دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)

عنوان

حل عددی معادلات انتگرال و انتگرال – دیفرانسیل با استفاده از چندجمله‌ای‌های لژاندر و چبیشف

تدوین

سروناز سوری

استاد راهنما

دکتر شهنام جوادی

شهریور ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

تاریخ :

شماره :

پیوست :

صورتجلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ کارشناسی‌ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ خانم سروناز سوری دانشجوی دورهٔ کارشناسی‌ارشد رشتهٔ ریاضی کاربردی تحت عنوان:

حل عددی معادلات انتگرال و انتگرال دیفرانسیل با استفاده از چندجمله‌ای‌های لژاندر و چبیشف

در روز سه‌شنبه مورخ ۹۰/۶/۲۹ در دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجهٔ آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمرهٔ این آزمون ۱۸/۷۵ (هجده و هفتاد و پنج صدم) است.

۱ـ عالی ☑

۲ـ بسیار خوب ☐

۳ـ خوب ☐

۴ـ قابل قبول ☐

۵ـ غیرقابل قبول ☐

استاد راهنما	داور خارجی	داور داخلی
دکتر شهنام جوادی	دکتر علیمردان شاهرضایی	دکتر اسمعیل بابلیان

اسمعیل بابلیان

رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

سپاسگزاری

شکر و سپاس خدای بزرگ را که در پرتو عنایات خاصه‌اش، توفیق یافتم تا از میان انبـوه انسانهای مشتاق به تحصیل، این فرصت را برای من نیز فراهم ساخت تا با بهره‌گیری از فروغ حکمت بزرگان و پیشکسوتان میدان دانش، طریق خود را روشن کنم و در پرتو اندیشـه‌هـای والای آن فرزانگان، قدمی هرچند کوچک پیش نهم.

دین بنده به اساتید بزرگ و مهربانی چون آقایان دکتر بابلیان و دکتر جوادی بس بـزرگ است. امید آنکه تا پایان عمر در صحت و سلامت به سر برند و به مشتاقان علم این مزر و بوم همچنان درس علم و ادب دهند.

شایسته است از جناب آقای دکتر شاهرضایی که قبول زحمت کردند و داوری پایان نامه اینجانب را بر عهده گرفتند، تشکر و قدردانی کـنم. همچنـین از کلیـه عزیزانـی کـه در دوره تحصیلم از مساعدت و همیاریشان بهره برده‌ام، کمال تشکر را دارم.

و در پایان

اگر علم و دانش در نزد پدر و مادرم اینچنین گرانقـدر و تلاشـها و تشـویق‌هایشـان نبـود، نمی‌دانم مسیر زندگیم به چه صورت قلم می‌خورد. پس اگـر مـوفقیتی اسـت، همـه مرهـون زحمات ایشان بوده است و تا ابد خود را مدیون آنان می‌دانم.

بر خود لازم می‌دانم از خواهرانم و همسرم کمال تشکر و سپاسگزاری را داشته باشم.

تقدیم

به پدرم که هر لحظه در کعبه عشق می پرستمش

و به روان پاک مادرم که طنین دل انگیز قصه های شیرینش، صفحات کودکی ام را رنگین نمود و با غروب غم انگیزش، تلخترین و پر غصه ترین قصه را سرود و مانده برگهای دفتر حیاتم را به سیاهی کشاند.

تا هستم اشکهایم نثارش باد.

به همسرم، همدم ناله هایم، که صمیمانه می کوشد از بار اندوهم بکاهد.

چکیده

برای حل معادلات انتگرال پریشنده منفرد و معادلات انتگرال – دیفرانسیل ولترا مرتبه اول و معادلات انتگرال - دیفرانسیل تأخیری ولترا، از روش بسط متناهی لژاندر و برای حل معادلات انتگرال ولترا با هسته‌های لگاریتمی از بسط متناهی چبیشف استفاده می‌کنیم و به تحلیل خطا و بعد از آن به بررسی مقایسه بین نتایج به دست آمده با دیگر روش‌ها می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: معادلات انتگرال پریشنده منفرد، معادلات انتگرال - دیفرانسیل تأخیری ولترا، معادلات انتگرال ولترا با هسته های لگاریتمی، چندجمله‌ای‌های لژاندر و چبیشف

رده‌بندی موضوعی ریاضیات ۲۰۱۰: 31A10 - 45J05 - 42C10 - 45D05 - 32A55

پیشگفتار

در این پایان نامه، هدف ارائه روشی برای حل برخی از معادلات انتگرال و معادلات انتگرال – دیفرانسیل بر پایه روش های بسط لژاندر و چبیشف می باشد، که در فصل اول، به معرفی معادلات دیفرانسیل و چند جمله ای های متعامد می پردازیم. در فصل دوم معادلات انتگرال پریشنده منفرد، معادلات انتگرال – دیفرانسیل ولترا نوع اول و معادلات انتگرال – دیفرانسیل تأخیری ولترا را با استفاده از بسط لژاندر متناهی حل می کنیم. در این روش تقریبی از $y(t)$ را بصورت زیر در نظر می گیریم و:

$$y(t) \approx u_{i+1}(t) = \sum_{r=0}^{\nu} a_r^{(i+1)}\, P_r\left(\frac{2}{h_i}(t - t_i) - 1\right),$$

که در آن $P_r(t)$ چند جمله ای لژاندر مرتبه r می باشد و سپس به بررسی روش و مرتبه خطا می پردازیم.

در فصل سوم، با استفاده از یک روش عددی، به حل معادلات انتگرال ولترا با هسته لگاریتمی می پردازیم، که در این روش نیز تقریبی از $y(t)$ بصورت زیر در نظر می گیریم،

$$y(t) \approx u_{i+1}(t) = \sum_{r=0}^{\nu}{}'' a_r^{(i+1)} T_r\left(\frac{2}{h_i}(t - t_i) - 1\right)$$

که در آن $T_r(t)$ چندجمله ای چبیشف مرتبه r می باشد و سپس به بررسی روش و مرتبه خطا می پردازیم. در فصل چهارم، نتایج بدست آمده را با ارائه چند مثال بیان می کنیم.

این پایان نامه، نتیجه بررسی و تحلیل مقاله هایی است با عنوان:

1. Khater. A.H & Shamardan. A.B & Callebaut. D.K & Sakran. M.R.A.: Numerical solutions of integral & integro – differential equations using Legendre polynomials. Numer Algor 46: 195-218 (2007)
2. Khater, A.H., Shamardan, A.B., Callebaut, D.K., Sakran, M.R.A.: Solving integral equations with logarithmic kernels by chebyshev polynomials. Numer Algor. 47, 81-93 (2008)

فهرست **صفحه**

فهرست جدول ها صفحه

فصل ۱

مقدمه‌ای بر معادلات انتگرال و چندجمله‌ای‌های متعامد

در این فصل نگاهی اجمالی بر انواع معادلات انتگرال و هسته‌ها [۱۲و۱] و چندجمله‌ایهای متعامد[۲۵] خواهیم داشت.

در ادامه به معرفی چند جمله‌ای‌های لژاندر، چبیشف [۲۵و۱۹] می پردازیم و در انتها سریهای فوریه [۴۹] را تعریف خواهیم کرد.

در روند حل بسیاری از مسائل ریاضی فیزیک، بیولوژی، شیمی و مهندسی با معادلات انتگرال مواجه می شویم. معادلات انتگرال از تبدیل سایر مسائل ریاضی از جمله معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی نیز پدید می‌آیند. بنابراین نظریه، کاربرد و روش‌های حل معادلات انتگرال بعنوان یک موضوع مهم در ریاضیات کاربردی مطرح است.

۱-۱ معادلات انتگرال

یک معادله انتگرال، معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $y(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد:

$$y(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,s)y(s)ds. \qquad (۱.۱)$$

که در آن $K(x,s)$ هسته[۱] معادله انتگرال نامیده می شود. باید توجه داشت که در اینجا تابع مجهول یعنی $y(x)$ تنها در زیر علامت انتگرال ظاهر شده است و هسته معادله یعنی $K(x,s)$ و تابع $f(x)$ از قبل معلوم هستند و هدف تعیین تابع مجهول $y(x)$ است که در معادله بالا صدق کند.

۱-۲ دسته‌بندی معادلات انتگرال خطی[۲]

متداول‌ترین معادلات انتگرال خطی را می‌توان به دو گروه معادلات انتگرال فردهلم و معادلات انتگرال ولترا دسته‌بندی کرد.

۱-۲-۱ معادلات انتگرال خطی فردهلم

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی فردهلم، که در آنها حد بالا و پایین انتگرال‌گیری به ترتیب اعداد ثابت a, b هستند، به صورت زیر می باشد:

$$\phi(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} K(x,s)y(s)ds, \qquad a \le x,s \le b\ . \qquad (۲.۱)$$

که در آن هسته معادله انتگرال $K(x,s)$ و تابع $f(x)$ مشخص هستند و λ هم یک پارامتر معلوم می‌باشد.

معادله (۲.۱) را خطی می‌گویند، زیرا که تابع مجهول $y(x)$ زیر علامت انتگرال بطور خطی ظاهر شده است. است. (یعنی توان $y(x)$ ، یک است.)

بر حسب اینکه $\phi(x)$ کدام‌یک از مقادیر زیر را انتخاب کند، معادلات انتگرال فردهلم خطی به دو دسته عمده تقسیم می شوند:

---

[۱] kernel
[۲] Linear

۱) هنگامی‌که $\phi(x) \equiv 0$ ، معادله (۲-۱) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds = 0. \tag{۳.۱}$$

این معادله را معادله انتگرال فردهلم نوع اول می نامند.

۲) هنگامی‌که $\phi(x) \equiv 1$ ، معادله (۲) به صورت زیر خواهد بود:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds. \tag{۴.۱}$$

به این معادله انتگرال فردهلم نوع دوم می‌گویند.

۱-۲-۲ معادلات انتگرال خطی ولترا

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی ولترا، یعنی معادلاتی که در آنها حد بالا و پایین انتگرال‌گیری بجای اینکه عدد ثابتی باشد، به صورت تابعی از x ظاهر می شود، به‌شکل زیر می باشد:

$$\phi(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,s)y(s)ds, \tag{۵.۱}$$

که در آن تابع مجهول یعنی $y(x)$ ، زیر علامت انتگرال به‌صورت خطی می‌باشد.

باید توجه کرد که (۵.۱) را می‌توان بعنوان یک حالت خاص معادلات انتگرال فردهلم در نظر گرفت بدین صورت که هسته $K(x,s)$ برای $s > x$ و $x \in [a,b]$ ، صفر فرض شود.

معادلات انتگرال ولترا را می‌توان با توجه به مقدار $\phi(x)$ به دو گروه دسته‌بندی کرد:

۱- هنگامی‌که $\phi(x) \equiv 0$، معادله (۵.۱) به‌صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x,s)y(s)ds = 0. \tag{۶.۱}$$

به این معادله انتگرال ولترا نوع اول می‌گویند.

۲- زمانی‌که $\phi(x) \equiv 1$ ، آنگاه معادله (۵.۱) به‌شکل زیر خواهد بود:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,s)y(s)ds. \tag{۷.۱}$$

این را معادله انتگرال ولترا نوع دوم می‌نامند.

۱-۳ معادلات انتگرال ولترای پریشنده منفرد

معادلات انتگرال ولترای پریشنده منفرد، دسته‌ای خاص از معادلات انتگرال ولترا هستند که از دیدگاه عددی کمتر مورد توجه قرار گرفته‌اند:

$$\varepsilon y(t) = \int_{0}^{t} (t-s)^{-\alpha} f\big(t, s, y(s)\big) ds\,, \quad t \in I\,, \quad 0 \leq \alpha < 1. \qquad (۸.۱)$$

$\varepsilon > 0$ پارامتری کوچک است که یک مسأله پریشنده منفرد می‌سازد.

۱-۴ معادلات انتگرال – دیفرانسیل [۳]

ولترا در اوایل سال ۱۹۰۰ در حال مطالعه موضوع رشد جمعیت بود که با معادلات انتگرال – دیفرانسیل مواجه شد.

در این گونه معادلات، تابع مجهول $y(x)$ در دو طرف ظاهر می‌شود. در یک طرف زیر علامت انتگرال و در طرف دیگر به‌عنوان یک مشتق معمولی نمایان می‌شود.

شکل کلی معادلات انتگرال – دیفرانسیل ولترای غیرخطی از مرتبه اول به‌صورت :

$$\begin{cases} x'(s) = g\big(s, x(s)\big) + \lambda \int_{a}^{s} K\big(s, t, x(t)\big) dt\,, \\ x(a) = \alpha, \end{cases} \qquad (۹.۱)$$

و همچنین شکل کلی معادلات انتگرال - دیفرانسیل فردهلم خطی معمولی نوع دوم از مرتبه دوم به صورت ذیل است:

$$\begin{cases} P(s)x''(s) + Q(s)x'(s) + R(s)x(s) + \lambda \int_{a}^{b} K(s,t)x(t)dt = g(s), \\ Cx(r) + Dx'(r) = e\,. \end{cases} \qquad (۱۰.۱)$$

که در آن

[۳] Integro – differential equations

$$\begin{cases} r = (r_1, \dots, r_m)^T, & a \le r_i \le b, \\ x(r) = (x(r_1), \dots, x(r_m))^T, \\ x'(r) = (x'(r_1), \dots, x'(r_m))^T. \end{cases}$$

و برای یک مسئله مرتبه p ام، C و D ماتریس‌های $p \times m$ و e یک ماتریس $p \times 1$ است.

در معادلات (۹.۱) و (۱۰.۱)، g و K و P و Q ، R توابع معلوم، ولی x تابعی مجهول می باشند.

توجه کنید که در معادله (۹.۱) با قرار دادن $a = 0$ و $\lambda = 1$ و $\alpha = x_0$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x'(s) = g\big(s, x(s)\big) + \int_0^s K\big(s, t, x(t)\big) dt, \\ x(0) = x_0 . \end{cases} \qquad (11.1)$$

اگر قرار دهیم:

$$z(s) = \int_0^s K\big(s, t, x(t)\big) dt.$$

آن گاه

$$x'(s) = f\big(s, x(s), z(s)\big), \qquad x(0) = x_0 . \qquad (12.1)$$

که در آن داریم:

$$f\big(s, x(s), z(s)\big) = g\big(s, x(s)\big) + z(s).$$

در حقیقت به دنبال حل عددی معادلات انتگرال – دیفرانسیل غیرخطی[۴] مرتبه اول هستیم که به‌صورت (۱۲.۱) نوشته می شود.

تعدادی از پدیده‌ها در فیزیک و بیولوژی در قالب این نوع معادلات انتگرال – دیفرانسیل ظاهر می‌شوند.

در زیر چند مثال از معادلات انتگرال – دیفرانسیل آورده شده است:

$$y''(x) = -x + \int_0^x (x - s) y(s) ds, \qquad y(0) = 0 \ , y'(0) = 1. \qquad (13.1)$$

$$y'(x) = -sinx - 1 - \int_0^1 y(s) ds, \qquad y(0) = 1 . \qquad (14.1)$$

[۴] Non - Linear

که معادله (۱۳.۱) معادله انتگرال – دیفرانسیل ولترا و معادله (۱۴.۱) معادله انتگرال دیفرانسیل فردهلم است.

۱-۵ معادلات انتگرال – دیفرانسیل تأخیری ولترا

معادله انتگرال – دیفرانسیل تأخیری ولترا به‌صورت زیر می‌باشد که در مدل‌سازی ریاضی پدیده وراثت کاربرد دارد، و هسته k نه تنها به $y(s)$ بلکه به $y(t)$ نیز وابسته می‌باشد.

$$y'(t) = f(t, y(t)) + \int_{-\infty}^{t} K(t, s, y(t), y(s))\, ds\, , t \in I. \qquad (۱۵.۱)$$

۱-۶ معادلات انتگرال منفرد[۵]

معادله انتگرال از نوع اول

$$f(x) = \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,s) y(s) ds. \qquad (۱۶.۱)$$

یا از نوع دوم

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,s) y(s) ds. \qquad (۱۷.۱)$$

را که در آنها حد پایین، حد بالا یا هر دو حدود انتگرال‌گیری نامتناهی باشند، معادله انتگرال منفرد می‌نامند. بعلاوه اگر هسته معادلات انتگرال (۱۶.۱) و (۱۷.۱) در یک نقطه یا در نقاط بیشتری از دامنه انتگرال‌گیری نامتناهی باشد، باز هم اینگونه معادلات را معادلات انتگرال منفرد می‌نامند.

در زیر چند مثال از معادلات انتگرال منفرد آورده شده است:

$$y(x) = ۲x + ۶ \int_{۰}^{\infty} \sin(x-s)\, y(s) ds. \qquad (۱۸.۱)$$

$$y(x) = ۱ + x^{۲} + \int_{-\infty}^{\infty} (x+s) y(s) ds. \qquad (۱۹.۱)$$

$$x^{۲} = \int_{۰}^{x} \frac{۱}{\sqrt{x-s}} y(s) ds. \qquad (۲۰.۱)$$

$$x = \int_{۰}^{x} \frac{۱}{(x-s)^{\alpha}} y(s) ds \quad , \qquad ۰ < \alpha < ۱\, . \qquad (۲۱.۱)$$

[۵] Singular

به این نکته باید توجه کرد که معادلات انتگرال (۲۰.۱) و (۲۱.۱) را به‌ترتیب معادله انتگرال آبل و معادله انتگرال آبل تعمیم یافته می‌نامند که این معادلات انتگرال منفرد ابتدا توسط یک ریاضی‌دان نروژی بنام آبل در سال ۱۸۲۳ معرفی شدند.

۱-۷ انواع هسته ها

انواع هسته‌های معادله انتگرال را می‌توان به‌صورت زیر عنوان کرد:

۱-۷-۱ هسته‌های جدایی‌پذیر یا تبهگن[۶]

هسته $K(s,t)$ را جدایی پذیر یا تبهگن گوییم در صورتی که بتوانیم به صورت مجموع تعداد متناهی جملات بنویسیم که هر جمله حاصل ضرب تابعی از s در تابعی از t باشد:

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(s) b_i(t). \qquad (۲۲.۱)$$

(توابع $a_i(s)$ یا $b_i(t)$ ، مستقل خطی هستند.)

۱-۷-۲ هسته های متقارن[۷]

هسته $K(s,t)$ متقارن یا هرمیتی است هرگاه $K(s,t) = K^*(t,s)$ که $K^*(t,s)$ نمایانگر مزدوج الحاقی $K(s,t)$ است.

یادآور می شویم که برای هسته های حقیقی مقدار $K(s,t) = K(t,s)$.

۱-۷-۳ هسته های نرمال

هسته $K(s,t)$ را نرمال گوییم هرگاه $KK^* = K^*K$.

۱-۷-۴ هسته های $\mathcal{L}^2$

هسته $K(s,t)$ را یک هسته $\mathcal{L}^2$ می نامیم اگر در شرایط زیر صدق کند:

$$\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 \, ds dt < \infty,$$

[۶] degenerate

[۷] Symmetric kernels

$$\int_{a}^{b} |K(s,t)|^{۲}\, ds < \infty \ , \ \ t \in [a,b],$$

$$\int_{a}^{b} |K(s,t)|^{۲}\, dt < \infty, \quad s \in [a,b].$$

۱-۸ انتگرال پیچشی[۸]

بسیاری از مسائل مکانیک و فیزیک منجر به معادله انتگرال با هسته $K(s,t)$ می‌شوند که $K(s,t)$ خود تابعی بر حسب $s-t$ است.

$$K(s,t) = k(s-t).$$

که k تابعی تک مقداری است.

معادله انتگرال $g(s) = f(s) + \lambda \int k(s-t) g(t) dt$ (از نوع فردهلم یا ولترا)، معادله انتگرال از نوع پیچشی نامیده می‌شود.

انتگرال های

$$\int_{۰}^{s} k(s-t) g(t) dt = \int_{۰}^{s} k(t) g(t-s) dt. \qquad (۲۳.۱)$$

به انتگرال‌های پیچشی معروف‌اند.

۱-۹ روش‌های تصویری[۹] برای حل معادلات انتگرال فردهلم

برای حل تقریبی معادله انتگرال

$$\lambda \mathrm{y}(\mathrm{x}) - \int_{a}^{b} K(x,s) y(s) ds = f(x), \ \ a \le x \le b, \qquad \lambda \neq ۰\,. \qquad (۲۴.۱)$$

یک خانواده از توابع را طوری انتخاب می‌کنیم که $\tilde{y}(x)$ ترکیب خطی این توابع، تقریب مناسبی برای جواب دقیق $y(x)$ باشد. انتظار ما از جواب تقریبی $\tilde{y}(x)$ این است که به‌صورت تقریبی در (۲۴.۱) صدق کند.

---

[۸] Convolution integral
[۹] Projection methods

روش‌های متفاوتی وجود دارد که $\tilde{y}(x)$ به‌طور تقریبی در (۲۴.۱) صدق کند و معروف‌ترین این روش‌ها، روش هم‌مکانی و روش گلرکین[۱۰] هستند که در ادامه فقط به معرفی روش هم‌مکانی می‌پردازیم. نظریه این روش‌ها بر پایه آنالیز تابعی استوار است و چون از عملگرهای تصویری استفاده می‌گردد، به روش‌های تصویری معروف‌اند.

۱-۱۰ تحلیل روش‌های تصویری

شکل عملگری معادله (۲۴.۱) به صورت زیر است:

$$(\lambda - K)y = f$$

که در آن عملگر K از فضای باناخ X بتوی X است و انتخاب‌های معمول X به صورت $C([a,b])$ یا $\mathcal{L}^2([a,b])$ هستند. در عمل، یک دنباله از زیر فضاهای متناهی البعد $X_n \subset X, n \geq 1$ ، با بعد d_n را انتخاب می‌کنیم. فرض کنید $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{d_n}\}$ یک پایه برای فضای X_n تشکیل دهد که برای سادگی قرار می‌دهیم $d \equiv d_n$. در این صورت برای هر تابع $y_n \in X_n$ می‌توانیم y_n را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^{d} c_i \varphi_i(x), \quad x \in [a,b] \,. \tag{۲۵.۱}$$

اکنون فرض کنید $y_n(x)$ یک جواب تقریبی معادله (۲۳.۱) باشد، آنگاه:

$$\lambda y_n(x) - \int_a^b K(x,s)\, y_n(x) ds \cong f(x) \quad , \quad x \in [a,b], \lambda \neq 0 \,. \tag{۲۶.۱}$$

با جایگذاری (۲۵.۱) در (۲۶.۱)، ضرایب $\{c_i\}$ را به‌دست می‌آوریم و r_n را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \lambda y_n(x) - \int_a^b K(x,s)\, y_n(x) ds - f(x) \\ &= \sum_{j=1}^{d} c_j \left\{ \lambda \varphi_j(x) - \int_a^b K(x,s) \varphi_j(s) ds \right\} - f(x) \,. \end{aligned} \tag{۲۷.۱}$$

r_n به جمله مانده وزنی تقریب y_n معروف است و با استفاده از عملگر K داریم:

$$r_n = (\lambda - K)y_n - f.$$

[۱۰] Galerkin method