$ در $C(X)$ ماکسیمال باشد این است که $x,y\in \upsilon X$ وجود داشته باشند به طوری که $I=M^x\cap M^y$. این نکته پاسخ به سوال دوم را نیز در بر خواهد داشت. در آنجا نشان داده ایم که دامنه انتخاب نقاط x و y باید فقط مجموعه υX باشد(ر.ک. ۳.۴.۳).

در ادامه با به کار گیری مفهوم حلقه‌های ارزیابی به این سوال پاسخ داده شده است که برای هر $p \in \beta X \setminus \upsilon X$ نه تنها زیر حلقه $C(X \cup \{p\}) \cong [M^p]^u + \mathbb{R}$ هرگز یک زیر حلقه ماکسیمال در $C(X)$ نمی‌باشد، بلکه حتی در یک زیر حلقه ماکسیمال قرار نخواهد داشت. این نکته حاکی از آن است که حلقه $C(X)$ هیچ گاه به عنوان یک $C(X \cup \{p\})$- جبر دارای مولد متناهی نیست. حتی قدمی از این هم فراتر نهاده و نشان دادیم که $C(X)$ در این حالت به عنوان یک $C(X \cup \{p\})$- جبر حتی دارای مولد شمارا نمی‌باشد. لذا برای هر $p \in \beta X$ یا $C(X)$ به عنوان $C(X \cup \{p\})$- جبر با مولد متناهی است و یا با مولد ناشمارا.

اکنون دوباره به حالتی که $I + \mathbb{R} = C(X)$ باز می‌گردیم. در زبان چند جمله‌ایها توصیف این حالت به این می‌ماند که برای ایدآل I در $C(X)$ هر تابع $f \in C(X)$ ریشه یک چند جمله ای تکین درجه اول با ضریب ثابت در $I + \mathbb{R}$ است اگر و تنها اگر I یک ایدآل ماکسیمال حقیقی در $C(X)$ باشد. در بخش پنجم کمی این دید را وسعت خواهیم بخشید. به این پرسش خواهیم پرداخت که چه وقت هر تابع در $C(X)$ ریشه یک چند جمله ای تکین با ضرایب در $I + \mathbb{R}$ می‌باشد؟ به عبارت دیگر چه وقت حلقه $C(X)$ روی $I + \mathbb{R}$ صحیح خواهد بود؟ برای پاسخ به این پرسش لم **۲.۵.۳** بسیار مفید خواهد بود. در واقع در اینجا شناخت ماهیت اعضای حلقه $I^u + \mathbb{R}$ نقشی اساسی ایفا می‌کند. در نهایت نشان داده شده است که صحیح بودن حلقه $C(X)$ روی زیر حلقه $I + \mathbb{R}$ معادل است با این که $C(X)$ یک $(I+\mathbb{R})$- جبر با مولد شمارا باشد. یکی دیگر از معادل‌های این گزاره این است که زیر مجموعه متناهی $A \subseteq \upsilon X$ وجود داشته باشد به طوری که $I = M^A$. یکی از پیامدهای مهم این قضیه این است که اگر $C(X)$ به عنوان $(I+\mathbb{R})$- جبر با مولد شمارا باشد، در این صورت با مولد متناهی خواهد بود. به طور مثال اگر P یک ایدآل اول غیر ماکسیمال در $C(X)$ باشد، حلقه $C(X)$ به عنوان $(P+\mathbb{R})$- جبر با مولد ناشمارا است. در حالت کلی اگر I به صورت اشتراک تعداد متناهی ایدآل ماکسیمال حقیقی نباشد، همواره $C(X)$ یک $I+\mathbb{R}$- جبر با مولد نا شمارا است. در ادامه نشان داده شده است که برای فضای غیر شبه فشرده X و هر ایدآل کراندار I در $C(X)$،

$(I \subseteq C_\psi(X))$، حلقه $C(X)$ هیچ گاه روی $I+\mathbb{R}$ صحیح نیست. همچنین نشان داده شد که اگر X شبه فشرده باشد، حلقه $C(X)$ روی $C_F(X)+\mathbb{R}$ صحیح نمی‌باشد. یک نتیجه از این مطلب این است که برای فضای کاملاً منظم و نامتناهی X همواره $C(X)$ یک $(C_F(X)+\mathbb{R})$- جبر با مولد ناشمارا است. در ادامه این بخش با توجه به این که هر دو ابزار صحیح بودن و ماکسیمال بودن یک زیر حلقه را در دست داریم، برای فضای فشرده X تمام زیر جبرهای ماکسیمال $C(X)$ را که شامل $\mathbb{R}$ هستند مشخص خواهیم کرد. به عبارت دیگر نشان می‌دهیم که برای زیر جبر ماکسیمال $\mathbb{R} \subseteq A$ از $C(X)$، $x, y \in X$ با شرط $x \neq y$ وجود دارند به طوری که $A = A_{x,y}$. این پاسخ تا حدودی صحت حدس وچتوموف در [۸۶] را تصدیق می‌کند. اما باید اذعان داشت که تا کنون نتوانسته ایم حدس وچتوموف را در حالت کلی به اثبات برسانیم. یعنی این سوال که شکل زیر حلقه‌های ماکسیمال $C(X)$ در حالت کلی به چه صورت است باز مانده است.

در بخش ششم به مسئله بستار صحیح زیر حلقه $I+\mathbb{R}$ در $C(X)$ می‌پردازیم. قضیه محوری این بخش به این پرسش پرداخته است که شرط لازم و کافی برای این که زیر حلقه $I+\mathbb{R}$ در $C(X)$ به طور صحیح بسته باشد چیست؟ خواهیم دید که زیر حلقه $I+\mathbb{R}$ در $C(X)$ به طور صحیح بسته است اگر و تنها اگر I یک ایدآل نیم اول و $\theta(I)$ یک مجموعه همبند در βX باشند. به عنوان مثال برای $p \in \beta X \setminus \upsilon X$، زیر حلقه $M^p+\mathbb{R}$ یک زیر حلقه سره و به طور صحیح بسته در $C(X)$ است. در ادامه با کمک این قضیه برای z-ایدآل I در $C(X)$ به طوری که $\theta(I)$ شامل تعداد متناهی مولفه همبندی است، بستار صحیح زیر حلقه $I+\mathbb{R}$ در $C(X)$ را محاسبه می‌کنیم. به عنوان مثال برای زیر مجموعه متناهی $A \subseteq \beta X$، بستار صحیح زیر حلقه $O^A+\mathbb{R}$ عبارت است از $\cap_{p\in A}(O^p+\mathbb{R})$. این بخش را با تاکید به این نکته که هنوز الگوریتم کامل تری نیافته ایم تا ایدآل‌هایی با کلیت بیشتر از z-ایدآل‌ها را در بر گیرد، خاتمه می‌دهیم. بخش آخر این فصل را به بررسی حلقه‌های خارج قسمت های $I+\mathbb{R}$ اختصاص داده ایم. یادآوری می‌کنیم که منظورمان از یک حلقه خارج قسمت‌ها برای یک حلقه، به مفهوم جامع آن که توسط یوتومی مطرح شد اشاره دارد. هدفی که در این بخش به

دنبال تحقق آن هستیم این است که آیا برای حلقه $I+\mathbb{R}$ می‌توان یک حلقه خارج قسمت‌ها که خود با یک $C(Y)$ یکریخت است یافت؟ اگر بتوان پاسخی برای این پرسش یافت به شرط لازم و کافی برای این که حلقه $I+\mathbb{R}$ یک حلقه خود-انژکتیو باشد نزدیک خواهیم شد [۱۲]. اما باید تاکید شود که این یک هدف فرعی در این رساله است. ما بیشتر با این تعبیر به مفهوم حلقه خارج قسمت‌ها برای حلقه $I+\mathbb{R}$ می‌نگریم که می‌توان آن را به نوعی یک معیار جبری برای مشخص نمودن میزان دوری یک حلقه از یک زیر حلقه دانست. در قضیه ۵.۷.۳ نشان داده ایم که همواره این طور نیست که برای ایدآل I در حلقه $C(X)$، این حلقه یک حلقه خارج قسمت‌ها برای $I+\mathbb{R}$ باشد. به عبارت دیگر شرط لازم و کافی برای این که $C(X)$ یک حلقه خارج قسمت‌ها برای $I+\mathbb{R}$ باشد را در قضیه ۵.۷.۳ آورده ایم. اما با این که همواره $C(X)$ یک حلقه خارج قسمت‌ها برای $I+\mathbb{R}$ نیست در قضیه ۱.۷.۳ نشان داده ایم که زیر حلقه ای از $C(X)$ که خود با یک $C(Y)$ یکریخت است وجود دارد به طوری که یک حلقه خارج قسمت‌ها برای $I+\mathbb{R}$ باشد. این قضیه به نوبه خود یک نتیجه جالب را در بر دارد و آن این که با استفاده از این قضیه شرط لازم و کافی برای خود-انژکتیو بودن زیر حلقه $I+\mathbb{R}$ را در ۲.۷.۳ مشاهده خواهیم کرد. به عنوان یک مثال از این نتیجه نشان می‌دهیم که شرط لازم و کافی برای خود-انژکتیو بودن حلقه $C_F(X)+\mathbb{R}$ این است که مجموعه نقاط منفرد X متناهی باشد. همچنین به این نکته نیز اشاره خواهیم کرد که اگر هر دو نقطه $x,y\in X$ نامنفرد باشند، زیر حلقه ماکسیمال $A_{x,y}$ هیچ گاه خود-انژکتیو نیست. با توجه به این که حلقه‌های خارج قسمت‌ها در شناسایی ایدآل‌های اساسی نقشی موثر دارند انتهای این بخش را به یافتن شرط لازم و کافی برای این که زیر حلقه $I+\mathbb{R}$ دارای تنها یک ایدآل ماکسیمال اساسی باشد اختصاص داده ایم. قضیه ۱.۷.۳ در تحلیل این موضوع کاربردی اساسی دارد. نکات بیان شده تا به این جا ایده اصلی یک قسمت از این رساله را در بر می‌گیرد که در فصل‌های اول و سوم گنجانده شده اند.

تا به اینجا اکثر مطالب به زیر حلقه $I+\mathbb{R}$ اختصاص داده شده است. وجود یک زیر حلقه

[۱۲] زیرا شرط لازم و کافی برای خود-انژکتیو بودن یک حلقه توابع پیوسته در دست می‌باشد.

یکریخت با یک $C(Y)$ در $C(X)$ که شامل $I+\mathbb{R}$ باشد، کارایی مفیدی در بررسی مفاهیمی که مورد توجه ما می‌باشند خواهند داشت. در قسمت دوم این رساله کمی توجه خود را خاص تر خواهیم کرد و به ایدآل I از حلقه $C(X)$ به دید یک زیر حلقه می‌نگریم. اما نوع پرسش‌هایی را که در اینجا مطرح خواهیم کرد کمی دست خوش تغییر می‌گردند. اول این که به دلیل یکدار نبودن حلقه I، بسیاری از قوانین آشنا در حلقه‌های تعویض پذیر و یکدار در اینجا دارای پاسخی نا بدیهی و یا بدون پاسخ می‌باشند. حتی وجود ایدآل‌های ماکسیمال به طور آشکار نمایان نیست. بنابراین بررسی ایدآل های اول و ماکسیمال حلقه I را در دستور کار خود قرار می‌دهیم. لازم به توضیح است که نحوی چیدمان و طرح بندی مطالب در این رساله به گونه ای است که بررسی ساختار ایدآلی یک ایدآل را در فصل دوم آورده ایم. زیرا معتقدیم که شاید این نکته که ایدآل I مشمول در زیر حلقه $I+\mathbb{R}$ است، تقدم مطالعه آن را نیز مبرهن خواهد کرد. گرچه به این نکته نیز معترف ایم که شاید ارتباط آن با مطالب قبلی از لحاظ موضوعی بسیار کم باشد. اما می‌توان همچنان به عنوان یک زیر حلقه از $C(X)$ مورد بحث و بررسی قرار گیرد. مطالعه مدون ساختار حلقه ای یک ایدآل از بخش دومِ فصل دوم آغاز می‌گردد. این بخش به مطالعه ساختار ایدآل‌های اول و ماکسیمالِ ایدآل I در حلقه $C(X)$ می‌پردازد. قبل از هر چیز تاکید می‌کنیم که مطالب این بخش کوتاه، به طور کامل توسط **راد** در [۷۹] مورد مطالعه قرار گرفته اند. ما در اینجا صرفاً با این دیدگاه که دسترسی به قضایا آسانتر گردد و همچنین با عنایت به این که قضایا و برهان‌ها آموزنده و ایده بخش بوده اند، به بیان مجدد آنها پرداخته ایم. مضاف بر این که ادعا می‌کنیم آوردن آنها به خودی خود نیز خالی از لطف نمی‌باشد. شاید اساسی ترین پرسش‌ها در مورد ایدآل I به عنوان یک حلقه، اطمینان از وجود ایدآل ماکسیمال در آن، شرایط شمول ایدآلی از I در یک ایدآل ماکسیمال و ارتباط ایدآل‌های ماکسیمال I با ایدآل‌های ماکسیمال $C(X)$ می‌باشند. یکی از اساسی ترین نتایج در این بخش قضیه ۴.۲.۲ می‌باشد. این قضیه بیان می‌کند که هر ایدآل ماکسیمال در I حاصل از تحدید یک ایدآل ماکسیمال در $C(X)$ می‌باشد. در قضیه ۵.۲.۲ شرط لازم و کافی برای این که ایدآل J از I در یک ایدآل

ماکسیمالِ I قرار گیرد مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. می‌توان ادعا کرد که بحث اصلی ما در مورد ساختار ایدآلی در یک ایدآل از بخش سوم آغاز می‌گردد. می‌دانیم که اگر J ایدآلی از I باشد، لزوماً ایدآلی از $C(X)$ نخواهد بود. لذا پرسش اساسی که در این بخش مطرح می‌گردد یافتن شرط لازم و کافی برای شناسایی ایدآل I است به طوری که هر ایدآل در آن، ایدآلی از $C(X)$ باشد. قضیه ۶.۳.۲ به این سوال پاسخ می‌دهد. در ادامه با افزودن بر قیدهای قضیه مذکور در ۳.۲ .۱۱ شرط را کمی توسعه داده و می پرسیم چه وقت هر ایدآل در I، یک z-ایدآل در $C(X)$ است. می‌توان ادعا کرد که این دو قضیه نقشی محوری در بخش سوم ایفا خواهند کرد. هدف از ارائه این دو قضیه این است که نشان دهیم تقریباً بسیاری از ایدآل‌ها ساختار حلقه ای نسبتاً پیچیده ای دارند. حتی نمی‌توان دیدی خوشبینانه از ایدآل‌های یک ایدآل نسبت به ایدآل های $C(X)$ داشت. در بخش چهارم برخی ایدآل‌های کراندار مهم در $C(X)$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. می‌خواهیم شرایطی را بر این ایدآل‌ها قرار دهیم که در آن‌ها هر ایدآل اول، ماکسیمال باشد. به طور محسوسی تا انتهای این بخش ساکل حلقه $C(X)$ که آن را با $C_F(X)$ نشان می‌دهیم، آشکار می‌گردد. بنابراین بر آن شدیم تا در ابتدا شکل توپولوژیک ایدآل $C_F(X)$ را مشخص کنیم. لم ۵.۴.۲ به بررسی این موضوع پرداخته است. در قضیه ۹.۴.۲ شرط لازم و کافی برای این که در ایدآل‌های $C_K(X)$ و $C_\psi(X)$ هر ایدآل اول، ماکسیمال باشد را ارائه کرده ایم. فضاهای شبه گسسته اولین بار در این جا ظاهر می‌گردند. به این سوال پاسخ داده ایم که آیا یک فضای شبه گسسته تحت همریختی‌های حلقه ای خوش رفتار عمل می‌کند. به عبارت دیگر می‌خواهیم بدانیم که چه وقت برای یکریختی $C(X) \cong C(Y)$ و فضای شبه گسستهX، فضای Y نیز شبه گسسته خواهد بود. نتایج ۱۱.۴.۲ و ۱۲.۴.۲ به این پرسش پرداخته اند. شاید بتوان یکی از مهمترین دستاوردها در مطالعه ایدآل‌های کراندار از منظر یک حلقه را در پاسخ به این پرسش یافت که چه وقت در زیرحلقه $C_\infty(X)$ هر ایدآل اول، ماکسیمال است. این پرسش ما را به مشخص سازی توپولوژیک P_∞- فضاها راهنمایی خواهد کرد (۱۹.۴.۲). در [۲] شرط‌های معادلی برای منظم بودن حلقه $C_\infty(X)$ بدست آمده است. با استفاده از نتایج حاضر،

بهبودی از این معادل‌ها در قضیه ۲۱.۴.۲ ارائه شده است. بخش پنجم را مجدداً به ایدآل‌های اول واقع در ایدآل دلخواه I از $C(X)$ اختصاص داده ایم. اساسی ترین نتیجه در این بخش قضیه ۲.۵.۲ می‌باشد. یکی از پیامدهای این قضیه این است که اگر X یک F-فضا نباشد، همواره ایدآلی چون I در $C(X)$ وجود دارد که دارای دو ایدآل اول با مجموع غیر اول می‌باشد. همچنین با توجه به ویژگی پخشی در ایدآل‌های مطلقاً محدب، ایدآل مذکور مطلقاً محدب نخواهد بود. در قضیه ۳.۵.۲ نشان داده ایم که هر ایدآل در حلقه $C(X)$، خود یک PM^+- حلقه می‌باشد. با توجه به قضیه ۴.۵.۲ می‌توان دریافت که برخلاف حلقه $C(X)$، اگر X یک P-فضا نباشد، ایدآلی مانند I و ایدآل‌های ماکسیمال $M_۱$ و $M_۲$ در I وجود دارند به طوری که $M_۱ \cap M_۲ \neq M_۱ \cdot M_۲$. این بخش را با تعمیم تعریف z-ایدآل‌ها در یک ایدآل و انطباق آن با z-ایدآل‌های نسبی به اتمام می‌رسانیم. در بخش ششم ایدآل‌های تفکیک پذیر را معرفی می‌کنیم. محور اصلی این بخش قضیه ۵.۶.۲ می‌باشد. این قضیه ایدآل‌های تفکیک پذیر را به زیر فضاهای چگال-تفکیک پذیر مرتبط می‌سازد. در ادامه در ۷.۶.۲ شرط لازم و کافی برای این که یک P-ایدآل تفکیک پذیر باشد را به دست آورده ایم. با استفاده از این قضیه شرط لازم و کافی برای آن که تمام P-ایدآل‌ها در $C(X)$ تفکیک پذیر باشند ارائه شده است. در انتهای این بخش به بررسی چگال-تفکیک پذیری ایدآل‌های $C_K(X)$ و $C_\psi(X)$ پرداخته ایم. بخش آخر این فصل را به بعد گلدی یک ایدآل در حلقه $C(X)$ اختصاص داده ایم. البته برای ایدآل I، دو مفهوم بعد گلدی و بعد گلدی تعمیم یافته را معرفی نموده‌ایم و نشان می‌دهیم که برای ایدآل I در $C(X)$، این دو تعریف یکی هستند. قضیه ۴.۷.۲ و گزاره ۵.۷.۲ به واکاوی این نکته پرداخته اند. همچنین این نتایج به این مطلب نیز تاکید خواهند داشت که برای این کمیت، ایدآل‌ها نظیر حلقه‌های توابع پیوسته عمل می‌کنند. برای مشاهده این تشابه با بعد گلدی حلقه $C(X)$ می‌توان به مرجع [۶] مراجعه نمود. این فصل را با بررسی بعد گلدی P-ایدآل‌ها در حالت شمارا که در نتیجه ۸.۷.۲ خلاصه شده است، خاتمه می‌دهیم.

فصل ۱
مباحثی در حلقه‌های توابع پیوسته

۱.۱ آشنایی با حلقه‌های توابع پیوسته

فرض کنیم X فضایی توپولوژی باشد. در این صورت $C(X)$ عبارت است از مجموعه تمام توابع پیوسته از X در $\mathbb{R}$. این مجموعه به همراه دو عمل جمع و ضرب نقطه ای تشکیل یک حلقه تعویض پذیر و یکدار می دهد. مجموعه تمام توابع کراندار در $C(X)$ را با $C^*(X)$ نمایش می دهیم. به وضوح این مجموعه با اعمال جمع و ضربی که از $C(X)$ به ارث می برد، تشکیل یک زیر حلقه در $C(X)$ می دهد. اگر $f, g \in C(X)$ ، در این صورت $f \wedge g, f \vee g \in C(X)$ ، که در آن

$$(f \vee g)(x) = max\{f(x), g(x)\} \qquad (x \in X),$$

$$(f \wedge g)(x) = min\{f(x), g(x)\} \qquad (x \in X).$$

در فصل سوم از [۳۸] نشان داده شده است که برای فضای توپولوژی X فضای کاملاً منظم و هاوسدورف ρX وجود دارد به طوری که $C(X) \cong C(\rho X)$. از این پس بدون این که صراحتاً به این نکته اشاره کنیم، تمامی فضاهای توپولوژی آمده در این رساله را کاملاً منظم و هاوسدورف در نظر می گیریم.

برای $f \in C(X)$، صفر-مجموعه f عبارت است از $Z(f) = f^{\leftarrow}(\circ) = \{x \in X : f(x) = \circ\}$. همچنین مجموعه $Coz(f) = X \setminus Z(f)$ را متمم صفر-مجموعه f می نامیم. گردایه تمام صفر-

مجموعه های فضای توپولوژی X، $Z(X) = \{Z(f) : f \in C(X)\}$، نسبت به اجتماع متناهی و اشتراک شمارا بسته است. بنابراین $Z(X)$ با رابطه شمول تشکیل یک مشبکه می دهد. هر پالایه روی مشبکه صفر-مجموعه ها را یک z-پالایه گوییم. بنابراین یک z-پالایه عبارت است از گردایه $\mathcal{F}$ از صفر-مجموعه های X به طوری که:

(الف) $\emptyset \notin \mathcal{F}$،

(ب) اگر $Z_1, Z_2 \in \mathcal{F}$، آنگاه $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{F}$،

(پ) اگر $Z_1 \in \mathcal{F}$، $Z_2 \in Z(X)$ و $Z_1 \subseteq Z_2$ آنگاه $Z_2 \in \mathcal{F}$.

یک z-پالایه که نسبت به رابطه شمول ماکسیمال است را یک z-ابر پالایه می نامیم. فضای توپولوژی X کاملاً منظم[1] است اگر و تنها اگر گردایه $Z(X)$ تشکیل یک پایه برای مجموعه های بسته فضای X دهد و یا به طور معادل متمم صفر-مجموعه های X تشکیل یک پایه برای زیر مجموعه های بازِ X دهند. تابع $f \in C(X)$ در $C(X)$ معکوس پذیر است اگر و تنها اگر $Z(f) = \emptyset$. همچنین f یک مقسوم علیه صفر است اگر و تنها اگر $int_X Z(f) \neq \emptyset$. گزاره بعد که از تمرین $1D$ در [۳۸] استخراج شده است، در فصل های دوم و سوم بسیار مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

گزاره ۱.۱.۱. *فرض کنیم $f, g \in C(X)$. اگر $Z(g) \subseteq int_X Z(f)$ آنگاه f مضربی از g است. به عبارت دیگر $h \in C(X)$ وجود دارد به طوری که $f = gh$.*

اگر Z را به عنوان تابعی از $C(X)$ در $Z(X)$ با ضابطه $f \to Z(f)$، برای $f \in C(X)$، در نظر بگیریم، در این صورت Z تابعی پوشا است. برای هر $A \subseteq C(X)$ و $\mathcal{S} \subseteq Z(X)$، خواهیم داشت $Z(A) = \{Z(f) : f \in A\}$ و $Z^{\leftarrow}(\mathcal{S}) = \{f \in C(X) : Z(f) \in \mathcal{S}\}$.

ایدآل I در $C(X)$ را یک z-ایدآل می گوییم اگر $I = Z^{\leftarrow}(Z(I))$، و یا به طور معادل اگر $Z(f) \in Z(I)$، آنگاه $f \in I$. به سادگی می توان نشان داد که ایدآل های ماکسیمال $C(X)$، نمونه ای از z-ایدآل ها هستند. قضیه بعد که در واقع از بخش ۲.۳ در [۳۸] آورده شده است، ارتباط میان

[1] توجه به این نکته ضروری است که در این جا شرط هاوسدورف بودن لزوماً برقرار نیست.